

REGULARITEITSTELLINGS VIR ELLIPTIESE RANDWAARDEPROBLEME

DEUR

L. PRETORIUS

Voorgelê ter vervulling van 'n deel van
die vereistes vir die graad

MSC (WISKUNDE)

in die Fakulteit Wis- en Natuurkunde
UNIVERSITEIT VAN PRETORIA

JUNIE 1981

Die skrywer wil graag die volgende persone bedank vir hulle onderskeie bydraes tot die suksesvolle voltooiing van dié verhandeling:

Sy vrou Christa vir morele ondersteuning

Sy ouers mnr en mev G J Pretorius

Prof F D Penning as leier wat 'n deurentydse belangstelling in die skrywer se navorsing getoon het

Prof P J Zietsman, hoof, Departement Wiskunde

Prof J Visser, hoof Departement Meganiese Ingenieurswese

INHOUDSOPGAWE

BLADSY

<u>HOOFSTUK 1</u>	: PROBLEEMSTELLING EN ALGEMENE HULPRESULTATE	1
1.	INLEIDING	1
2.	PROBLEEMSTELLING	2
3.	FUNKSIERUIMTES	3
4.	DIE OPERATOR K	18
<u>HOOFSTUK 2</u>	: RANDREGULARITEIT IN DIE RAAKLYNIGE RIGTING	26
1.	INLEIDING	26
2.	HULPRESULTATE EN DEFINISIËS	26
3.	'N REGULARITEITSTELLING VIR DIE RAAKLYNIGE RIGTING	44
4.	GEVOLG - RAAKLYNIGE RANDREGULARITEITSEIEN- SKAPPE VIR 'N ELLIPTIESE RANDWAARDEPROBLEEM	50
<u>HOOFSTUK 3</u>	: REGULARITEIT VAN TWEDE ORDE RAND- WAARDEPROBLEME	56
1.	ALGEMEEN	56
2.	DEFINISIËS	56
3.	'N REGULARITEITSTELLING	58
3.1	Regulariteit vir die tweede orde Dirichlet-probleem	63
3.2	Regulariteit vir die tweede orde Neumann-probleem	65
3.3	Regulariteit vir die tweede orde Newton- probleem	68

(ii)

	<u>BLADSY</u>
<u>HOOFSTUK 4</u> : RANDREGULARITEIT IN DIE NORMAAL- RIGTING	71
1. OORSIG	71
2. HULPRESULTATE	71
3. DIE HOOFSTELLING VIR RANDREGULARITEIT	72
3.1 Regulariteit vir hoër orde Dirichlet-probleem	79
3.2 Regulariteit vir die hoër orde Neumann- probleem	81
3.3 Opmerking	83
4. GEVOLGTREKKING	84
LITERATUURLYS	85

OPSOMMING

REGULARITEITSTELLINGS VIR ELLIPTIESE RANDWAARDEPROBLEME

DEUR

L. PRETORIUS

LEIER: PROF. F.D. PENNING

Departement Wiskunde
UNIVERSITEIT VAN PRETORIA

Voorgelê ter vervulling van 'n deel van die
vereistes vir die graad M.Sc. (Wiskunde)

In dié verhandeling sal op 'n funksionaalanalitiese wyse die regulariteit (differensieerbaarheid) van swak oplossings van 'n sekere klas van elliptiese randwaardeprobleme bewys word. Die bewyse word progressief gedoen: eers word regulariteit in die raaklynige rigting op die rand bewys; dan word regulariteitstellings vir 'n sekere klas van tweede orde elliptiese randwaardeprobleme gedoen en ten slotte word regulariteit in die normaalrigting op die rand behandel.

Stellings word ook deurentyd toegelig met tweede sowel as hoër orde Dirichlet- en Neumann-randwaardeprobleme.

Ten slotte dien dit ook vermeld te word dat spesifieke Sobolev-ruimtes 'n belangrike rol in die bewyspatrone van die verhandeling speel.

SUMMARY

REGULARITY THEOREMS FOR ELLIPTIC

BOUNDARY VALUE PROBLEMS

BY

L. PRETORIUS

PROMOTOR: PROF. F.D. PENNING

Department of Mathematics
UNIVERSITY OF PRETORIA

Submitted in partial fulfilment of the
requirements for the degree of
MSc(MATHEMATICS)

In this thesis the regularity (differentiability) of weak solutions of a certain class of elliptic boundary value problems will be shown. For the proof of regularity theorems one will resort mainly to the techniques of functional analysis.

Regularity theorems will be proved progressively: firstly regularity in the tangential direction on the boundary will be shown; then regularity of a certain class of second order

elliptic boundary value problems will be demonstrated and lastly regularity in the normal direction on the boundary will be accounted for.

Theorems will also be illustrated for second as well as higher order Dirichlet and Neumann boundary value problems.

One should also mention that specific abstract Sobolev spaces play an important role in the proofs of most theorems.

HOOFSTUK 1

PROBLEEMSTELLING EN ALGEMENE HULPRESULTATE

1. INLEIDING

In dié verhandeling word die regulariteit (differensieerbaarheid) van swak oplossings van algemene elliptiese randwaardeprobleme ondersoek.

In teëstelling met die metode van differensiaalkwosiënte om regulariteit van oplossings van elliptiese randwaardeprobleme te ondersoek (vergelyk bv. Lions, Magenes [2] hoofstuk 3), word in dié verhandeling hoofsaaklik van die beginsels van Funksionaalanalise gebruik gemaak om vir 'n spesifieke probleem, dieselfde resultaat te bewys.

In dié verhandeling word die artikel van Renate Schappel [4] dan as basis gebruik om die hoofresultate vir regulariteit van die spesifieke elliptiese randwaardeprobleem te bewys.

Hierdie eerste hoofstuk sal dan in hoofsaak gewy word aan:

die probleemstelling

die definisie van ruimtes en begrippe

die vermelding van voorstellings

die vermelding en bewys van sekere hulpresultate.

2. PROBLEEMSTELLING

Gegee elemente $f \in L^2(\Omega)$, $g \in W^m(\Omega)$ $g_k \in L^2(\partial\Omega)$, $k = 1, \dots, m$,
 is dit nou die doel om die regulariteit van 'n oplossing
 $u \in V$ van die volgende funksionaalvergelyking

$$b(v, u) + s(v, u) = (v, f) - b(v, g) - s(v, g) + \sum_{k=1}^m \langle T_k v, g_k \rangle, \quad v \in V \quad (1)$$

aan te toon.

Die ruimtes V en die funksionale b en s sal verderaan in die
 verhandeling gedefinieer word.

$(,)$ stel die L^2 -inproduk op die ruimte Ω en, \langle , \rangle die
 L^2 -inproduk op $\partial\Omega$ voor.

T_k stel voor differensiaaloperatore op $\partial\Omega$.

In die verhandeling sal die aanname gemaak word dat $\Omega = R_+^n$,
 'n halfruimte in R^n . Die rand van Ω moet sodanig glad wees
 dat Ω d.m.v. partisië van identiteite afgebeeld kan word
 op R_+^n .

Dit sal ook aangetoon word hoedat 'n mens vanuit vergelyking
 (1) die regulariteit van swak oplossings van tipiese elliptiese
 partiële differensiaalvergelykings kan bewys.

3. FUNKSIERUIMTES

In dié paragraaf word dit aanvaar dat die leser vertrouwd is met die algemene begrippe en teorie van Funksionaalanalise.

3.1 Die n-dimensionale ruimtes R^n en R_+^n

Laat R^n gedefinieer wees deur

$$R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \text{ reël, } i=1, \dots, n\}$$

Die punt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ word ook geskryf as

$$x = (x', x_n)$$

waar $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in R^{n-1}$.

Laat verder dan die ruimte R_+^n gedefinieer wees deur:

$$R_+^n = \{x = (x', x_n) \in R^n \mid x_n > 0\}$$

As verder nou $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, α_i nie-negatief, heel, 'n multi-indeks is, dan word die notasie ∂^α gebruik vir die differensiaaloperator

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{of kortweg } \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} = \partial^{\alpha'} \partial_n^{\alpha_n}$$

waar $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$.

Die ordê van die differensiaaloperator word aangedui met:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

3.2 Die Fourier-transformasie

As f 'n sneldalende funksie in \mathbb{R}^n is dan word die Fourier-transformasie \hat{f} van f gedefinieer deur:

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} f(y) dy.$$

Die notasie $\mathcal{F}f$ word ook soms gebruik vir die Fourier-transformasie.

Die definisie van die Fourier-transformasie kan ook uitgebrei word na funksies in $L^2(\mathbb{R}^n)$ en na stemmige distribusies in \mathbb{R}^n . Vir volle besonderhede verwys na Rudin [3] hoofstuk 7.

As f nou 'n sneldalende funksie in \mathbb{R}_+^n is, word die gedeeltelike Fourier-transformasie \hat{f} van f in \mathbb{R}^{n-1} gedefinieer deur:

$$\hat{f}(x', x_n) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-iy' \cdot x'} f(y', x_n) dy'$$

Hierdie definisie kan ook uitgebrei word na funksies in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$.

3.3 Die ruimte $W^m(\mathbb{R}^n)$, $m=0,1,2,\dots$

Die Sobolev-ruimte $W^m(\mathbb{R}^n)$ word gedefinieer as die versameling van alle funksies in $L^2(\mathbb{R}^n)$ waarvan die distribusieafgeleides tot en met die m 'de orde in $L^2(\mathbb{R}^n)$ is en met inproduk:

$$[u, v]_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} dx$$

en geassosieerde norm:

$$|u|_m^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx$$

Dit is bekend dat hierdie norm ekwivalent is aan die norm $\|\cdot\|_m$ wat gedefinieer word deur:

$$\|u\|_m^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^m |Fu(x)|^2 dx$$

Die inproduk word gedefinieer deur

$$(u, v)_m = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^m Fu(x) \overline{Fv(x)} dx,$$

$$u, v \in W^m(\mathbb{R}^n)$$

3.4 Die ruimte $W^S(\mathbb{R}^n)$, s reëel

Die Sobolev-ruimte $W^S(\mathbb{R}^n)$ word gedefinieer as die versame-
 ling van alle stemmige distribusies u waarvan die Fourier-
 transformasie Fu 'n funksie is en waarvoor geld dat

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\mathbf{x}|^2)^S |Fu(\mathbf{x})|^2 dx < \infty$$

Die inproduk en geassosieerde norm op $W^S(\mathbb{R}^n)$ word dan ge-
 definieer deur:

$$(u, v)_S = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\mathbf{x}|^2)^S Fu(\mathbf{x}) \overline{Fv(\mathbf{x})} dx.$$

$$\|u\|_S^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\mathbf{x}|^2)^S |Fu(\mathbf{x})|^2 dx.$$

3.5 Die ruimte $W^m(\mathbb{R}_+^n)$, $m=0,1,2,\dots$

Die Sobolev-ruimte $W^m(\mathbb{R}_+^n)$ word gedefinieer as die versame-
 ling van alle funksies in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ waarvan distribusie-afge-
 leides tot en met die m -de orde in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ is en met in-
 produk:

$$[u, v]_m = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha'| \leq m-k} \int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_n^{\alpha'} \partial_n^k u(x', x_n) \overline{\partial_n^{\alpha'} \partial_n^k v(x', x_n)} dx' dx_n$$

en geassosieerde norm:

$$|u|_m^2 = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha'| \leq m-k} \int_{R_+^n} |\partial^{\alpha'} \partial_n^k u(x', x_n)|^2 dx' dx_n.$$

$W^m(R_+^n)$ kan ook gedefinieer word as die versameling van alle funksies $u \in L^2(R_+^n)$ waarvan die distribusie-afgeleides $\partial_n^r u$, $r=0,1,\dots,m$ in $L^2(R_+^n)$ is en waarvoor geld dat:

$$\sum_{k=0}^m \int_{R_+^n} (1+|y'|^2)^{m-k} |F \partial_n^k u(y', x_n)|^2 dy' dx_n < \infty$$

waar Fu die gedeeltelike Fourier-transformasie in R^{n-1} is.

Die inproduk $(\cdot, \cdot)_m$ en geassosieerde norm $\|\cdot\|_m$ op $W^m(R_+^n)$ word dan gedefinieer deur:

$$(u, v)_m = \sum_{k=0}^m \int_{R_+^n} (1+|y'|^2)^{m-k} F \partial_n^k u(y', x_n) \overline{F \partial_n^k v(y', x_n)} dy' dx_n$$

en

$$\|u\|_m^2 = \sum_{k=0}^m \int_{R_+^n} (1+|y'|^2)^{m-k} |F \partial_n^k u(y', x_n)|^2 dy' dx_n$$

3.5.1 Lemma

Die norms $|u|_m$ en $\|u\|_m$ is ekwivalent op $W^m(R_+^n)$, $m=0,1,2,\dots$.

Bewys:

Aangesien die gedeeltelike Fourier-transformasie 'n L^2 -isometrie van $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ op $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ is, is

$$\| \partial^{\alpha'} u \|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \| F \partial^{\alpha'} u(y', x_n) \|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \| (y')^{\alpha'} F u(y', x_n) \|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Dus is vir $u \in W^m(\mathbb{R}_+^n)$, $m=0, 1, 2, \dots$

$$|u|_m^2 = \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} \sum_{|\alpha'| \leq m-k} (y')^{2\alpha'} |\partial_n^k F u(y', x_n)|^2 dy' dx_n.$$

Verder bestaan daar konstantes $C_1, C_2 > 0$

só dat

$$(1+|y'|^2)^{m-k} \leq C_1 \sum_{|\alpha'| \leq m-k} (y')^{2\alpha'} \leq C_2 (1+|y'|^2)^{m-k}, \quad 0 \leq k \leq m$$

D.w.s.

$$\begin{aligned} (1+|y'|^2)^{m-k} |F \partial_n^k u(y', x_n)|^2 & \\ & \leq C_1 \sum_{|\alpha'| \leq m-k} (y')^{2\alpha'} |F \partial_n^k u(y', x_n)|^2 \\ & \leq C_2 (1+|y'|^2)^{m-k} |F \partial_n^k u(y', x_n)|^2, \quad 0 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Gevolgluk is

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m \int_{R_+^n} (1+|y'|^2)^{m-k} |F\partial_n^k u(y', x_n)|^2 dy' dx_n \\
 \leq C_1 \int_{R_+^n} \sum_{k=0} \sum_{|\alpha'| \leq m-k} (y')^{2\alpha'} |F\partial_n^k u(y', x_n)|^2 dy' dx_n \\
 \leq C_2 \sum_{k=0}^m \int_{R_+^n} (1+|y'|^2)^{m-k} |F\partial_n^k u(y', x_n)|^2 dy' dx_n
 \end{aligned}$$

Oftewel:

$$\|u\|_m^2 \leq C_1 |u|_m^2 \leq C_2 \|u\|_m^2, \text{ uit definisies}$$

$|U|_m$ en $\|u\|_m$ is dus ekwivalente norms op $W^m(R_+^n)$, $m=0,1,2,\dots$.

