

DE VILLIERS A

MEERVERANDERLIKE STATISTIESE KWALITEITSBEHEER

MWiskundige Statistiek      UP                      1991

***Meerveranderlike statistiese kwaliteitsbeheer***

deur

ANTON DE VILLIERS

Voorgelê ter vervulling van 'n deel van die vereistes  
vir die graad Magister in Wiskundige Statistiek in die  
Fakulteit Wis- en Natuurkunde,  
Universiteit van Pretoria,  
Pretoria.

Januarie 1991

## *Voorwoord*

'n Woord van dank word gerig aan:

Professor S.H.C. du Toit vir die bekwame wyse waarop hy as studieleier opgetree het.

## INHOUDSOPGAWE

|   |      |
|---|------|
| Hoofstuk 1 - Inleiding  | 1-1  |
| Hoofstuk 2 - Eenveranderlike kontrole tegnieke                                  | 2-1  |
| 2.1 Inleiding   | 2-1  |
| 2.2 Die $\bar{X}$ -kaart  | 2-1  |
| 2.3 Die $\bar{X}$ -kaart met veranderbare steekproefintervalle                  | 2-5  |
| 2.4 Die R-kaart   | 2-9  |
| 2.5 Die $S^2$ -kaart  | 2-11 |
| 2.6 Die Kumulatiewesom-kaart  | 2-12 |
| 2.7 Die P-kaart   | 2-19 |
| 2.8 Die nP-kaart  | 2-20 |
| 2.9 Samevatting   | 2-23 |
| Hoofstuk 3 - Meerveranderlike kontrole tegnieke                                 | 3-1  |
| 3.1 Inleiding   | 3-1  |
| 3.2 Die $T^2$ -kaart  | 3-1  |
| 3.3 Die Det(S)-kaart  | 3-10 |
| 3.4 Die Log S -kaart  | 3-13 |
| 3.5 Die S-kaart   | 3-15 |
| 3.6 Die Multinomiaal-gebaseerde attribuutkontole kaart                          | 3-17 |
| 3.7 Meerveranderlike kusum-prosedures   | 3-21 |
| 3.8 Samevatting   | 3-25 |
| Hoofstuk 4 - Simulasies met die veronderstelling dat die proses onder beheer is | 4-1  |
| 4.1 Inleiding   | 4-1  |
| 4.2 Uitleg van die simulasies   | 4-1  |
| 4.3 Kritieke waardes vir die verskillende groothede                             | 4-4  |
| 4.4 Resultate verkry uit die simulasiestudies                                   | 4-6  |
| 4.5 Gevolgtrekkings   | 4-19 |
| Hoofstuk 5 - Simulasiestudies onder variërende omstandighede                    | 5-1  |
| 5.1 Inleiding   | 5-1  |
| 5.2 Uitleg van die simulasies   | 5-1  |
| 5.3 Resultate verkry uit die simulasiestudies                                   | 5-3  |
| 5.4 Gevolgtrekkings   | 5-18 |

|   |      |
|---|------|
| Hoofstuk 6 - Afwykings vanaf normaliteit                      | 6-1  |
| 6.1 Inleiding   | 6-1  |
| 6.2 Uitleg van die simulاسies                                 | 6-1  |
| 6.3 Resultate van die simulاسiestudies                        | 6-3  |
| 6.4 Gevolgtrekkings   | 6-10 |
| Hoofstuk 7 - Gevolgtrekkings en voorstelle vir verdere studie | 7-1  |
| Samevatting   | 8-1  |
| Summary   | 8-2  |
| Literatuurverwysings  | 9-1  |
| Bylae A - Rekenaarprogram                                     | 10-1 |

# HOOFSTUK 1

## INLEIDING

Meerveranderlike statistiese kwaliteitsbeheer is 'n relatief nuwe gebied van navorsing ten einde die produsent in staat te kan stel om met behulp van nuwe benaderings produkte van beter kwaliteit aan die gebruiker te verskaf.

Effektiewe prosesbeheer reduceer skroot- en herwerkaksies en lei tot 'n verbeterde werkverrigting van die proses. Gewoonlik lei dit tot 'n besparing in koste, aangesien dit altyd meer ekonomies is om die produk die eerste keer reg te vervaardig.

Toenemend belangrik op die gebied van statistiese kwaliteitsbeheer is die gelyktydige beheer van twee of meer verwante veranderlikes wanneer die kwaliteit van die vervaardigde produk afhang van die gesamentlike *effek* van dié veranderlikes.