3.6 Die Ruimtes $H^{m,s}(R_+^n)$, $m=0,1,2,\dots$, $s=0,1,2,\dots$

Dié Sobolev-ruimte $H^{m,s}(R_+^n)$ word gedefinieer as die versameling van alle funksies $u \in L^2(R_+^n)$ waarvan die distribusie-afgeleides

$\partial^\alpha u = \partial^{\alpha'} \partial_n^{\alpha_n} u$ aan $L^2(R_+^n)$ behoort vir alle multi-indekse $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ met $|\alpha| \leq m+s$ en $\alpha_n \leq m$.

Die inproduk $[\cdot, \cdot]_{m,s}$ en geassosieerde norm $|\cdot|_{m,s}$ op $H^{m,s}(R_+^n)$ word gedefinieer deur:

$$[u, v]_{m, s} = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha'| \leq m+s-k} \int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_n^{\alpha'} \partial_n^k u(x', x_n) \overline{\partial_n^{\alpha'} \partial_n^k v(x', x_n)} dx' dx_n$$

en

$$|u|_{m, s}^2 = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha'| \leq m+s-k} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\partial_n^{\alpha'} \partial_n^k u(x', x_n)|^2 dx' dx_n.$$

Opmerking: As $s=0$ is die ruimtes $H^{m,0}(\mathbb{R}_+^n)$ en $W^m(\mathbb{R}_+^n)$ dieselfde.

$H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$ kan ook gedefinieer word as die versameling van alle funksies $u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ waarvan die distribusie-afgeleides $\partial_n^r u$ vir $r=0, 1, \dots, m$ in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ is en waarvoor geld dat

$$\sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+s-k} |\partial_n^k F u(y', x_n)|^2 dy' dx_n < \infty.$$

Die inproduk $(\cdot, \cdot)_{m, s}$ en geassosieerde norm $\|\cdot\|_{m, s}$ op $H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$ word dan gedefinieer deur:

$$(u, v)_{m, s} = \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+s-k} \partial_n^k F u(y', x_n) \overline{\partial_n^k F v(y', x_n)} dy' dx_n$$

en

$$\|u\|_{m, s}^2 = \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+s-k} |\partial_n^k F u(y', x_n)|^2 dy' dx_n.$$

3.6.1 Lemma

Die norms $|u|_{m,s}$ en $\|u\|_{m,s}$ is ekwivalent op $H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$, $m,s \geq 0$, m,s heel.

Bewys:

Die bewys verloop identies soos in paragraaf 3.5.1 behalwe dat 'm-k' oral vervang word met 'm+s-k', $0 \leq k \leq m$.

3.7 Die Ruimte $H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$, $m=0,1,2,\dots$, s reël

Dié Sobolev-ruimte $H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$ word gedefinieer as die versameling van alle funksies $u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ waarvan die distribusie-afgeleides $\partial_n^r u$ vir $r=0,1,\dots,m$ in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ is en waarvoor geld dat:

$$\sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+s-k} |\partial_n^k F u(y', x_n)|^2 dy' dx_n < \infty.$$

Die inproduk $(\cdot, \cdot)_{m,s}$ en geassosieerde norm $\|\cdot\|_{m,s}$ word soos in paragraaf 3.6 gedefinieer.

Opmerkings

- (i) In die verhandeling sal hoofsaaklik gebruikgemaak word van die norm $\|\cdot\|_{m,s}$ op $H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$ $m \geq 0$, heel, s reël.

- (ii) Vir $m=0$, $s \geq 0$, s heel is $H^{0,s}(\mathbb{R}_+^n)$ die versameling van funksies u in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ waarvoor distribusie-afgeleides, $\partial^\alpha u$, in die raaklyne rigting tot en met die s -de orde L^2 -integreerbaar op \mathbb{R}_+^n is.
- (iii) Indien $u \in H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$, $m, s \geq 0$, m, s heel beteken dit dat u distribusie-afgeleides van totale orde hoogstens $m+s$ en distribusie-afgeleides van hoogstens orde m in die rigting x_n (of normaalrigting) in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ besit.

3.8 Sobolev se lemma

Laat $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ die afsluiting van \mathbb{R}_+^n wees d.w.s.

$$\overline{\mathbb{R}_+^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

Die ruimte $C^m(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, $m=0,1,2,\dots$ word gedefinieer as die versameling van alle funksies u wat kontinue, begrensde afgeleides tot en met die m 'de orde op $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ besit met

$$\|u\|_{C^m} = \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}_+^n}, |\alpha| \leq m} \{|\partial^\alpha u(x)| \mid |\alpha| \leq m, x \in \overline{\mathbb{R}_+^n}\}$$

$$< \infty$$

Laat k en m nie-negatiewe heelgetalle wees met

$$k > m + \frac{n}{2}$$

Dan is

$$W^k(\mathbb{R}_+^n) \subset C^m(\overline{\mathbb{R}_+^n})$$

met kontinue inbedding.

Dié stelling word nie hier bewys nie. Kyk [2] hoofstuk 1 stelling 9.8

Die funksies in $W^k(\mathbb{R}_+^n)$ besit dus afgeleides in die gewone sin tot en met die m -de orde en dié afgeleides is kontinu tot op die rand van die gebied.

3.9 Randruimtes

Aangesien die rand $\partial\mathbb{R}_+^n$, van \mathbb{R}_+^n gegee word deur $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ kan dit geïdentifiseer word met \mathbb{R}^{n-1} . Gevolglik kan funksie-ruimtes soortgelyk aan dié in paragrawe 3.3 en 3.4 op $\partial\mathbb{R}_+^n$ gedefinieer word.

Die L^2 -inproduk en geassosieerde norm in \mathbb{R}^{n-1} word aangedui deur:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x') \overline{v(x')} dx' \text{ en,}$$

$$\langle u \rangle^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x')|^2 dx'$$

Die inproduk en geassosieerde norm in die Sobolev-ruimte $W^s(\mathbb{R}^{n-1})$, s reëel word aangedui deur

$$\langle u, v \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |x'|^2)^s \operatorname{Re} \{ \overline{Fv(x')} Fu(x') \} dx'$$

en

$$\langle u \rangle_s^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |x'|^2)^s |Fu(x')|^2 dx'.$$

3.10 'n Algemene Spoorstelling vir $H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$ $m=0,1,2,\dots$, s reëel

Laat $u \in H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$. Die funksie u kan beskou word as 'n funksie van die één veranderlike x_n met waardes in 'n Sobolev-ruimte op \mathbb{R}^{n-1} .

Op hierdie wyse kan die ruimte $H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$ gekarakteriseer word as die versameling van alle funksies

$$u \in L^2(\mathbb{R}_{x_n,+}; W^{m+s}(\mathbb{R}^{n-1})) \text{ waarvoor vir } j = 0, \dots, m$$

geld dat

$$\partial_n^j u \in L^2(\mathbb{R}_{x_n,+}; W^{m+s-j}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

Nou geld vir $j=0, \dots, m-1$ dat

$$H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n) \subset C^j(\mathbb{R}_{x_n,+}; W^{m+s-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

met kontinue inbedding.

Dit beteken dat vir elke $u \in H^{m,s}(R_+^n)$ geld dat

$$\langle \partial_n^j u(x', 0) \rangle_{m+s-j-\frac{1}{2}} \leq C \|u\|_{m,s}, j=0, \dots, m-1$$

Dié stelling word nie hier bewys nie.

Spoorstellings word in groot detail behandel in hoofstuk 1
 Lions, Magenes [2].

Daar sal in die verhandeling dikwels van die spesiale geval
 $m=1, j=0$ gebruik gemaak word:

Dan is:

$$\begin{aligned} & \langle u(x', 0) \rangle_{1+s-\frac{1}{2}} \\ &= \langle u(x', 0) \rangle_{s+\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|u\|_{1,s}, u \in H^{1,s}(R_+^n) \end{aligned}$$

3.11 Faktor-integrasie

Laat $C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ die versameling van alle oneindig differensieerbare funksies met kompakte draer in $\overline{R_+^n}$ wees.

As $u, v \in C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ dan geld die volgende formules vir faktor-integrasie:

Vir $j=1,2,\dots,n-1$ geld dat:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_j u(x) v(x) dx = - \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x) \partial_j v(x) dx.$$

Vir $j=n$ kom egter randterme ter sprake:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_n u(x) v(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \partial_n u(x', x_n) v(x', x_n) dx_n dx' \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x', 0) v(x', 0) dx' - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty u(x', x_n) \partial_n v(x', x_n) dx_n dx' \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x', 0) v(x', 0) dx' - \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x', x_n) \partial_n v(x', x_n) dx. \end{aligned}$$

Aangesien $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ dig is in die Sobolev-ruimte $H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$, geld hierdie formules dan ook vir funksies in $H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$.

3.12 Randoperatore in die Hulpruimte V

Laat die randoperatore R_k , $k=1,\dots,p$ op $\partial\mathbb{R}_+^n$ gedefinieer wees deur:

$$R_k = \partial_n^k, \quad k=1,\dots,p$$

Laat verder die ruimte $W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ gedefinieer wees deur:

$$W^\infty(\mathbb{R}_+^n) = \bigcap_{m=1}^{\infty} W^m(\mathbb{R}_+^n)$$

Gevolg: Uit Sobolev se inbeddingstelling soos in 'n vorige paragraaf vermeld, volg nou dat

$$W^\infty(\mathbb{R}_+^n) \subset C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$$

$C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ moet nie verwar word met

$C^{\infty,2}(\mathbb{R}_+^n)$, die ruimte van oneindige differensieerbare funksies waarvan gewone afgeleides van alle ordes in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ is nie.

'n Funksie $u \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ besit dus in die gewone sin kwadratiese integreerbare afgeleides van alle ordes tot op die rand van \mathbb{R}_+^n .

Aangesien die randwaardes van $u \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ goed gedefinieer is, is dit sinvol om die hulruimte V soos volg te definieer:

$$V = \{v \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n) \mid R_k v(x) = 0, x \in \partial \mathbb{R}_+^n, k=1, \dots, p\}$$

Gevolg

- (i) As $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ die versameling van oneindig-differensieerbare funksies met kompakte draer in \mathbb{R}_+^n is, dan volg onmiddellik dat $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n) \subset V$.
- (ii) Die versameling V het ook die eienskap dat indien $v \in V$ dan is $\partial_j v \in V$ vir $j=1, \dots, n-1$. Dit volg uit die gelykheid van die gemengde afgeleides $\partial_j \partial_n^k v$ en $\partial_n^k \partial_j v$ op $\partial \mathbb{R}_+^n$.

4. DIE OPERATOR K

Laat die operator K gedefinieer wees deur:

$$K = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2$$

Opmerking

Die operator K word baie effektief aangewend vir die bewys van randregulariteit in die raaklynige rigting, van swak oplossings van elliptiese randwaardeprobleme.

4.1 Stelling

Laat V die deelruimte van $W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ wees soos voorheen gedefinieer. Dan is die operator K 'n isomorfisme van V op V .

Bewys

Uit die laaste gevolg in paragraaf 3.12 volg dat K vir V afbeeld in V .

K is 'n injeksie want neem u_1 en $u_2 \in V$ met $Ku_1 = Ku_2$.

Die volgende is egter ook waar:

$$\begin{aligned}
 (Ku, u) &= (u, u) - \sum_{j=1}^{n-1} (\partial_j^2 u, u), \quad u \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n) \\
 &= (u, u) + \sum_{j=1}^{n-1} (\partial_j u, \partial_j u), \quad \text{faktorintegrasie} \\
 &\geq \|u\|^2
 \end{aligned}$$

met $(,)$ en $\| \cdot \|$ respektiewelik die inproduk en norm op $L^2(\mathbb{R}_+^n)$.

Hieruit volg nou dat:

$$(Ku_1 - Ku_2, u_1 - u_2) \geq \|u_1 - u_2\|^2$$

D.w.s. $\|u_1 - u_2\| \leq 0$, $Ku_1 = Ku_2$.

Sodat $u_1 = u_2$ b.o.

K is dus 'n injeksie.

K is ook 'n surjeksie want vir $v \in V$ is:

$$\begin{aligned}
 FKv(y', x_n) &= Fv(y', x_n) - F \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2 v(y', x_n) \\
 &= Fv(y', x_n) - \sum_{j=1}^{n-1} i^2 |y_j|^2 Fv(y', x_n), \quad i^2 = -1 \\
 &= (1 + |y'|^2) Fv(y', x_n), \quad |y'|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} |y_j|^2
 \end{aligned}$$

met $Fv(y', x_n)$ die gedeeltelike Fourier-transformasie in \mathbb{R}^{n-1} .

Uit bogemelde volg nou dat

$$\begin{aligned}
 v(x', x_n) &= F^{-1} \left(\frac{1}{1 + |y'|^2} FKv(y', x_n) \right) \in V \\
 &= F^{-1} \left(\frac{Fu}{1 + |y'|^2} \right), \quad Kv = u \in V.
 \end{aligned}$$

Vir enige $u \in V$ bestaan daar dus 'n $v \in V$ sô dat $Kv = u$ met

$$v = F^{-1} \left[\frac{1}{1 + |y'|^2} Fu \right]$$

K is dus 'n surjeksie van V .

K is dus 'n surjeksie en 'n injeksie oftewel 'n bijeksie van V op V .

Opmerking

Negatiewe magte van die operator K kan gedefinieer word deur

$$K^{-1}u(x', x_n) = F^{-1} \left[\frac{1}{1+|y'|^2} Fu(y', x_n) \right], \quad u \in V.$$

4.2 Lemma

As $u, v \in H^{m, 2s}(\mathbb{R}_+^n)$ dan is

$$(K^s u, v)_m = (u, v)_{m, s}$$

Bewys

$$\begin{aligned} (K^s u, v)_m &= \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m-k} (\partial_n^k (K^s u(y', x_n))) \overline{\partial_n^{k\hat{}} v(y', x_n)} dy' dx_n \\ &= \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m-k} (\partial_n^k (1 - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2) s u(y', x_n)) \overline{\partial_n^{k\hat{}} v(y', x_n)} dy' dx_n \\ &= \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+s-k} \partial_n^{k\hat{}} u(y', x_n) \overline{\partial_n^{k\hat{}} v(y', x_n)} dy' dx_n \\ &= (u, v)_{m, s} \quad \text{per definisie} \end{aligned}$$

Gevolg

$$\|v\|_{m, -s} = \|K^{-s} v\|_{m, s}, \quad m, s \geq 0, \text{ heel}$$

want

$$\|v\|_{m,-s}^2 = (K^{-s}v, v)_m = (v, K^{-s}v)_m \quad \text{faktorintegrasie}$$

$$\text{en} \quad \|K^{-s}v\|_{m,s}^2 = (v, K^{-s}v)_m$$

$$\text{D.w.s.} \quad \|v\|_{m,-s} = \|K^{-s}v\|_{m,s}$$

4.3 Lemma

Vir $u, v \in H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$ geld dat

$$|(u, v)_m| \leq \|u\|_{m,s} \|v\|_{m,-s}.$$

Bewys

$$|(u, v)_m| = \left| \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{\frac{m+s-k}{2}} \partial_n^{k\hat{}} u(y', x_n) \overline{(1+|y'|^2)^{\frac{m-s-k}{2}} \partial_n^{k\hat{}} v(y', x_n) dy' dx_n} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^m \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+s-k} |\partial_n^{k\hat{}} u(y', x_n)|^2 dy' dx_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m-s-k} |\partial_n^{k\hat{}} v(y', x_n)|^2 dy' dx_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|u\|_{m,s} \|v\|_{m,-s}, \quad u, v \in H^{m,s}(\mathbb{R}_+^n)$$

Die voorlaaste stap volg uit Schwarz se ongelijkheid.

4.4 Lemma

$$\|v\|_{m,-t} \geq \|v\|_{m-t} \text{ vir alle } v \in V, 0 \leq t \leq m$$

t, m heelgetalle.

Bewys:

$$\|v\|_{m,-t}^2 = \sum_{k=0}^m \int_{R_+^n} (1+|Y'|^2)^{m-t-k} |\hat{\partial}_n^k u(Y', x_n)|^2 dy' dx_n$$

$$\geq \sum_{k=0}^{m-t} \int_{R_+^n} (1+|Y'|^2)^{m-t-k} |\hat{\partial}_n^k u(Y', x_n)|^2 dy' dx_n$$

want $m-t \geq 0$. heel.

$$= \|v\|_{m-t}^2, \text{ per definisie.}$$

4.5 Lemma

Die inverse operator K^{-1} is kontinuu in V m.b.t. die norm

$$\|\cdot\|_m.$$

Bewys:

$$\|K^{-1}v\|_m^2 = \sum_{k=0}^m \int_{R_+^n} (1+|Y'|^2)^{m-k} |\hat{\partial}_n^k ((1 - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2)^{-1} v(Y', x_n))|^2 dy' dx_n$$

$$= \sum_{k=0}^m \int_{R_+^n} (1+|Y'|^2)^{m-k-1} |\hat{\partial}_n^k v(Y', x_n)|^2 dy' dx_n$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m-k} |\partial_n^k \hat{v}(y', x_n)|^2 dy' dx_n \\ &= \|v\|_m^2 \end{aligned}$$

Die lineêre operator K^{-1} is dus per definisie begrens en dus ook kontínu op V .

Gevolg

$$(i) \quad |(u, v)_{m, -s}| \quad u, v \in V$$

$$= |(K^{-s}u, v)_m|$$

$$\leq \|K^{-s}u\|_m \|v\|_m, \quad \text{Schwarz}$$

$$\leq \|u\|_m \|v\|_m, \quad \text{lemma 4.5.}$$

$$(ii) \quad \|v\|_{m, -s} \leq \|v\|_m \quad v \in V.$$

$$(iii) \quad \|v\|_{m, -s} \leq \|v\|_m, v \in V^m \text{ die afsluiting van } V \text{ in } W^m(\mathbb{R}_+^n)$$

deur kontinue normuitbreiding vanaf $V \subset V^m$, want neem enige $v \in V^m$. Dan bestaan daar 'n ry (v_n) in V met

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_m = 0$$

$$\text{Dan is } \|v\|_{m, -s}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{m, -s}$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_m \\ &= \|v\|_m \end{aligned}$$

4.6 Lemma

$$\begin{aligned} \|v\|_{m,-s} &\geq \|v\|_{0,m-s} \quad m,s \geq 0, m,s \text{ heel} \\ &v \in V. \end{aligned}$$

Bewys:

$$\begin{aligned} \|v\|_{m,-s}^2 &= \sum_{k=0}^m \int_{R_+^n} (1+|y'|^2)^{m-s-k} |\hat{\partial}_n^k v(y', x_n)|^2 dy' dx_n \\ &\geq \int_{R_+^n} (1+|y'|^2)^{m-s} |\hat{v}(y', x_n)|^2 dy' dx_n \\ &= \|v\|_{0,m-s}^2 \quad \text{per definisie} \end{aligned}$$

HOOFSTUK 2

RANDREGULARITEIT IN DIE RAAKLYNIGE RIGTING

1. INLEIDING

In hierdie hoofstuk sal die differensieerbaarheid van swak oplossings van V -koërsiewe randwaardeprobleme, in die raaklynige rigting ondersoek word.

Vir dié doel word die deelruimte V van $W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ soos gedefinieer in paragraaf 3.12 hoofstuk 1 gebruik.

Vir 'n gegewe heelgetal $m > 0$ sal aangeneem word dat die orde k van die operator $R_k = \partial_n^k$, streng kleiner as m is.

Die operator R_k kan nou op element $u \in W^m(\mathbb{R}_+^n)$ inwerk sodat

$$R_k u = \gamma(\partial_n^k u)$$

waar $\gamma(v) \in L^2(\partial\mathbb{R}_+^n)$ die spoor van die element $v \in W^1(\mathbb{R}_+^n)$ is.

2. HULPRESULTATE EN DEFINISIES

2.1 Lemma

$$R_k u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ vir } u \in W^m(\mathbb{R}_+^n) \text{ en } k = 1, 2, \dots, p.$$

Bewys

$r_k < m$ d.w.s. $r_k = m-1$, hoogstens.

$R_k u$ voldoen dus aan die vereistes van stelling 3.10 hoofstuk 1.

$R_k u$ is 'n kombinasie van spore van u van orde hoogstens $m-1$, en behoort dus aan $W^{m-(m-1)-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) = W^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$

D.w.s. $R_k u \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$

Opmerking

Laat die spoor $\gamma(u)$ vervolgens ook aangedui word deur u .

2.2 Die ruimte V^m

Laat die ruimte V^m gedefinieer wees as die afsluiting van V in $W^m(\mathbb{R}_+^n)$ m.b.t. die norm $\|\cdot\|_m$.

2.3 Bilineêre funksionale

Laat die volgende twee bilineêre funksionale op $W^m(\mathbb{R}_+^n) \times W^m(\mathbb{R}_+^n)$ soos volg gedefinieer wees:

$$b(u, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\partial^\alpha u, b_{\alpha\beta} \partial^\beta v)$$

$$\text{en } s(u, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha u, s_{\alpha\beta} \partial^\beta u \rangle$$

met $b_{\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ en $s_{\alpha\beta} \in C^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)$ en afgeleides van alle ordes van $b_{\alpha\beta}$ en $s_{\alpha\beta}$ is begrens in \mathbb{R}_+^n en $\partial\mathbb{R}_+^n$ respektiewelik.

Nota Met bilineêre funksionale word bedoel funksionale wat lineêr in die eerste argument en toegevoeg lineêr in die tweede argument is.

2.3.1 Lemma

Vir elke $\varepsilon > 0$, en funksie u met kontinue eerste afgeleide en $u \in L^2[0, \infty)$ geld dat

$$|u(0)|^2 \leq \frac{2}{3} \varepsilon \int_0^\infty |u'(t)|^2 dt + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty |u(t)|^2 dt$$

Bewys

Neem enige $\beta > 0$, dan volg deur faktorintegrasië dat:

$$\begin{aligned} & \int_0^\beta u(t) dt + \int_0^\beta (t-\beta) u'(t) dt \\ &= \int_0^\beta u(t) dt + \int_0^\beta t u'(t) dt - \int_0^\beta \beta u'(t) dt \\ &= \int_0^\beta u(t) dt + t u(t) \Big|_0^\beta - \int_0^\beta u(t) dt - \beta u(t) \Big|_0^\beta \\ &= \beta u(\beta) - \beta u(\beta) + \beta u(0) \\ &= \beta u(0) \end{aligned}$$

Nou volg uit Schwarz se ongelijkheid dat:

$$\begin{aligned}
 |\beta u(0)| &\leq \int_0^\beta |u(t)| dt + \int_0^\beta (t-\beta) |u'(t)| dt \\
 &\leq \left(\int_0^\beta 1 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\beta |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\int_0^\beta (t-\beta)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\beta |u'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{\beta} \left(\int_0^\beta |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\beta |u'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sqrt{\beta} \left(\int_0^\infty |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty |u'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Uit die ongelijkheid

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2), \quad a, b \geq 0$$

volg dan dat

$$|\beta u(0)|^2 \leq 2\beta \int_0^\infty |u(t)|^2 dt + \frac{2}{3}\beta^3 \int_0^\infty |u'(t)|^2 dt$$

Dus is

$$|u(0)|^2 \leq \frac{2}{\beta} \int_0^\infty |u(t)|^2 dt + \frac{2}{3}\beta \int_0^\infty |u'(t)|^2 dt$$

Oftewel vir enige $\epsilon > 0$ gegee, is:

$$|u(0)|^2 \leq \frac{2}{\epsilon} \int_0^\infty |u(t)|^2 dt + \frac{2}{3}\epsilon \int_0^\infty |u'(t)|^2 dt.$$

2.3.2 Lemma

Vir enige $\varepsilon > 0$ gegee kan die bilineêre funksionaal s deur die volgende ongelykheid afgeskat word.

$$|s(v)| \leq \varepsilon \|v\|_m^2 + \chi(\varepsilon) \|v\|_{m-1}^2, \quad v \in V, \text{ waar } \chi(\varepsilon) > 0$$

Bewys:

Beskou 'n algemene term van $s(v)$:

$$\langle \partial^\alpha v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta v \rangle, \quad |\alpha| \leq m-1, \quad |\beta| \leq m-1.$$

Uit Schwarz se ongelykheid volg dat:

$$\begin{aligned} & |\langle \partial^\alpha v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta v \rangle| \\ & \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial^\alpha v(x', 0)|^2 dx' \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial^\beta v(x', 0)|^2 dx' \right)^{\frac{1}{2}}, \quad C > 0, \quad (2) \end{aligned}$$

Uit Lemma 2.3.1 hoofstuk 2 volg nou dat

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial^\alpha v(x', 0)|^2 dx' \\ & \leq \frac{2}{3}\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty |\partial_n \partial^\alpha v(x', x_n)|^2 dx_n dx' \\ & + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty |\partial^\alpha v(x', x_n)|^2 dx_n dx' \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{3}\varepsilon \|v\|_m^2 + \frac{2}{\varepsilon} \|v\|_{m-1}^2, \quad |\alpha| \leq m-1 \text{ en definisie van } \|\cdot\|_m$$

n Soortgelyke ongelykheid geld vir

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial^\beta v(x', 0)|^2 dx'$$

Só dat die volgende algemene afskatting uit (2) verkry word, vir $\varepsilon > 0$ gegee:

$$|s(v)| \leq \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} |\langle \partial^\alpha v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta v \rangle|$$

$$\leq \varepsilon \|v\|_m^2 + \kappa(\varepsilon) \|v\|_{m-1}^2, \quad v \in V$$

2.4 Koërsiewe bilineêre funksionale

Die bilineêre funksionaal b is koërsief oor V as daar konstantes $\gamma > 0$ en $\lambda \geq 0$ bestaan sodat

$$\operatorname{Re} b(v) \geq \gamma \|v\|_m^2 - \lambda \|v\|_{m-1}^2, \quad v \in V.$$

2.5 Lemma

Laat die bilineêre funksionale b en s gedefinieer wees soos in 2.3 en laat b koërsief wees oor V .