Gestel  $x$  en  $y$  is twee veranderlikes wat gemeet word by 'n proses waar ammunisie vervaardig word, en die volgende vraag word gestel:

*Is die proses onder statistiese beheer?*

Die algemeen bekende metode sal wees om 'n kontrolekaart vir karakteristieke  $x$  en  $y$  afsonderlik te konstrueer en dan 'n besluit te neem. Indien **een** of **beide** die veranderlikes buite beheer is volgens dié kontrolekaarte, word die besluit geneem dat die **proses** buite statistiese beheer is.

Indien twee of meer veranderlikes gelyktydig beheer moet word, moet die kontrolegebied, of verwantskap wat tussen die veranderlikes onder beskouing kan ontstaan, in ag geneem word.

Die gebruik van **afsonderlike** kontrolekaarte verhoog die kans om verkeerdelik te bevind dat die proses buite beheer is, indien die proses in werklikheid wel onder statistiese beheer is. Hierdie fout staan bekend as die *Tipe I-fout* en word deur die simbool  $\alpha$  aangedui. Die omgekeerde fout kan ook gemaak word. Dit is om te aanvaar dat die proses binne beheer is, indien die proses in werklikheid buite beheer is. Laasgenoemde fout staan bekend as die *Tipe II-fout* en word deur die simbool  $\beta$  aangedui.

Indien 95% kontrolelimiete op 'n enkele kaart toegepas word en die proses presies volgens standaard is, sal op die lange duur 5% van die gestipte punte op die kaart buite die kontrolelimiete lê en 95% van die gestipte punte binne die kontrolelimiete. Indien twee kontrolekaarte vir die veranderlikes, sê  $x$  en  $y$ , afsonderlik gekonstrueer word, is die waarskynlikheid dat beide kaarte 'n aanduiding gee dat die proses binne beheer is, gegee die proses is onder statistiese beheer, nog steeds 95%. Die waarskynlikheid dat **beide** egter op **dieselfde** tyd binne kontrole is, is  $(0.95)(0.95)=0.9025$ . Die *Tipe I-fout* is dus ongeveer 10%.

Die werklike kontrolegebied is 'n twee-dimensionele ruimte (ellips) en nie 'n vierkant of 'n reghoek nie. Die situasie is meer kompleks wanneer die veranderlikes gekorreleerd is. In so 'n geval is die kontrolegebied nog steeds 'n ellips maar wat geroteer is, om die korrelasie wat tussen die veranderlikes kan ontstaan in ag te neem.

Deur gebruik te maak van afsonderlike kontrolekaarte sal die "fout" vergroot soos wat  $p$ , die getal veranderlikes, toeneem. Indien afsonderlike kontrolekaarte op elk van die  $p$  veranderlikes toegepas word, is die gesamentlike waarskynlikheid dat al  $p$  die veranderlikes gelyktydig binne beheer is, gelyk aan  $(1 - \alpha)^p$ . Die waarskynlikheid vir 'n Tipe I-fout vir die gesamentlike kontroleprosedure is dan  $P(\text{Tipe I-fout}) = 1 - (1 - \alpha)^p$ . (Indien die verskillende kwaliteitskarakteristieke nie statisties onafhanklik is nie, is bostaande vergelykings vir die berekening van die Tipe I-fout nie 'n goeie benadering nie. [Montgomery en Wadsworth, 1972])

Die doel van hierdie studie is om ondersoek in te stel na die gebruik van meerveranderlike kontrolekaarte, asook hoe dié kaarte presteer onder normale, sowel as variërende omstandighede. Vergelykings word ook getref tussen een- en meerveranderlike kontrolekaarte.

In Hoofstuk 2 word 'n oorsig gegee van bekende eenveranderlike kontrolekaarte waar afsonderlike kontrolekaarte vir elke parameter gebruik word. Dié eenveranderlike benaderings is meestal maklik en is oor die jare sonder moeite in die praktyk gebruik.

Meerveranderlike kontrolekaarte, wat as uitbreidings van die bekende eenveranderlike kontrolekaarte bekend staan, word in Hoofstuk 3 bespreek. Indien meer as een veranderlike gelyktydig beheer moet word, word 'n enkele stel kontrolelimiete gebruik om uitsluitel te gee oor die gedrag van die proses. Indien die proses meerveranderlik buite beheer is, word meervoudige vergelykingsprosedures gebruik om die *moontlike oorsaak* te identifiseer.