Dan is die bilineêre funksionaal

$$a(v, w) = b(v, w) + s(v, w),$$

koërsief oor V en daar bestaan konstantes $\gamma_0 > 0$ en $\lambda_0 \geq 0$ sô dat

$$\operatorname{Re} a(v) \geq \gamma_0 \|v\|_m^2 - \lambda_0 \|v\|_{m-1}^2, \quad v \in V.$$

Bewys:

$$\operatorname{Re} a(v) = \operatorname{Re} b(v) + \operatorname{Re} s(v), \quad v \in V.$$

Uit 2.3.2. volg nou dat vir $\varepsilon > 0$ willekeurig, is

$$|\operatorname{Re} s(v)| \leq |s(v)| \leq \varepsilon \|v\|_m^2 + x(\varepsilon) \|v\|_{m-1}^2$$

d.w.s.

$$\operatorname{Re} s(v) \geq -\varepsilon \|v\|_m^2 - x(\varepsilon) \|v\|_{m-1}^2 \quad v \in V$$

en uit die feit dat b koërsief is volg die bestaan van

$$\gamma > 0, \quad \lambda \geq 0$$

sô dat

$$\operatorname{Re} a(v) \geq \gamma \|v\|_m^2 - \lambda \|v\|_{m-1}^2 - \varepsilon^* \|v\|_m^2 - x(\varepsilon^*) \|v\|_{m-1}^2$$

$$= (\gamma - \varepsilon^*) \|v\|_m^2 - (\lambda + x(\varepsilon^*)) \|v\|_{m-1}^2$$

$$= \gamma_0 \|v\|_m^2 - \lambda_0 \|v\|_{m-1}^2, \quad v \in V$$

met ε^* s6 gekies dat

$$\gamma_0 = \gamma - \varepsilon^* > 0.$$

Hieruit volg nou dat a koërsief oor V is.

2.6 Bilineêre funksionale van hoër orde

Laat die hoër orde bilineêre funksionaal soos volg op $H^{m,t}(\mathbb{R}_+^n)$ gedefinieer wees:

$$a_t(v, w) = b_t(v, w) + s_t(v, w), \quad v, w \in H^{m,t}(\mathbb{R}_+^n) \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{met } b_t(v, w) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\partial^\alpha v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta w)_{0,t}$$

$$\text{en } s_t(v, w) = \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta w \rangle_t$$

Opmerking

(i) Vir $t=0$ reduceer a_t na a_0 oftewel a , die koërsiewe bilineêre funksionaal oor V .

(ii) a_t is begrens op $H^{m,t}(\mathbb{R}_+^n)$ want o.a. is

$$|(\partial^\alpha v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta w)_{0,t}| \leq C \| \partial^\alpha v \|_{0,t} \| \partial^\beta w \|_{0,t}$$

$$\leq C \| v \|_{m,t} \| w \|_{m,t}, \quad |\alpha|, |\beta| \leq m \quad (\text{vervolg})$$

$$\langle \infty, v, w \rangle \in H^{m,t}(\mathbb{R}_+^n)$$

2.6.1 Lemma

Die volgende verwantskap geld vir $v \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ en $w \in H^{m,t}(\mathbb{R}_+^n)$

$$a_t(v, w) = a(K^t v, w), \quad t=0, 1, 2, \dots$$

Bewys:

In die bewys dui $\hat{v}(y', x_n)$ die gedeeltelike Fourier-transformasie in \mathbb{R}^{n-1} aan.

$$a_t(v, w) = b_t(v, w) + s_t(v, w), \quad v \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

$$w \in H^{m,t}(\mathbb{R}_+^n)$$

$$t = 0, 1, 2, \dots$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\partial^\alpha v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta w)_{0,t} + \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta w \rangle_t$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |y'|^2)^t (\partial^\alpha v)^\wedge (b_{\alpha\beta} \partial^\beta w)^\wedge dy' dx_n,$$

definisie van $(\cdot)_{0,t}$ en $\langle \cdot \rangle_t$

$$+ \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |y'|^2)^t (\partial^\alpha v(y', 0))^\wedge (s_{\alpha\beta} \partial^\beta w)^\wedge dy'$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\mathbb{R}_+^n} (\partial^\alpha (K^t v))^\wedge (b_{\alpha\beta} \partial^\beta w)^\wedge dy' dx_n \quad (\text{vervolg})$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\partial^\alpha K^t_v(y', 0)) \overline{(\partial^\beta w(y', 0))} dy' \\
 & \qquad \qquad \qquad v \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n) \\
 & = b(K^t_{v,w}) + s(K^t_{v,w}), \quad \text{definisie van } b \text{ en } s \\
 & = a(K^t_{v,w}), \quad \text{definisie van } a
 \end{aligned}$$

Die kruks van die bewys is die feit dat

$$(K^t v)^\wedge = \left((1 - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2) v \right)^\wedge = (1 + |y'|^2) \hat{v}, \text{ sien § 4.1 hoofstuk}$$

1.

2.6.2 Lemma

Die volgende verwantskap geld vir die bilineêre funksionaal,

a_{t+1}

$$a_{t+1}(v, w) = a_t(v, w) + \sum_{j=1}^{n-1} a_t(\partial_j v, \partial_j w) + a'_t(v, w) \text{ vir } t=0, 1, 2, \dots$$

met $a'_t(v, w)$ 'n bilineêre funksionaal wat vir enige $\varepsilon > 0$ gegee soos volg afgeskat kan word:

$$|a'_t(v)| \leq \varepsilon \|v\|_{m, t+1}^2 + C_t(\varepsilon) \|v\|_{m, t}^2 \quad v \in H^{m, t+1}(\mathbb{R}_+^n)$$

Bewys:

$$a_t(v, w) = a(K^t v, w) \quad , \quad \text{uit 2.6.1., vir } t=0, 1, 2, \dots$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\partial^\alpha K^t v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta w)$$

$$+ \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha K^t v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta w \rangle$$

Net so is:

$$a_{t+1}(v, w) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\partial^\alpha K K^t v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta w)$$

$$+ \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha K K^t v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta w \rangle$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\partial^\alpha (1 - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2) K^t v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta w)$$

$$+ \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha (1 - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2) K^t v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta w \rangle$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\partial^\alpha K^t v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta w) + \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha K^t v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta w \rangle$$

(vervolg)

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\partial^\alpha \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j \partial_j^K t v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta w) \\
 & - \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j \partial_j^K t v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta w \rangle \\
 = & a_t(v, w) + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \sum_{j=1}^{n-1} (\partial^\alpha K^t \partial_j v, \partial_j (b_{\alpha\beta} \partial^\beta w)) \\
 & + \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \partial^\alpha K^t \partial_j v, \partial_j (s_{\alpha\beta} \partial^\beta w) \rangle, \text{ faktorintegrasi} \\
 = & a_t(v, w) + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \sum_{j=1}^{n-1} (\partial^\alpha K^t \partial_j v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta \partial_j w) \\
 & + \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \partial^\alpha K^t \partial_j v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta \partial_j w \rangle \\
 & + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \sum_{j=1}^{n-1} (\partial^\alpha K^t \partial_j v, (\partial_j b_{\alpha\beta}) \partial^\beta w) \\
 & + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \partial^\alpha K^t \partial_j v, (\partial_j s_{\alpha\beta}) \partial^\beta w \rangle, \text{ produkreël} \\
 = & a_t(v, w) + \sum_{j=1}^{n-1} a_t(\partial_j v, \partial_j w) + a'_t(v, w) \\
 \text{met } a'_t(v, w) = & \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (K^t \partial^\alpha \partial_j v, (\partial_j b_{\alpha\beta}) \partial^\beta w) \\
 & + \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle K^t \partial^\alpha \partial_j v, (\partial_j s_{\alpha\beta}) \partial^\beta w \rangle
 \end{aligned}$$

Laat $\varepsilon > 0$, gegee wees.

Beskou dan algemene terme van $a'_t(v, v)$:

Eerstens is:

$$(K^t \partial^\alpha \partial_j v, (\partial_j b_{\alpha\beta}) \partial^\beta v) \text{ met } |\alpha|, |\beta| \leq m.$$

Voer nou m.b.v. faktorintegrasi t afgeleides van die operator K^t (n operator van orde $2t$) oor na regs, dan volg dat:

$$\begin{aligned} & |(K^t \partial^\alpha \partial_j v, (\partial_j b_{\alpha\beta}) \partial^\beta w)| \\ & \leq C \|v\|_{m, t+1} \|v\|_{m, t}, \quad C > 0, \text{ konstant.} \\ & = C\sqrt{\varepsilon} \|v\|_{m, t+1} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|v\|_{m, t} \\ & \leq \frac{C}{2} (\varepsilon \|v\|_{m, t+1}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|v\|_{m, t}^2) \end{aligned}$$

Beskou ook die algemene randterm van $a'_t(v, v)$:

$$\langle K^t \partial^\alpha \partial_j v, (\partial_j s_{\alpha\beta}) \partial^\beta v \rangle \text{ met } |\alpha|, |\beta| \leq m-1.$$

Voer weereens m.b.v. faktorintegrasi t afgeleides van K^t oor na regs, dan volg dat:

$$| \langle K^t \partial^\alpha \partial_j v, (\partial_j s_{\alpha\beta}) \partial^\beta v \rangle |$$

$$\leq C \langle \partial^\alpha v \rangle_{t+1} \langle \partial^\beta v \rangle_t, \quad C > 0, \text{ konstant}$$

$$\leq C \langle \partial^\alpha v \rangle_{t+1+\frac{1}{2}} \langle \partial^\beta v \rangle_{t+\frac{1}{2}}$$

$$\leq C' \| \partial^\alpha v \|_{1,t+1} \| \partial^\beta v \|_{1,t}, \text{ spoorstelling, 3.10 hoofstuk 1.}$$

$$\leq C' \| v \|_{m,t+1} \| v \|_{m,t}, \quad |\alpha|, |\beta| \leq m-1$$

$$= C' \sqrt{\varepsilon} \| v \|_{m,t+1} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \| v \|_{m,t}$$

$$\leq \frac{C'}{2} (\varepsilon \| v \|_{m,t+1}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| v \|_{m,t}^2).$$

Uit die voorafgaande volg dan direk dat vir enige $\varepsilon > 0$,
 gegee, kan $a'_t(v)$ afgeskat word deur:

$$| a'_t(v) | \leq \varepsilon \| v \|_{m,t+1}^2 + C_t(\varepsilon) \| v \|_{m,t}^2$$

met 'n konstante $C_t(\varepsilon) \geq 0$.

2.6.3 Lemma

Die volgende verwantskap geld vir die bilineêre funksio-
 naal a_t :

Daar bestaan konstantes $\gamma_t > 0$ en $\lambda_t \geq 0$, $t=0,1,2,\dots$ sô dat

$$\operatorname{Re} a_t(v) \geq \gamma_t \|v\|_{m,t}^2 - \lambda_t \|v\|_{m,t-1}^2, \quad v \in V.$$

Bewys:

In die bewys word die volgende resultaat telkemale benodig:

$$\begin{aligned} & \|v\|_{m,t}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\partial_j v\|_{m,t}^2 \\ &= \sum_{k=0}^m \left[\int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+t-k} |\partial_n^k \hat{v}(y', x_n)|^2 dy' dx_n \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+t-k} \sum_{j=1}^{n-1} |\partial_n^k (\partial_j v)^\wedge(y', x_n)|^2 dy' dx_n \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+t-k} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} |y_j|^2\right) |\partial_n^k \hat{v}(y', x_n)|^2 dy' dx_n \\ &= \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}_+^n} (1+|y'|^2)^{m+t+1-k} |\partial_n^k \hat{v}(y', x_n)|^2 dy' dx_n \\ & \quad \text{met} \quad \sum_{j=1}^{n-1} |y_j|^2 = |y'|^2 \\ &= \|v\|_{m,t+1}^2 \end{aligned}$$

Verder verloop die hoofbewys deur induksie.

Beskou eers die geval $t=0$.

Die bilineêre funksionaal $a=a_0$ is koërsief (sien paragraaf 2.5). Daar bestaan dus konstantes $\gamma_0 > 0$ en $\lambda_0 \geq 0$ sô dat

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_0(v) &= \operatorname{Re} a(v) \\ &\geq \gamma_0 \|v\|_m^2 - \lambda_0 \|v\|_{m-1}^2 \\ &\geq \gamma_0 \|v\|_{m,0}^2 - \lambda_0 \|v\|_{m,-1}. \end{aligned}$$

Die laaste stap volg uit lemma 4.4 hoofstuk 1:

$$\begin{aligned} \|v\|_{m-1} &\leq \|v\|_{m,-1} \text{ d.w.s.} \\ - \|v\|_{m-1} &\geq - \|v\|_{m,-1}. \end{aligned}$$

Dié lemma (2.6.3) geld dus vir $t=0$.

Gestel nou die lemma geld vir t . D.w.s. daar bestaan $\gamma_t > 0$ en $\lambda_t \geq 0$ sô dat

$$\operatorname{Re} a_t(v) \geq \gamma_t \|v\|_{m,t}^2 - \lambda_t \|v\|_{m,t-1}^2, \quad v \in V.$$

Nou is uit die induksie-aanname en volgens lemma 2.6.2 hoofstuk 2 die volgende bewering waar:

$$\operatorname{Re} a_{t+1}(v) = \operatorname{Re} a_t(v) + \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Re} a_t(\partial_j v) + \operatorname{Re} a'_t(v)$$

-42-

$$\begin{aligned} &\geq \gamma_t (\|v\|_{m,t}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\partial_j v\|_{m,t}^2) \\ &- \lambda_t (\|v\|_{m,t-1}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\partial_j v\|_{m,t-1}^2) \\ &+ \operatorname{Re} a'_t(v), \quad v \in V. \end{aligned}$$

In bogemelde is ook die feit dat, indien $v \in V$ dan is $\partial_j v \in V$, gebruik.

Verder is volgens lemma 2.6.2 hoofstuk 2, vir enige $\varepsilon > 0$ gegee, die volgende waar

$$\operatorname{Re} a'_t(v) \geq -|a'_t(v)| \geq -\varepsilon \|v\|_{m,t+1}^2 - C_t(\varepsilon) \|v\|_{m,t}^2, \quad v \in V$$

met $C_t(\varepsilon) > 0$, konstant.

Deur dié feit tesame met die inleidingsresultaat van hierdie lemma te gebruik volg dan vir 'n spesifieke $\varepsilon^* > 0$ dat

$$\operatorname{Re} a'_{t+1}(v) \geq (\gamma_t - \varepsilon^*) \|v\|_{m,t+1}^2 - (\lambda_t + C_t(\varepsilon^*)) \|v\|_{m,t}^2,$$

$$v \in V$$

met $\varepsilon^* > 0$ só gekies dat

$$\gamma_t - \varepsilon^* > 0 \text{ en } C_t(\varepsilon^*) \geq 0$$

D.w.s.

$$\operatorname{Re} a_{t+1}(v) \geq \gamma_{t+1} \|v\|_{m,t+1}^2 - \lambda_{t+1} \|v\|_{m,t}^2, \quad v \in V$$

met $\gamma_{t+1} = \gamma_t - \varepsilon^* > 0$

en $\lambda_{t+1} = \lambda_t + C_t(\varepsilon^*) \geq 0$.

As die lemma dus vir t heel geld, geld dit vir $t+1$.

Die lemma geld dus vir $t=0,1,2,\dots$.

2.7 Die Lax-Milgram-stelling

Dié stelling word ook sonder bewys aangehaal uit Yosida [6], bl. 92.

Laat H 'n algemene Hilbert-ruimte wees en H' die ruimte van begrensde lineêre funksionale op H .

Vir elke $F \in H'$, bestaan daar 'n unieke $u \in H$ só dat

$$B(v, u) = F(v)$$

waar B 'n begrensde bilineêre funksionaal op H is met

$$|B(u, u)| \geq C \|u\|^2, \quad u \in H,$$

en C 'n positiewe konstante,

3. 'N REGULARITEITSTELLING VIR DIE RAAKLYNIGE RIGTING

Laat V die ruimte wees soos gedefinieer in §3.12 hoofstuk 1.

Beskou die bilineêre funksionaal a , koërsief oor V (§2.5 hoofstuk 2).

Laat ℓ 'n lineêre funksionaal wees op V met die eienskap:

$$|\ell(v)| \leq \beta \|v\|_{m,-t}, \quad v \in V, \quad \beta > 0, \text{ konstant}$$

$$t=0,1,2,\dots$$

Dan is elke oplossing $u \in V^m$ van die funksionaalvergelijking:

$$a(v,u) = \ell(v), \quad v \in V$$

in $H^{m,t}(\mathbb{R}_+^n)$

Bewys:

Die bewys verloop deur induksie in t .

Beskou eers die geval $t=0$.

$u \in V^m$ is 'n oplossing van die funksionaalvergelijking
d.w.s.

$$u \in V^m \subset W^m(\mathbb{R}_+^n) = H^{m,0}(\mathbb{R}_+^n).$$

Die stelling geld dus vir $t=0$.

Gestel nou die stelling geld vir $t \geq 0$.

Aangesien $|\ell(v)| \leq \beta \|v\|_{m, -(t+1)}$, gegee vir $t+1$

$$\leq \beta \|v\|_{m, -t}, \quad -t-1 < -t \quad v \in V$$

is elke oplossing $u \in V^m$ van

$$a(v, u) = \ell(v), \quad v \in V$$

volgens die induksie-aanname in $H^{m, t}(\mathbb{R}_+^n)$

Laat $\lambda \geq \lambda_0, \lambda \geq \lambda_{t+1}$, λ konstant en reëel met λ_0 en λ_{t+1} soos gedefinieer in §2.5 en §2.6.3 hoofstuk 2.

Laat die bilineêre funksionaal C_{t+1} soos volg op $H^{m, t+1}(\mathbb{R}_+^n)$ gedefinieer wees:

$$C_{t+1}(v, w) = a_{t+1}(v, w) + \lambda(v, w)_{m, t}$$

Aangesien a_{t+1} begrens is op $H^{m, t+1}(\mathbb{R}_+^n)$ en $v, w \in H^{m, t+1}(\mathbb{R}_+^n)$ is C_{t+1} begrens op $H^{m, t+1}(\mathbb{R}_+^n)$

Uit lemma 4.2 hoofstuk 1 en lemma 2.6.1 hoofstuk 2 volg dat

$$C_{t+1}(v, w) = a(K^{t+1}v, w) + \lambda(K^t v, w)_m, \quad v \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

Verder is ook vir $v \in V$,

$$\operatorname{Re} C_{t+1}(v) = \operatorname{Re} a_{t+1}(v) + \lambda \operatorname{Re}(v, v)_{m,t}$$

$$\geq \gamma_{t+1} \|v\|_{m,t+1}^2 - \lambda_{t+1} \|v\|_{m,t}^2, \quad \text{lemma 2.6.3}$$

hoofstuk 2

$$+ \lambda \|v\|_{m,t}^2$$

$$\geq \gamma_{t+1} \|v\|_{m,t+1}^2 - \lambda_{t+1} \|v\|_{m,t}^2$$

$$+ \lambda_{t+1} \|v\|_{m,t}^2, \quad \lambda \geq \lambda_{t+1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} C_{t+1}(v) \geq \gamma_{t+1} \|v\|_{m,t+1}^2, \quad v \in V$$

Laasgenoemde vergelyking is, deur limiete van (v_n) , $v_n \in V$ in die norm $\|\cdot\|_{m,t+1}$ te neem, ook geldig vir die afsluiting $V^{m,t+1}$ van V .

Aangesien $u \in H^{m,t}(\mathbb{R}_+^n)$ uit die induksie-aanname, volg dat die funksionaal

$$l_{t+1}(v) = l(K^{t+1}v) + \lambda(v, u)_{m,t}, \quad v \in V$$

goed gedefinieer is op V .

Ook is vir $v \in V$:

$$\begin{aligned}
 |\ell_{t+1}(v)| &\leq |\ell(K^{t+1}(v))| + |\lambda(v, u)_{m,t}| \\
 &\leq \beta \|K^{t+1}v\|_{m, -(t+1)} + \lambda \|v\|_{m,t} \|u\|_{m,t}, \quad \text{Schwarz} \\
 &\leq \beta \|v\|_{m,t+1} + \lambda' \|v\|_{m,t} \quad u \in H^{m,t}(\mathbb{R}_+^n) \text{ en gevolg}
 \end{aligned}$$

lemma 4.2 hoofstuk 1

$$\begin{aligned}
 &\leq \beta \|v\|_{m,t+1} + \lambda' \|v\|_{m,t+1} \\
 &= \beta_0 \|v\|_{m,t+1}, \quad \beta_0 = \beta + \lambda'.
 \end{aligned}$$

Deur 'n limietproses soos tevore aangedui volg nou dat

ℓ_{t+1} vanaf $v \in V^{m,t+1}(\mathbb{R}_+^n)$ kontinu uitgebrei kan word

na $\tilde{\ell}_{t+1}$ op $V^{m,t+1}(\mathbb{R}_+^n)$

Laat $\tilde{\ell}_{t+1}$ ook verderaan aangedui word deur ℓ_{t+1} .

Die Lax-Milgram stelling (§2.7 hoofstuk 2), toegepas op die bilineêre funksionaal C_{t+1} en die lineêre funksionaal ℓ_{t+1} verseker nou die bestaan van 'n unieke $w \in V^{m,t+1}$ 'n oplossing van

$$C_{t+1}(v, w) = \ell_{t+1}(v), \quad v \in V^{m,t+1}$$

Aangesien $v \in V^{m,t+1}$ geld laasgenoemde vergelyking ook vir elemente van V :

$$\begin{aligned}
 C_{t+1}(v,w) &= a(K^{t+1}v,w) + \lambda(K^t v,w)_m, \quad v \in V \\
 &= \ell_{t+1}(v) \\
 &= \ell(K^{t+1}v) + \lambda(K^t v,u)_m.
 \end{aligned}$$

Volgens stelling 4.1 hoofstuk 1 is die operator K 'n isomorfisme van V . Laat dus $K^{t+1}v = v'$, met $v, v' \in V$ en laat dan v' aangedui word deur v dan word laasgemelde vergelyking:

$$a(v,w) + \lambda(K^{-1}v,w)_m = \ell(v) + \lambda(K^{-1}v,u)_m, \quad v \in V.$$

maar u is 'n oplossing van die funksionaalvergelyking

$$a(v,u) = \ell(v)$$

d.w.s

$$a(v,w-u) + \lambda(K^{-1}v, w-u)_m = 0, \quad v \in V.$$

Deur die toepassing van lemma 4.2 hoofstuk 1 volg nou dat:

$$a(v,w-u) + \lambda(v,w-u)_{m,-1} = 0, \quad v \in V.$$

Uit lemma 4.5 hoofstuk 1 volg dat $(\cdot)_{m,-1}$ kontinu is op W^m .

Laasgenoemde vergelyking kan dus uitgebrei word na die afsluiting V^m van V .

Neem dan 'n spesifieke $v' = w-u \in V^m$ sodat die volgende verwantskap verkry word:

$$a(w-u) + \lambda \|w-u\|_{m,-1}^2 = 0$$

$$\text{D.w.s. } 0 = \text{Re } a(w-u) + \lambda \|w-u\|_{m,-1}^2$$

$$\geq \text{Re } a(w-u) + \lambda \|w-u\|_{m,-1}^2, \text{ lemma 4.4 hoofstuk 1}$$

$$\geq \gamma_0 \|w-u\|_m^2 - \lambda_0 \|w-u\|_{m-1}^2$$

$$+ \lambda \|w-u\|_{m-1}^2, \text{ a koërsief oor } V$$

$$\geq \gamma_0 \|w-u\|_m^2 - \lambda_0 \|w-u\|_{m-1}^2$$

$$+ \lambda_0 \|w-u\|_{m-1}^2, \lambda \geq \lambda_0 \text{ gegee}$$

$$= \gamma_0 \|w-u\|_m^2, \quad \gamma_0 > 0$$

$$\implies \|w-u\|_m^2 = 0$$

Hieruit volg nou dat $u=w$ b.o. maar $w \in V^{m,t+1}$ (reeds bewys)

d.w.s. $u \in V^{m,t+1} \subset H^{m,t+1}(\mathbb{R}_+^n)$.

Indien die stelling dus geld vir t geld dit vir $t+1$.

Die stelling geld dus vir $t=0,1,2,\dots$.

Opmerking:

Dié stelling gee uitspraak oor die differensieerbaarheid van 'n oplossing van die funksionaalvergelyking

$$a(v, u) = \ell(v), \quad v \in V$$

en wel dat 'n oplossing wat distribusie-afgeleides in alle rigtings tot die m 'de orde op die rand besit boonop nog ekstra ordes tot en met die t -de orde op 'n rand in die raaklynige rigting besit.

4. GEVOLG - RAAKLYNIGE RANDREGULARITEITSEIENSKAPPE VIR 'N ELLIPTIESE RANDWAARDEPROBLEEM

4.1 Stelling

Laat die deelruimte V en die bilineêre funksionaal a voldoen aan die vereistes van stelling 3 hoofstuk 2.

Definieer ook die randoperator T_k op die rand ∂R_+^n soos volg:

$$T_k = \sum_{|\alpha| \leq t_k} \tau_{k\alpha} \partial^\alpha, \quad k=1,2,\dots,m, t_k \leq m-1$$

met koëffisiënte $\tau_{k\alpha}$ in $C^\infty(\partial R_+^n)$ en afgeleides van alle ordes begrens op ∂R_+^n .

Gegee 'n heelgetal $r \geq 0$ en elemente

$$f \in H^{0,r}(\mathbb{R}_+^n), \quad g \in H^{m,m+r}(\mathbb{R}_+^n)$$

$$g_k \in W^{m+r}(\mathbb{R}^{n-1})$$

Dan behoort elke oplossing $u \in V^m$ van

$$b(v,u) + s(v,u) = (v,f) - b(v,g) - s(v,g)$$

$$+ \sum_{k=1}^m \langle T_k v, g_k \rangle, \quad v \in V$$

aan $H^{m,m+r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Bewys:

Definieer die lineêre funksionaal ℓ op V deur:

$$\ell(v) = (v,f) - b(v,g) - s(v,g) + \sum_{k=1}^m \langle T_k v, g_k \rangle, \quad v \in V.$$

Aangesien $a(v,u) = b(v,u) + s(v,u)$ sal, indien aangetoon kan word dat

$$|\ell(v)| \leq C \|v\|_{m, -(m+r)}$$

die resultaat vir hierdie stelling volg uit stelling 3 hoofstuk 2, met $t=m+r$.

Nou is $f \in H^{0,r}(\mathbb{R}_+^n)$ gegee

d.w.s.

$$|(v, f)| \leq \|v\|_{0, -r} \|f\|_{0, r}, \quad \text{lemma 4.3 hoofstuk 1}$$

$$\leq C \|v\|_{0, -r}, \quad f \in H^{0, r}(\mathbb{R}_+^n)$$

$$= C \|v\|_{0, m-(m+r)}$$

$$\leq \beta, \|v\|_{m, -(m+r)}, \quad \text{lemma 4.6 hoofstuk 1.}$$

Ook is $g \in H^{m, m+r}(\mathbb{R}_+^n)$

d.w.s. $\partial^\beta g \in H^{0, m+r}(\mathbb{R}_+^n)$ vir enige β met $|\beta| \leq m$.

Hieruit volg dan dat:

$$|b(v, g)| \leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} |(\partial^\alpha v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta g)|$$

$$\leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{0, -(m+r)} \|b_{\alpha\beta} \partial^\beta g\|_{0, m+r},$$

, lemma 4.3 hoofstuk 1.

$$\leq \beta_2 \|v\|_{m, -(m+r)}, \quad |\alpha| \leq m \text{ en definisie van } \|\cdot\|_{m, s}$$

Uit die algemene spoorstelling §3.10 hoofstuk 1 volg ook dat vir $g \in H^{m, m+r}(\mathbb{R}_+^n)$, is:

$$g^{(m-1)}(x', 0) \in W^{2m+r-(m-1)-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) = W^{m+r+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

waar $g^{(m-1)}$ die $(m-1)$ 'de orde normaal afgeleide (na x_n) voorstel.

Dit geld ook vir $\partial^\beta g(x', 0)$ met β enige multi-indeks met $|\beta| \leq m-1$.