Met behulp van simulاسies word die gedrag van die een- en meerveranderlike benaderings vir die beheer van die proses gemiddeld en prosesverspreiding in Hoofstuk 4 ondersoek, wanneer veronderstel word dat die proses presies volgens standaard funksioneer. Vergelykings tussen die een- en meerveranderlike benaderings word getref om te kyk hoeveel keer die proses indirek onnodig gestop moes word. Verdere vergelykings word ook getref tussen verskillende meerveranderlike benaderings vir die beheer van die prosesverspreiding.

In Hoofstuk 5 word die robuustheid van die verskillende benaderings ondersoek wanneer veronderstel word dat 'n proses produkte onder variërende omstandighede produseer. Dit is wanneer 'n verskuiwing in die proses gemiddeld plaasvind, òf in die variansies, òf 'n verandering in die kovariansiestruktuur.

Die robuustheid van die verskillende benaderings vir afwykings van normaliteit word in Hoofstuk 6 ondersoek. Vir dié doel is data uit twee ander verdelings, die reghoekige en die eksponensiaal-verdeling gegenereer.

In Hoofstuk 7 word die vernaamste bevindings gegee en moontlike onderwerpe vir verdere studie voorgestel.

## HOOFSTUK 2

### EENVERANDERLIKE KONTROLETEGNIKE

#### 2.1 INLEIDING

In hierdie hoofstuk word 'n kort oorsig van eenveranderlike kontrole tegnieke gegee. Die  $\bar{X}$ -kaart word in Afdeling 2.2 behandel, terwyl die  $\bar{X}$ -kaart met veranderbare steekproefintervalle in Afdeling 2.3 behandel word. In Afdelings 2.4 en 2.5 word die R-kaart en  $S^2$ -kaart wat gebruik word om te bepaal of die prosesverspreiding onder statistiese beheer is, behandel. In Afdeling 2.6 word die Kumulatiewesom-kaart behandel vir die gebruik om opwaartse sowel as afwaartse tendense in 'n prosesveranderlike te verklaar, terwyl die P en die nP-kaart in Afdeling 2.7 en 2.8 behandel word.

#### 2.2 DIE $\bar{X}$ -KAART

Die  $\bar{X}$ -kaart word volgens Duncan, [Duncan, 1974] gebruik om 'n verandering in 'n prosesgemiddeld te ondersoek. Gestel  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$  en  $R_1, \dots, R_m$  stel die gemiddeldes en reikwydtes van  $m$  steekproewe van grootte  $n$  elk voor, sodanig dat :

- items in elk van die  $m$  steekproewe na aan mekaar (in tyd) getrek moet word
- voldoende tydsduur tussen die trekking van twee opeenvolgende steekproewe moet verloop om oorvleueling van items te vermy
- steekproefgroottes  $n$ , moet konstant bly,  $2 \leq n \leq 12$  en
- die aantal steekproewe,  $m > 20$ .

Nadat die gemiddeldes en reikwydtes vir elk van die  $m$  steekproewe bepaal is, word die prosesgemiddeld  $\bar{\bar{X}}$  en  $\bar{R}$  bereken :

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \quad \text{en} \quad \bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i \quad (2.1)$$

met  $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m$

en  $R_i =$  (Maksimum waarde - minimum waarde) van die  $i^{\text{de}}$  steekproef en  $S_0 = \bar{R}/D_2$ , die prosesvermoë.

Die prosesvermoë is die vermoë wat die proses oor beskik om items binne die neergelegde spesifikasie-limiete te lewer. Die waarde  $D_2$ , is 'n tabelwaarde en is in Tabel 2.1, kolom 4 vervat.

$\bar{X}$  is dan ook die sentrale lyn op die kontrolekaart.

**Berekening van die kontrolelimiete [Du Toit, 1986]:**

**Waarskuwingslimiete :**

$$BLW : \bar{X} + 1.96S_0\sqrt{n}$$

$$OLW : \bar{X} - 1.96S_0\sqrt{n}$$

(2.2)

**Aksielimiete :**

$$BLA : \bar{X} + 3.09S_0\sqrt{n} \quad \text{of} \quad \bar{X} + A_2\bar{R}$$

$$OLA : \bar{X} - 3.09S_0\sqrt{n} \quad \text{of} \quad \bar{X} - A_2\bar{R} \quad (2.3)$$

met tabelwaardes vir  $A_2$  in Tabel 2.1, kolom 2. Daar sal in Afdeling 2.4 verwys word na die  $D_3$  en  $D_4$  waardes wat ook in Tabel 2.1 vervat is.

**TABEL 2.1 :**  $A_2, D_2, D_3$  en  $D_4$  waardes verkry uit [Grant en Leavenworth, 1980]

| n  | $A_2$ | $D_4$ | $D_3$ | $D_2$ |
|----|-------|-------|-------|-------|
| 2  | 1.880 | 3.267 | 0     | 1.13  |
| 3  | 1.023 | 2.575 | 0     | 1.69  |
| 4  | 0.729 | 2.282 | 0     | 2.06  |
| 5  | 0.577 | 2.115 | 0     | 2.33  |
| 6  | 0.483 | 2.004 | 0     | 2.53  |
| 7  | 0.419 | 1.924 | 0.076 | 2.70  |
| 8  | 0.373 | 1.864 | 0.136 | 2.85  |
| 9  | 0.337 | 1.816 | 0.184 | 2.97  |
| 10 | 0.308 | 1.777 | 0.223 | 3.08  |

Nadat die kontrolelimiete bereken is, word  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$  en die limiete gestip.

**VOORBEELD 2.1 :**

By 'n fabriek wat 'n sekere elektroniese komponent vir 'n radio vervaardig, word telkens 'n steekproef van  $n = 5$  komponente geneem. Die metings in mm vir 22 steekproewe is as volg :

**TABEL 2.2 :** Data vir voorbeeld 2.1

| Subgroep | Metings x (mm) |      |      |      |      | $\bar{x}_i$ | $R_i$ |
|----------|----------------|------|------|------|------|-------------|-------|
| 1        | 14.0           | 12.6 | 13.2 | 13.1 | 12.1 | 13.0        | 1.9   |
| 2        | 13.3           | 12.8 | 13.0 | 12.3 | 12.2 | 12.7        | 1.2   |
| 3        | 13.2           | 13.3 | 12.7 | 13.4 | 12.1 | 12.9        | 1.3   |
| 4        | 13.9           | 12.4 | 13.3 | 13.1 | 13.2 | 13.2        | 1.5   |
| 5        | 13.0           | 13.0 | 12.1 | 12.2 | 13.3 | 12.7        | 1.2   |
| 6        | 13.7           | 12.0 | 12.5 | 12.4 | 12.4 | 12.6        | 1.7   |
| 7        | 14.1           | 15.2 | 13.7 | 13.4 | 14.6 | 14.2        | 1.8   |
| 8        | 13.4           | 13.6 | 13.0 | 12.4 | 13.5 | 13.2        | 1.2   |
| 9        | 14.4           | 12.4 | 12.2 | 12.4 | 12.5 | 12.8        | 2.2   |
| 10       | 13.3           | 12.4 | 12.6 | 12.9 | 12.8 | 12.8        | 0.9   |
| 11       | 13.3           | 12.8 | 13.0 | 13.0 | 13.1 | 13.0        | 0.5   |
| 12       | 14.0           | 14.8 | 14.9 | 15.1 | 16.2 | 15.0        | 2.2   |
| 13       | 13.4           | 13.3 | 12.0 | 13.0 | 13.1 | 12.9        | 1.4   |
| 14       | 13.9           | 13.1 | 13.5 | 12.6 | 12.8 | 13.2        | 1.3   |
| 15       | 14.2           | 12.7 | 12.9 | 12.9 | 12.5 | 13.0        | 1.7   |
| 16       | 12.1           | 12.4 | 11.9 | 12.0 | 12.3 | 12.1        | 0.5   |
| 17       | 14.0           | 13.2 | 12.4 | 13.0 | 13.0 | 13.1        | 1.6   |
| 18       | 13.1           | 12.9 | 13.5 | 12.3 | 12.8 | 12.9        | 1.2   |
| 19       | 14.6           | 13.7 | 13.4 | 12.2 | 12.5 | 13.3        | 2.4   |
| 20       | 13.9           | 13.0 | 13.2 | 12.6 | 12.9 | 13.1        | 1.3   |
| 21       | 13.2           | 12.3 | 12.6 | 13.1 | 12.7 | 12.8        | 0.9   |
| 22       | 14.1           | 14.2 | 14.0 | 14.3 | 14.2 | 14.2        | 0.3   |