Hieruit volg dan dat

$$\begin{aligned} |s(v, g)| &\leq \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} |\langle \partial^\alpha v, s_{\alpha\beta} \partial^\beta g \rangle| \\ &\leq \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha v \rangle_{-m-r-\frac{1}{2}} \langle s_{\alpha\beta} \partial^\beta g \rangle_{m+r+\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \langle \partial^\alpha v \rangle_{-m-r-\frac{1}{2}}, \quad s_{\alpha\beta} \partial^\beta g \in W^{m+r+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ &\leq C_2 \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \|\partial^\alpha v\|_{1, m-r-1}, \quad \text{spoorstelling} \\ &\leq C_3 \|v\|_{m, -m-r-1} \\ &\leq \beta_3 \|v\|_{m, -(m+r)}, \quad , -m-r-1 < -m-r \end{aligned}$$

Die derde laaste stap volg deur 'n toepassing van die algemene spoorstelling §3.10 hoofstuk 1 op $H^{1,s}(\mathbb{R}_+^n)$ waaruit volg dat

$$\| u(x', 0) \|_{W^{s+1-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \| u \|_{H^{1,s}(\mathbb{R}_+^n)}$$

stel nou $s+1 = -m-r$

dan is

$$\| u(x', 0) \|_{W^{-m-r-\frac{1}{2}}} \leq C \| u \|_{H^{1,-m-r-1}}.$$

Verder geld ook dat $g_k \in W^{m+r}(\mathbb{R}^{n-1})$ sodat:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^m \langle T_k v, g_k \rangle \right| &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha| \leq t_k} |\langle \partial^\alpha v, \bar{T}_{k\alpha} g_k \rangle| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha| \leq t_k} \langle \partial^\alpha v \rangle_{-(m+r)} \langle \bar{T}_{k\alpha} g_k \rangle_{m+r} \\ &\leq C \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha| \leq t_k} \langle \partial^\alpha v \rangle_{-(m+r)}, \quad C > 0 \\ &\leq C \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha| \leq t_k} \langle \partial^\alpha v \rangle_{-(m+r) + \frac{1}{2}} \\ &\leq C \sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha| \leq t_k} \| \partial^\alpha v \|_{1, -(m+r)}, \quad \text{spoorstelling} \\ &\leq \beta_4 \| v \|_{m, -(m+r)}, \quad t_k \leq m-1 \end{aligned}$$

vir $k=1, \dots, m$.

Gevolglik is:

$$|\ell(v)| \leq |(v, f)| + |b(v, g)| + |s(v, g)| + \left| \sum_{k=1}^m \langle T_k v, g_k \rangle \right|$$

$$\leq \beta \|v\|_{m, -(m+r)} \quad , \text{ uit bogemelde met}$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$$

Hierdie stelling 4.1 oor randregulariteit geld dus soos vermeld.

HOOFSTUK 3

REGULARITEIT VAN TWEDE ORDE RANDWAARDEPROBLEME

1. ALGEMEEN

In die geval van eerste orde bilineêre funksionale lei die regulariteitstellings van hoofstuk 2 tot volledige regulariteit (d.i. ook in die normale rigting op die rand).

In dié lig gesien is dit dus goed om tweede orde randwaardeprobleme in 'n aparte hoofstuk te behandel aangesien die eenvoudiger bewerkings op eerste-orde funksionale die resultate meer prominent maak en ook 'n basis daarstel vir ingewikkelder probleme soos wat in hoofstuk 4 behandel sal word.

2. DEFINISIES

2.1 $b(u,v)$ -bilineêre funksionaal

Laat b die volgende eerste orde bilineêre funksionaal wees:

$$b(u,v) = (u, b_0 v) + \sum_{j=1}^n (u, b_j \partial_j v) + \sum_{j,k=1}^n (\partial_j u, b_{jk} \partial_k v)$$

met $b_j, b_{jk} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, en alle orde afgeleides is begrens op \mathbb{R}_+^n .

Laat V soos volg gedefinieer wees

$$V = \{v \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n) \mid u=0 \text{ op } \partial\mathbb{R}_+^n\}$$

$$\underline{\delta f} \ V = W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

Dit sal duidelik blyk uit die verdere probleemstellings met watter definisie van V gewerk word.

2.2 $s(u,v)$ - bilineêre funksionaal

Laat s die bilineêre funksionaal op $\partial\mathbb{R}_+^n$ wees gedefinieer deur:

$$s(u,v) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} u(x') \overline{\sigma(x')} v(x') dx'$$

met $\sigma \in C^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)$, en alle orde afgeleides begrens op $\partial\mathbb{R}_+^n$.

2.3 Die operator T

Laat die operator T gedefinieer wees deur:

$$Tu(x) = \tau(x)u(x), \quad x \in \partial\mathbb{R}_+^n \text{ met}$$

$\tau \in C^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n)$, en alle orde afgeleides begrens op $\partial\mathbb{R}_+^n$.

2.4 Die bilineêre funksionaal a

Laat a die volgende koërsiewe bilineêre funksionaal oor V wees:

$$a(u,v) = b(u,v) + s(u,v)$$

sodat $\operatorname{Re} a(v) \geq \gamma_0 \|v\|_1^2 - \lambda_0 \|v\|^2$, $v \in V$ met spesifieke $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 \geq 0$ (sien lemma 2.5 hoofstuk 2).

3. 'N REGULARITEITSTELLING

Laat $r \geq 0$, r heel, $f \in W^r(\mathbb{R}_+^n)$, $g \in W^{2+r}(\mathbb{R}_+^n)$ en $\omega \in W^{1+r}(\mathbb{R}^{n-1})$.

As $u \in V$ 'n oplossing is van die volgende funksionaalvergelyking

$$b(v,u) + s(v,u) = (v,f) - b(v,g) - s(v,g) + \langle Tv, \omega \rangle$$

$$, v \in V$$

dan is $u \in W^{r+2}(\mathbb{R}_+^n)$

Bewys:

Stelling 4.1 hoofstuk 2 (vir $m=1$) is op hierdie geval van toepassing en gevolglik is $u \in H^{1,1+r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Nou is $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n) \subset V$ en dus is

$$s(\phi, u) = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \phi(x') \sigma(x') u(x') dx', \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

$$= 0$$

$$= s(\phi, g)$$

$$= \langle T\phi, \omega \rangle \quad \text{want } \phi = 0 \text{ op } \partial \mathbb{R}_+^n$$

u is dus 'n oplossing van die volgende funksionaalvergelyking:

$$b(\phi, u) = (\phi, f) - b(\phi, g), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

D.w.s.

$$\begin{aligned} b(\phi, u) &= (\phi, f) - \left\{ (\phi, b_0 g) + \sum_{j=1}^n (\phi, b_j \partial_j g) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j,k=1}^n (\partial_j \phi, b_{jk} \partial_k g) \right\} \\ &= (\phi, f) - \left\{ (\phi, b_0 g) + \sum_{j=1}^n (\phi, b_j \partial_j g) - \sum_{j,k=1}^n (\phi, \partial_j (b_{jk} \partial_k g)) \right\} \end{aligned}$$

- uit faktorintegrasie, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$

$$= (\phi, f - Lg)$$

$$\text{met } L = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j - \sum_{j,k=1}^n \partial_j (b_{jk} \partial_k)$$

Hieruit volg dan dat

$$\begin{aligned} &(\phi, b_0 u) + \sum_{j=1}^n (\phi, b_j \partial_j u) + \sum_{k=1}^{n-1} (\partial_n \phi, b_{nk} \partial_k u) + \sum_{j=1}^{n-1} (\partial_j \phi, b_{jn} \partial_n u) \\ &\quad + (\partial_n \phi, b_{nn} \partial_n u) + \sum_{j,k=1}^{n-1} (\partial_j \phi, b_{jk} \partial_k u) \\ &= (\phi, f - Lg) \end{aligned}$$

D.w.s.

$$\begin{aligned}
 & (\phi, b_0 u + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j u - \sum_{k=1}^{n-1} \partial_n (b_{nk} \partial_k u) - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j (b_{jn} \partial_n u) \\
 & \quad - \sum_{j,k=1}^{n-1} \partial_j (b_{jk} \partial_k u)) \\
 & + (\partial_n \phi, b_{nn} \partial_n u) \\
 & = (\phi, f - Lg) \quad , \text{ uit faktorintegrasië en } u \in H^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)
 \end{aligned}$$

Dan is

$$\begin{aligned}
 & (\partial_n \phi, \partial_n (b_{nn} u)) \\
 & = (\phi, f - Lg - \partial_n (u (\partial_n b_{nn}))) - b_0 u - \sum_{j=1}^n b_j \partial_j u \\
 & + \sum_{k=1}^{n-1} \partial_n (b_{nk} \partial_k u) + \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j (b_{jn} \partial_n u) \\
 & + \sum_{j,k=1}^{n-1} \partial_j (b_{jk} \partial_k u) \quad , \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n) \\
 & = (\phi, v) \tag{3}
 \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned}
 v = & f - Lg - \partial_n (u (\partial_n b_{nn})) - b_0 u - \sum_{j=1}^n b_j \partial_j u \\
 & + \sum_{k=1}^{n-1} \partial_n (b_{nk} \partial_k u) + \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j (b_{jn} \partial_n u)
 \end{aligned}$$

(vervolg)

$$+ \sum_{j,k=1}^{n-1} \partial_j (b_{jk} \partial_k u)$$

waar $v \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ want $f \in W^r(\mathbb{R}_+^n)$,

$g \in W^{2+r}(\mathbb{R}_+^n)$ en $u \in H^{1,1+r}(\mathbb{R}_+^n)$

Volgens die definisie van 'n distribusie-afgeleide bestaan

$\partial_n^2 (b_{nn} u)$ en

$$\partial_n^2 (b_{nn} u) \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$$

d.w.s. $b_{nn} u \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$.

Aangesien die bilineêre funksionaal a koërsief is (d.w.s. b ook) oor V , is die bilineêre funksionaal b gelykmatig sterk ellipties. (Verwys Agmon [1] stelling 7.12 bl. 86). Gevolglik is die koëffisiënt $b_{nn}^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ en alle orde afgeleides begrens op \mathbb{R}_+^n , sodat dan uit die laaste resultaat volg dat

$$u \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$$

Hierdie geval kom ooreen met die geval $r=0$.

Deur gebruik te maak van die feit dat $f \in W^r(\mathbb{R}_+^n)$ en $g \in W^{2+r}(\mathbb{R}_+^n)$ kan nou aangetoon word dat $u \in W^{2+r}(\mathbb{R}_+^n)$, $r \geq 0$, heel.

Aangesien $u \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$ kan vergelyking (3) in dié stelling geskryf word as:

$$\begin{aligned}
 \partial_n^2 (b_{nn} u) &= f - Lg - \partial_n (u (\partial_n b_{nn})) - b_o u \\
 &- \sum_{j=1}^n b_j \partial_j u + \sum_{k=1}^{n-1} \partial_n (b_{nk} \partial_k u) \\
 &+ \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j (b_{jn} \partial_n u) \\
 &+ \sum_{j,k=1}^{n-1} \partial_j (b_{jk} \partial_k u) \tag{4}
 \end{aligned}$$

Aangesien $u \in W^2(R_+^n)$ en $u \in H^{1,1+r}(R_+^n)$ is $u \in H^{2,r}(R_+^n)$

Ook is $f \in W^r(R_+^n)$ en $g \in W^{2+r}(R_+^n)$ en dus is $Lg \in W^r(R_+^n)$.

Differensieer vergelyking (4) een keer na x_n en kry:

$$\begin{aligned}
 \partial_n^{2+1} (b_{nn} u) &= \partial_n f - \partial_n Lg - \partial_n^2 (u (\partial_n b_{nn})) - \partial_n (b_o u) \\
 &- \partial_n \sum_{j=1}^n b_j \partial_j u + \partial_n \sum_{k=1}^{n-1} \partial_n (b_{nk} \partial_k u) \\
 &+ \partial_n \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j (b_{jn} \partial_n u) \\
 &+ \partial_n \sum_{j,k=1}^{n-1} \partial_j (b_{jk} \partial_k u)
 \end{aligned}$$

Die regterkant van dié vergelyking behoort aan $L^2(R_+^n)$ want $f \in W^r(R_+^n)$, $Lg \in W^r(R_+^n)$ en $u \in H^{2,r}(R_+^n)$.

-63-

D.w.s. $\partial_n^{2+1}(b_{nn}u) \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$

oftewel $u \in W^{2+1}(\mathbb{R}_+^n)$.

Gestel dus nou dat $u \in W^{2+t}(\mathbb{R}_+^n)$, $0 \leq t < r$, is.

Deur $t+1$ keer na x_n in die regterkant van vergelyking (4) te differensieer volg dat die resultaat in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ is want

$$f \in W^r(\mathbb{R}_+^n) \subseteq W^{t+1}(\mathbb{R}_+^n), \quad 0 \leq t < r$$

$$g \in W^{2+r}(\mathbb{R}_+^n) \subseteq W^{2+t+1}(\mathbb{R}_+^n)$$

en $u \in H^{2+t, r-t}(\mathbb{R}_+^n)$.