**Kontrolelimiete :**

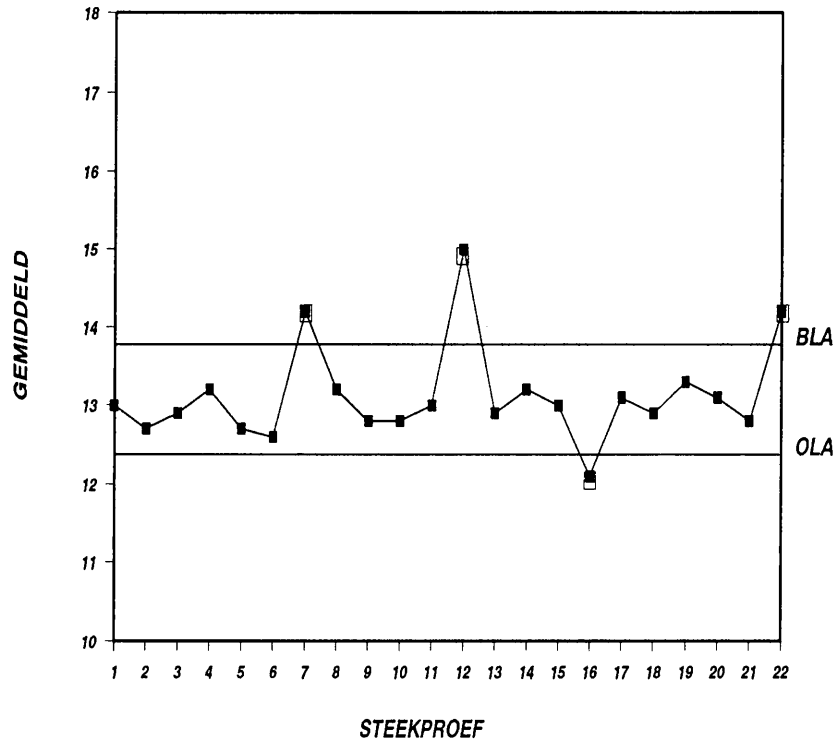
$$BLA : \bar{X} + A_2\bar{R} = 13.1 + 0.577(1.37) = 13.89$$

$$OLA : \bar{X} - A_2\bar{R} = 13.1 - 0.577(1.37) = 12.31$$

$$BLW : \bar{X} + 1.96S_0\sqrt{n} = 13.1 + 1.96(0.587)/2.23 = 13.61$$

$$OLW : \bar{X} - 1.96S_0\sqrt{n} = 13.1 - 1.96(0.587)/2.23 = 12.58$$

Die verkree  $\bar{X}$ -kaart word grafies in Figuur 2.1 voorgestel.



**Figuur 2.1** : Die  $\bar{X}$ -kaart vir voorbeeld 2.1

Uit Figuur 2.1 kan gesien word dat steekproewe 7,12,16 en 22 buite die kontrolegrense val en dus buite statistiese beheer is.

Indien kontrolekaarte vir 'n eerste keer geïmplementeer word m.b.v. steekproefinligting en gevind word dat die proses buite beheer is, word dié buite beheer steekproewe buite berekening gelaat in die herberekening van nuwe kontrolelimiete.

## 2.3 DIE $\bar{X}$ -KAART MET VERANDERBARE STEEKPROEFINTERVALLE : VSI-KAART

Veronderstel dat die tye tussen steekproewe nie vas is nie, maar kan varieer na aanleiding van 'n vorige steekproef se resultaat [Renolds en Amin, 1988]. Indien die  $\bar{x}$ -waarde van 'n steekproef naby die gespesifiseerde waarde, sê  $\mu_0$  is, sal die eersvolgende steekproefinterval 'n relatief *lang* interval wees. (Die punt  $\bar{x}$  moet natuurlik onder statistiese beheer wees.) As die waargenome waarde  $\bar{x}$ , buite die kontrolelimiete lê, sal die eersvolgende steekproefinterval *korter* wees, omdat die proses buite statistiese beheer is.