Die gevolg is dat

$$\partial_n^{2+t+1}(b_{nn}u) \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$$

oftewel $u \in W^{2+t+1}(\mathbb{R}_+^n)$, $0 \leq t < r$

Uit induksie volg dan nou dat

$$u \in W^{2+r}(\mathbb{R}_+^n) \quad r \geq 0, \quad r \text{ heel.}$$

3.1 Regulariteit vir die tweede orde Dirichlet-probleem

Stelling 3 hoofstuk 3 lei onmiddellik tot volle regulariteit vir die Dirichlet-probleem soos volg:

Stel $V = \{v \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n) \mid v=0 \text{ op } \partial\mathbb{R}_+^n\}$, $s=0$, $T=0$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$,

$g \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$, dan reduceer die funksionaalvergelyking in stelling 3 na die volgende

$u \in V^1$ 'n oplossing van

$$b(v,u) = (v,f) - b(v,g), \quad v \in V$$

$$\implies Lw = f, \quad w = u + g \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$$

$$w = g \quad \text{op } \partial\mathbb{R}_+^n$$

$$\text{met } L = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j - \sum_{j,k=1}^n \partial_j (b_{jk} \partial_k)$$

Bewys $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n) \subset V$

$u \in V^1$, is dus 'n oplossing van

$$b(\phi,u) = (\phi,f) - b(\phi,g), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

$$\begin{aligned} \implies (\phi, b_0 u) + \sum_{j=1}^n (\phi, b_j \partial_j u) + \sum_{j,k=1}^n (\partial_j \phi, b_{jk} \partial_k u) \\ = (\phi, f) - (\phi, b_0 g) - \sum_{j=1}^n (\phi, b_j \partial_j g) \\ - \sum_{j,k=1}^n (\partial_j \phi, b_{jk} \partial_k g) \end{aligned}$$

$$\implies (\phi, b_0 u + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j u - \sum_{j,k=1}^n \partial_j (b_{jk} \partial_k u))$$

(vervolg)

$$= (\phi, f) - (\phi, b_0 g + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j g - \sum_{j=1}^n \partial_j (b_{jk} \partial_k g))$$

(uit faktorintegrasie en $u \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$)

$$\implies (\phi, b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j - \sum_{j,k=1}^n \partial_j b_{jk} \partial_k) (u+g)$$

$$= (\phi, f) \text{ vir alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

$$\implies L(u+g) = f$$

$$\text{met } L = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j - \sum_{j,k=1}^n \partial_j (b_{jk} \partial_k)$$

D.w.s. $Lw = f$ met $w = u+g \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$

ook is $w = g$ op $\partial\mathbb{R}_+^n$

$u(x) = 0$ op $\partial\mathbb{R}_+^n$ want $u \in V^1$

d.w.s. $w = g$ op $\partial\mathbb{R}_+^n$

3.2 Regulariteit vir die tweede orde Neumann-probleem

Presies soos in §3.1 lei stelling 3 hoofstuk 3 onmiddellik tot volle regulariteit vir die tweede orde Neumann-probleem soos volg:

$$\text{Stel } V = W^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

$$S = 0 \Rightarrow \sigma = 0$$

$$\tau = 1 \Rightarrow Tu(x) = u(x), x \in \partial\mathbb{R}_+^n$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}_+^n), \quad \omega \in W^1(\mathbb{R}_+^{n-1})$$

Dan reduseer die funksionaalvergelyking in stelling 3 hoofstuk 3 na die volgende:

$u \in W^1(\mathbb{R}_+^n)$ 'n oplossing van

$$b(v, u) = (v, f) - \langle v, \omega \rangle, \quad v \in V$$

$$\Rightarrow Lu = f, \quad \text{vir } u \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$$

$$\sum_{k=1}^n b_{nk} \partial_k u = \omega \text{ op } \partial \mathbb{R}_+^n.$$

Bewys:

$u \in V^1$ is 'n oplossing van die volgende funksionaalvergelyking:

$$b(v, u) = (v, f) - \langle v, \omega \rangle, \quad v \in V$$

D.w.s.

$$(v, b_0 u) + \sum_{j=1}^n (v, b_j \partial_j u) + \sum_{j,k=1}^n (\partial_j v, b_{jk} \partial_k u) = (v, f) - \langle v, \omega \rangle, \quad v \in V$$

Die doel is nou om met behulp van faktorintegrasië afgeleides na regs oor te voer:

Vir elke $k=1, \dots, n$ is uit faktorintegrasië en die feit dat $u \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$:

$$\begin{aligned} & (\partial_n v, b_{nk} \partial_k u) \\ &= -\langle v, b_{nk} \partial_k u \rangle - (v, \partial_n (b_{nk} \partial_k u)) \end{aligned}$$

en vir elke $k=1, \dots, n$, en $j=1, \dots, n-1$ is ook

$$(\partial_j v, b_{jk} \partial_k u) = - (v, \partial_j (b_{jk} \partial_k u)).$$

Gevolglik kan die funksionaalvergelyking soos volg geskryf word:

$$\begin{aligned} (v, b_{\circ} u + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j u - \sum_{j,k=1}^n \partial_j (b_{jk} \partial_k u)) \\ - \sum_{k=1}^n \langle v, b_{nk} \partial_k u \rangle = (v, f) - \langle v, \omega \rangle, \text{ vir alle } v \in V. \end{aligned}$$

D.w.s.

$$(v, Lu) - \sum_{k=1}^n \langle v, b_{nk} \partial_k u \rangle = (v, f) - \langle v, \omega \rangle, \quad v \in V$$

met L die operator soos voorheen gedefinieer.

As v nou vir $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ deurloop ($C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n) \subset V$) dan verdwyn al die randterme. $u \in V^1$ is dus 'n oplossing van die volgende funksionaalvergelyking:

$$(\phi, Lu) = (\phi, f), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

en dus is

$$Lu = f, \quad u \in W^2(\mathbb{R}_+^n) \text{ uit regulariteitstelling 3}$$

hoofstuk 3.

Deur $Lu = f$ in die voorlaaste funksionaalvergelyking te vervang volg dat

$$\langle v, \sum_{k=1}^n b_{nk} \partial_k u \rangle = \langle v, \omega \rangle, \quad v \in V.$$

As v nou vir $C_0^\infty(\overline{R_+^n})$ deurloop dan sal die spoor van v op ∂R_+^n vir $C_0^\infty(R^{n-1})$ deurloop. Dan volg uit die teorie van die Lebesgue-integraal dat die volgende randwaardes van toepassing is op dié tweede orde Neumann-probleem.

$$\sum_{k=1}^n b_{nk} \partial_k u = \omega, \quad \text{op } \partial R_+^n$$

3.3 Regulariteit vir die tweede orde Newton-probleem

Presies soos in paragraaf 3.1 lei stelling 3 hoofstuk 3 onmiddellik tot volle regulariteit vir die tweede orde Newton-probleem soos volg:

Laat $V = W^\infty(R_+^n)$

$$\sigma \neq 0, \quad \tau = 1$$

D.w.s. $s \neq 0, \quad Tu(x) = u(x) \quad x \in \partial R_+^n$

en $f \in L^2(R_+^n), \quad g \in W^2(R_+^n).$

Dan reduceer die funksionaalvergelyking in stelling 3 na die volgende:

$u \in W^1(R_+^n)$ 'n oplossing van

$$b(v, u) - \langle v, \sigma u \rangle = (v, f) + \langle v, \sigma g \rangle - \langle v, \omega \rangle, \quad v \in V$$

$$\implies Lu = f \text{ vir } u \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$$

$$\text{en } \sum_{k=1}^n b_{nk} \partial_k u + \sigma u + \sigma g = \omega, \text{ op } \partial \mathbb{R}_+^n$$

Bewys:

$u \in V^1$ is 'n oplossing van die volgende funksionaalvergelijking:

$$b(v, u) - \langle v, \sigma u \rangle = (v, f) + \langle v, \sigma g \rangle - \langle v, \omega \rangle, \quad v \in V$$

Presies soos in §3.2 hoofstuk 3 reduceer die vergelyking tot:

$$\begin{aligned} (v, Lu) - \sum_{k=1}^n \langle v, b_{nk} \partial_k u \rangle \\ - \langle v, \sigma u + \sigma g \rangle = (v, f) - \langle v, \omega \rangle, \quad v \in V \end{aligned}$$

As V nou vir $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ deurloop dan verdwyn al die randterme in bogemelde funksionaalvergelijking.

$u \in V^1$ is dus 'n oplossing van die volgende funksionaalvergelijking:

$$(\phi, Lu) = (\phi, f), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

oftewel $Lu = f$, $u \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$ uit regulariteitstelling 3 hoofstuk 3.

Deur $Lu = f$ in die voorlaaste funksionaalvergelijking te

vervang volg dat

$$\langle v, \sum_{k=1}^n b_{nk} \partial_k u + \sigma u + \sigma g \rangle = \langle v, \omega \rangle, \quad v \in V.$$

Die volgende randwaarde is dus van toepassing op die tweede orde Newton-probleem.

$$\sum_{k=1}^n b_{nk} \partial_k u + \sigma u + \sigma g = \omega, \quad \text{op } \partial R_+^n$$

presies soos in §3.2 hoofstuk 3.

HOOFSTUK 4

RANDREGULARITEIT IN DIE NORMAALRICHTING

1. OORSIG

In hoofstuk 2 is algemene regulariteit in die raaklynige rigting bewys vir 'n spesiale klas van elliptiese randwaardeprobleme. In hoofstuk 3 is verder aangetoon hoedat die resultate van hoofstuk 2 lei tot volle regulariteit (d.i. ook in die normaalrigting) vir 'n klas van tweede orde elliptiese randwaardeprobleme. In dié hoofstuk bly dit dus slegs nodig om die volle randregulariteit van 'n klas van hoër orde elliptiese randwaardeprobleme aan te toon.

In die proses word die volgende hulpresultaat benodig:

2. HULPRESULTAAT

Laat s en k heelgetalle wees met $0 < s \leq k$ en v 'n funksie gedefinieer op R_+^n met

$$2.1 \quad \partial_j v \in W^{s-1}(R_+^n), \quad j=1, \dots, n-1$$

$$(d.w.s. \quad v \in H^{0,s}(R_+^n)).$$

$$2.2 \quad |(v, \partial_n^k \phi)| \leq K \|\phi\|_{k-s}, \quad \phi \in C_0^\infty(R_+^n), \quad K \text{ konstant}$$

Dan is $v \in W^s(\mathbb{R}_+^n)$.

Vir 'n bewys van dié hulpresultaat word die leser verwys na Schechter [5] bl. 198.

2.1 Opmerking

Die stelling 2 hoofstuk 4 vind toepassing in die bewys van hoofstelling 3 in dié hoofstuk en wel in die vorm met $k=2m$ en $s=m+1$ en voorwaarde dat

$$\partial_j u \in W^m(\mathbb{R}_+^n)$$

en $|(u, \partial_n^{2m} \phi)| \leq K \|\phi\|_{2m-(m+1)}$

3. DIE HOOFSTELLING VIR RANDREGULARITEIT

Laat V die deelruimte wees soos voorheen gedefinieer. Laat a die bilineêre funksionaal wees wat voldoen aan al die vereistes vir stelling 3 hoofstuk 2. Definieer die differensiaaloperatore T_k , $k=1, \dots, m$ deur

$$T_k = \sum_{|\alpha| \leq t_k} \tau_{k\alpha} \partial^\alpha, \quad t_k \leq m-1, \quad k=1, \dots, m$$

op $\partial \mathbb{R}_+^n$, sodat $\tau_{k\alpha} \in C^\infty(\partial \mathbb{R}_+^n)$ en afgeleides van alle ordes begrens op $\partial \mathbb{R}_+^n$.

Gegee 'n heelgetal $r \geq 0$, en elemente

$$f \in W^r(\mathbb{R}_+^n), g \in W^{2m+r}(\mathbb{R}_+^n), g_k \in W^{m+r}(\mathbb{R}_+^n)$$

Dan is elke oplossing $u \in V^m$ van die funksionaalvergelyking:

$$b(v, u) + s(v, u) = (v, f) - b(v, g) - s(v, g) + \sum_{k=1}^m \langle T_k v, g_k \rangle, \quad v \in V$$

in $W^{2m+r}(\mathbb{R}_+^n)$.

Bewys:

Die bewoording van die stelling is sodanig dat $u \in V^m$ in elkgeval voldoen aan:

$$u \in H^{m, m+r}(\mathbb{R}_+^n)$$

uit stelling 3 hoofstuk 2.

Laat L die volgende operator wees:

$$L = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (b_{\alpha\beta} \partial^\beta)$$

Aangesien die bilineêre funksionaal b koërsief is, is dit gelykmatig sterk ellipties uit Agmon [1] bl. 86 en dus 'n die koëffisiënt $b_{\alpha\beta}$ waar $\alpha = \beta = (0, 0, \dots, m)$ ongelyk aan nul op \mathbb{R}_+^n en met $\frac{1}{b_{\alpha\beta}}$ begrens op \mathbb{R}_+^n . Daar mag dus deur hierdie koëffisiënt gedeel word sonder om die aard van die vergelykings te verander.

Neem dus nou aan dat die bilineêre funksionaal b van die volgende vorm is:

$$b(v, u) = (\partial_n^m v, \partial_n^m u) + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ \alpha_n + \beta_n < 2m}} (\partial^\alpha v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta u)$$

met α_n en β_n die n'de komponent van die multi-indekse α en β .

Aangesien $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n) \subset V$ is $u \in V^m$ ook 'n oplossing van die volgende funksionaalvergelyking:

$$b(\phi, u) = (\phi, f) - b(\phi, g)$$

D.w.s.

$$(\partial_n^m \phi, \partial_n^m u) + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ \alpha_n + \beta_n < 2m}} (\partial^\alpha \phi, b_{\alpha\beta} \partial^\beta u)$$

$$= (\phi, f) - \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\phi, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (b_{\alpha\beta} \partial^\beta g))$$

(uit faktorintegrasië en die feit

dat $u \in H^{m, m+r}(\mathbb{R}_+^n)$ en $g \in W^{2m+r}(\mathbb{R}_+^n)$)

Sodat die volgende geld:

$$(-1)^m (\partial_n^{2m} \phi, u) = (\partial_n^m \phi, \partial_n^m u), \quad u \in H^{m, m+r}(\mathbb{R}_+^n)$$

$$\begin{aligned}
 = (\phi, f) - (\phi, Lg) - \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq \\ \alpha_n + \beta_n < 2m}} (\partial^\alpha \phi, b_{\alpha\beta} \partial^\beta u) \quad (5)
 \end{aligned}$$

Die doel is om nou by elke term in die sommasie aan die regterkant van vergelyking (5) m.b.v. faktorintegrasie ($\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$) een afgeleide van links na regs oor te voer.

Beskou 'n algemene term $(\partial^\alpha \phi, b_{\alpha\beta} \partial^\beta u)$

$$|\alpha| = |\beta| = m \text{ en } \alpha_n + \beta_n < 2m.$$

As $\beta_n < m$ mag enige een afgeleide van links na regs oor-gevoer word want $u \in H^{m, m+r}(\mathbb{R}_+^n)$.

As $\beta_n = m$ dan moet vir dié multi-indeks $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ geld dat $\alpha_n \leq m-1$ en dus is $\alpha' \neq 0$, want $|\alpha| = m$. Een raaklynige afgeleide kan dus van links na regs in die inproduk oor-gevoer word.

Uit vergelyking (5) volg dan nou dat:

$$\begin{aligned}
 |(\partial_n^{2m} \phi, u)| &\leq K \|\phi\|_{m-1}, & g &\in W^{2m+r}(\mathbb{R}_+^n) \\
 & & f &\in W^r(\mathbb{R}_+^n)
 \end{aligned}$$

$$= K \|\phi\|_{2m-(m+1)}, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n).$$

Verder is $\partial_j u \in W^m(\mathbb{R}_+^n)$, $j=1, \dots, n-1$ want $u \in H^{m, m+r}(\mathbb{R}_+^n)$ sodat beide voorwaardes van stelling 2 hoofstuk 4 be-

vredig word.

Gevolglik is $u \in W^{m+1}(\mathbb{R}_+^n)$, ($s=m+1$).

Gestel nou dat vir 'n k heel met $0 \leq k \leq m-1$ geld dat $u \in W^{m+k}(\mathbb{R}_+^n)$.

Die doel is nou om indien moontlik $k+1$ afgeleides m.b.v. faktorintegrasie in die sommasie van vergelyking (5) van links en regs oor te voer.

Beskou weer 'n algemene term

$$(\partial^\alpha \phi, b_{\alpha\beta} \partial^\beta u)$$

met $|\alpha| = |\beta| = m$ en $\alpha_n + \beta_n < 2m$.

Indien $\beta_n < m$ kan enige $k+1$ afgeleides na regs oorgevoer word ($u \in H^{m, m+r}(\mathbb{R}_+^n)$).

Indien $\beta_n = m$ volg dan weer soos voorheen dat vir die multi-indeks $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ geld dat $\alpha' \neq 0$. $k+1$ afgeleides waarvan hoogstens k normaal afgeleides is mag dus na regs oorgevoer word ($u \in W^{m+k}(\mathbb{R}_+^n)$).

Nou volg uit vergelyking (5) dat

$$\begin{aligned} & |(\partial_n^{2m} \phi, u)| \\ & \leq K \|\phi\|_{m-(k+1)} \end{aligned}$$

$$\leq K \|\phi\|_{2m-(m+k+1)}, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

Verder is ook

$$\partial_j u \in W^{m+k}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{want}$$

$$u \in W^{m+k}(\mathbb{R}_+^n) \quad \underline{\text{en}} \quad u \in H^{m,m+r}(\mathbb{R}_+^n).$$

Dan volg direk uit stelling 2 hoofstuk 4 dat

$$u \in W^{m+k+1}(\mathbb{R}_+^n), \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Uit induksie is dit dus nou bewys dat

$$u \in W^{2m}(\mathbb{R}_+^n)$$

Deur gebruik te maak van die feit dat

$$f \in W^r(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{en} \quad g \in W^{2m+r}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{kan nou aangetoon word dat}$$

$$u \in W^{2m+r}(\mathbb{R}_+^n)$$

Aangesien $u \in W^{2m}(\mathbb{R}_+^n)$ kan vergelyking (5) m.b.v. faktor-integrasie geskryf word as:

$$(-1) \partial_n^{2m} u = f - Lg - \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ \alpha_n + \beta_n < 2m}} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (b_{\alpha\beta} \partial^\beta u) \quad (6)$$

Aangesien $u \in W^{2m}(\mathbb{R}_+^n)$ en $u \in H^{m,m+r}(\mathbb{R}_+^n)$ is $u \in H^{2m,r}(\mathbb{R}_+^n)$

Ook is $f \in W^r(\mathbb{R}_+^n)$ en $g \in W^{2m+r}(\mathbb{R}_+^n)$ en dus $Lg \in W^r(\mathbb{R}_+^n)$.

Differentieer vergelyking (6) een keer na x_n en kry:

$$(-1)^m \partial_n^{2m+1} u = \partial_n f - \partial_n Lg - \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ \alpha_n + \beta_n < 2m}} (-1)^{|\alpha|} \partial_n \partial^\alpha (b_{\alpha\beta} \partial^\beta u)$$

Uit voorgemelde gegewens volg dan direk dat die regterkant van laasgemelde vergelyking aan $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ behoort sodat

$$\partial_n^{2m+1} u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$$

oftewel $u \in W^{2m+1}(\mathbb{R}_+^n)$

Gestel dat $u \in W^{2m+t}(\mathbb{R}_+^n)$ met $0 \leq t < r$.

Differentieer weer $t+1$ keer na x_n in vergelyking (6) en kry:

$$(-1)^m \partial_n^{2m+t+1} u = \partial_n^{t+1} f - \partial_n^{t+1} Lg - \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ \alpha_n + \beta_n < 2m}} (-1)^{|\alpha|} \partial_n^{t+1} \partial^\alpha (b_{\alpha\beta} \partial^\beta u)$$

Uit voormelde gegewens volg weer direk dat die regterkant van die laaste vergelyking aan $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ behoort (bv. $\partial_n^{t+1} f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ met $t=r-1$ hoogstens want $f \in W^r(\mathbb{R}_+^n)$).

sodat

$$\partial_n^{2m+t+1} u \in L^2(\mathbb{R}_+^n), \quad 0 \leq t \leq r-1$$

oftewel $u \in W^{2m+r}(\mathbb{R}_+^n)$ $r \geq 0$, heel.

Volle regulariteit vir die funksionaalvergelyking is dus m.b.v. induksie bewys.

3.1 Regulariteit vir die hoër orde Dirichlet-probleem

Die voorgaande regulariteitstelling lei tot volle regulariteit vir die hoër orde Dirichlet-probleem soos volg:

Laat V soos volg gedefinieer wees:

$$V = \{v \in W^\infty(\mathbb{R}_+^n) \mid \partial_n^j v(x', 0) = 0, j=0, 1, \dots, m-1\}$$

Laat ook $s=0$, $T_k=0$, $k=1, \dots, m$, met

$$f \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \text{ en } g \in W^{2m}(\mathbb{R}_+^n).$$

Laat die bilineêre funksionaal b en operator L soos voorheen gedefinieer wees deur:

$$b(v, u) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (\partial^\alpha v, b_{\alpha\beta} \partial^\beta u), \quad u, v \in W^m(\mathbb{R}_+^n)$$

sien § 2.3 hoofstuk 2

$$\text{en } L = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (b_{\alpha\beta} \partial^\beta)$$

Dan is die probleem

$$u \in V^m, b(v, u) = (v, f) - b(v, g), \quad v \in V$$

ekwivalent aan:

$$Lw = f, \quad w = u + g \in W^2(\mathbb{R}_+^n)$$

$$\text{en} \quad \partial_n^j w = \partial_n^j g \quad \text{op} \quad \partial \mathbb{R}_+^n, \quad j=0, \dots, m-1.$$

Bewys:

$$u \in V^m, b(v, u) = (v, f) - b(v, g), \quad v \in V.$$

Aangesien vir $v \in V$ geld dat $\partial_n^j v = 0$ op $\partial \mathbb{R}_+^n$ vir $j=0, 1, \dots, m-1$ sal daar geen rand terme by faktorintegrasie ontstaan nie sō dat uit die funksionaalvergelyking volg dat:

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (v (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (b_{\alpha\beta} \partial^\beta u + b_{\alpha\beta} \partial^\beta g)) = (v, f), \quad v \in V$$

$$u \in W^{2m}(\mathbb{R}_+^n) \text{ regulariteit,}$$

$$g \in W^{2m}(\mathbb{R}_+^n)$$

oftewel

$$L(u+g) = f, \quad u \in W^{2m}(\mathbb{R}_+^n)$$

met L die operator soos voorheen gedefinieer.

$$\text{D.w.s.} \quad Lw = f \text{ met } w = u + g.$$

Ook is $u \in V^m$ (die afsluiting van V in W^m)

$$\text{d.w.s. } \partial_n^j u(x', 0) = 0, \quad j=0, 1, \dots, m-1$$

Die volgende randwaardes is dus van toepassing op die hoër orde Dirichlet-probleem:

$$\partial_n^j w = \partial_n^j g \quad \text{op } \partial R_+^n, \quad j=0, 1, \dots, m-1$$

3.2 Die hoër orde Neumann-probleem

Die regulariteitstelling 3 hoofstuk 4 lei tot volle regulariteit vir die hoër orde Neuman-probleem soos volg:

$$\text{Laat } V = W^\infty(R_+^n), \quad s=0, \quad T_k = \partial_n^{k-1}, \quad k=1, \dots, m, \quad f \in L^2(R_+^n), \\ g_k \in W^m(R^{n-1})$$

Dan is die probleem:

$$u \in V^m, \quad b(v, u) = (v, f) + \sum_{k=1}^m \langle T_k v, g_k \rangle, \quad v \in V$$

ekwivalent aan:

$$Lu = f, \quad u \in W^{2m}(R_+^n)$$

$$N_{2m-k} u = g_k \quad \text{op } \partial R_+^n$$

met lineêre differensiaaloperatore N_k , $k=1, \dots, 2m-1$, op ∂R_+^n sō dat Green se formule

$$b(v, w) = (v, Lw) + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \partial_n^j v, N_{2m-j-1} w \rangle$$

$$v, w \in C^\infty(R_+^n), \quad \text{geld.}$$

Bewys:

Die geldigheid van 'n Green se formule soos hierbo vermeld word aanvaar (sien Agmon [1] stelling 10.1 bl. 134).

$u \in V^m$ is 'n oplossing van die volgende funksionaalvergeliking:

$$b(v, u) = (v, f) + \sum_{k=1}^m \langle \partial_n^{k-1} v, g_k \rangle, \quad v \in V.$$

A.g.v. die Green-formule hierbo vermeld, kan dié funksionaalvergeliking geskryf word in die vorm:

$$\begin{aligned} (v, Lu) + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \partial_n^j v, N_{2m-j-1} u \rangle \\ = (v, f) + \sum_{k=1}^m \langle \partial_n^{k-1} v, g_k \rangle, \quad v \in V \end{aligned} \quad (7)$$

As v vir $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n) \subset V$ deurloop dan is

$$(\phi, Lu) = (\phi, f), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$$

D.w.s. $Lu = f, \quad u \in W^{2m}(\mathbb{R}_+^n).$

Deur $Lu = f$ in (7) te vervang volg vir elke $\phi \in \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)}$ dat

$$\sum_{j=1}^m \langle \partial_n^{j-1} \phi, N_{2m-j} u \rangle = \sum_{j=1}^m \langle \partial_n^{j-1} \phi, g_j \rangle$$

Oftewel:

$$\sum_{j=1}^m \langle \partial_n^{j-1} \phi, N_{2m-j} u - g_j \rangle = 0 \quad (8)$$

Neem enige vaste $1 \leq k \leq m$ en neem enige $\psi(x') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$.

Volgens Schechter [5] lemma 8-4 bl. 180 bestaan daar 'n $\phi(x', x_n) \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ s6 dat

$$\partial_n^{j-1} \phi(x', 0) = 0, \text{ vir } j=1, \dots, m; j \neq k$$

en
$$\partial_n^{k-1} \phi(x', 0) = \psi(x').$$

Uit vergelyking (8) volg dus dat

$$\langle \psi, N_{2m-k} u - g_k \rangle = 0 \text{ vir alle } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}), k=1, \dots, m.$$

Hieruit volg dan die randwaardes vir die hoër orde Neumann-probleem:

$$N_{2m-k} u = g_k \text{ op } \partial \mathbb{R}_+^n, k=1, \dots, m.$$

3.3 Opmerking

Die hoër orde Newton-probleem word nie hier behandel nie aangesien die skrywer reken dat, vir die doeleindes van dié verhandeling, die metodiek vir hantering van rand-funksionale s , duidelik genoeg geïllustreer word i.t.v.

die tweede orde Newton-probleem.

4. GEVOLGTREKKING

In dié verhandeling is daarin geslaag om op 'n funksionaal-analitiese wyse die regulariteit vir 'n sekere klas van elliptiese randwaarde-probleme aan te toon.

Dit het geblyk dat dié bewysmetode vir regulariteit, altans vir die betrokke klas van probleme, net so kragtig indien nie selfs ietwat 'eenvoudiger' as die metode van differensiaalkwasiënte (vergelyk bv. Lions, Magenes [2] hoofstuk 2 paragraaf 3) is nie.

Die laaste bewering moet egter steeds gekwalifiseer word in dié sin dat die skrywer van die verhandeling hom byvoorbeeld glad nie ingelaat het vir funksionale van die tipe

$$b(u,v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (b_{\alpha\beta} \partial^\alpha u, s_{\alpha\beta} \partial^\beta v)$$

nie.

Verdere navorsing in dié rigting kan dus baie nuttig blyk.

LITERATUURLYS

1. AGMON, S. : "Lectures on Elliptic Boundary Value Problems". Princeton: van Nostrand, 1965.
 2. LIONS, J.L.,
MAGENES, M. : "Non-homogeneous boundary value problems and applications". Vol I, Springer, 1972.
 3. RUDIN, W. : "Functional Analysis". McGraw-Hill, 1973.
 4. SCHAPPEL, R. : "Differentiability on the boundary of solutions of linear elliptic boundary value problems", Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 73A, 15, 1974/75, pp. 235-249.
 5. SCHECHTER, M. : "Modern methods in partial differential equations". McGraw-Hill, 1977.
 6. YOSIDA, K. : "Functional Analysis". Springer, 1974.
-