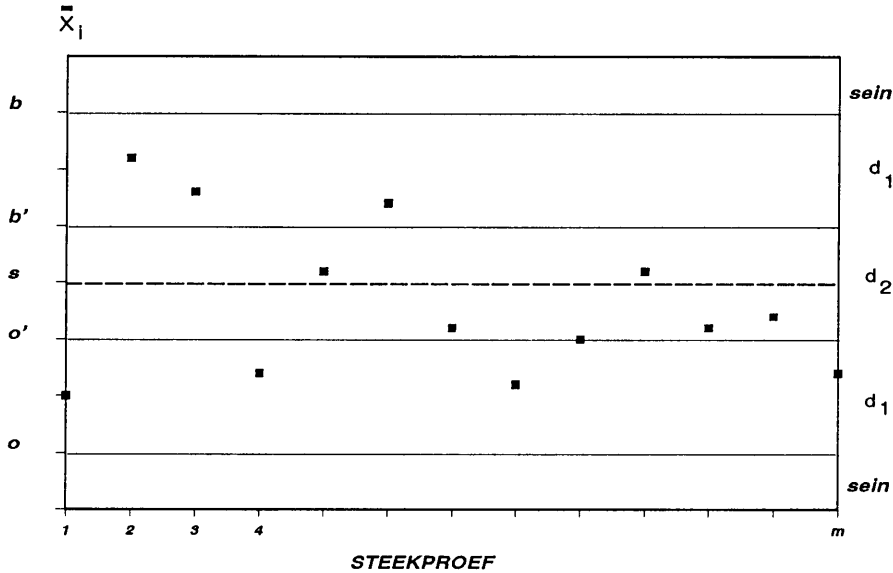
### BESKRYWING VAN DIE VSI-KAART

Beskou die situasie waar die waarnemings afkomstig is uit 'n normaalverdeling met gemiddelde  $\mu$  en bekende variansie  $\sigma^2$ . Gestel dat  $\mu_0$  die teikenwaarde is vir die gemiddelde van die proses waarna gestrewe word. Ewekansige steekproewe van groottes  $n$  word geneem met  $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$  wat 'n steekproefvoorstel by die  $i$ -de punt. Die steekproefgemiddelde  $\bar{X}_i$  word bereken vir elk van die steekproewe en dan gestip op 'n kontrolekaart met sentrale lyn  $\mu_0$  en kontrolelimiete  $\mu_0 \pm \gamma\sigma/\sqrt{n}$ , met  $\gamma$  gewoonlik gelyk gestel aan 3 wat ooreenkom met die waarde vir die aksie-limiete in Afdeling 2.2. Indien  $\bar{X}_i$  buite die kontrolelimiete lê word 'n sein gegee.

In die praktyk sal dit nodig wees om  $\mu_0$  en  $\sigma^2$  te beraam uit vorige data. Die voorgestelde VSI-KAART kan saam met beraamde waardes van  $\mu_0$  en  $\sigma^2$  gebruik word, al sal die resulterende kaart ietwat verskil van die geval waar  $\mu_0$  en  $\sigma^2$  bekend is.

Vir die VSI-KAART, sal die lengtes van die intervalle tussen die steekproewe  $X_i$  en  $X_{i+1}$  afhang van die waarde van  $\bar{X}_i$ . Veronderstel die VSI-KAART gebruik 'n eindige aantal intervallengtes naamlik  $d_1, \dots, d_t$  met  $d_1 < \dots < d_t$ . Hierdie moontlike intervallengtes moet so gekies word dat  $l_1 \leq d_i \leq l_2$  met  $i = 1, \dots, t$ . Die minimum moontlike intervallengte,  $l_1 > 0$ , word bepaal deur fisiese oorwegings soos byvoorbeeld tyd wat nodig is om die steekproef te trek. Die maksimum intervallengte  $l_2 > 0$ , word bepaal deur die toelaatbare tydsverloop wat die proses sonder inspeksie kan verloop. Kundigheid van kenners oor die proses, word in so 'n geval gebruik.

Die keuse van 'n steekproefinterval as 'n funksie van  $\bar{X}_i$ , kan voorgestel word deur die funksie  $d(x)$ , wat die steekproefinterval spesifiseer wat gebruik moet word wanneer  $\bar{X}_i = x$  waargeneem is. Gestel die interval  $(\mu_0 \pm \gamma\sigma/\sqrt{n})$  word ingedeel in  $t$  gebiede,  $I_1, \dots, I_t$  sodanig dat  $d(x) = d_j, x \in I_j$ . Die steekproefinterval wat gebruik word tussen  $X_i$  en  $X_{i+1}$  is dan  $d(\bar{X}_i)$ .



**Figuur 2.2 : Die VSI-kaart**

waarby,  $b = \mu_0 + \gamma\sigma/\sqrt{n}$

$$b' = \mu_0 + \gamma'\sigma/\sqrt{n}$$

$s = \mu_0$ , die sentrale lyn

$$o' = \mu_0 - \gamma'\sigma/\sqrt{n} \text{ en}$$

$$o = \mu_0 - \gamma\sigma/\sqrt{n}$$

Figuur 2.2 het twee intervallengtes,  $d_1$  en  $d_2$  met :

$$I_1 = \{ \mu_0 - \gamma(\sigma/\sqrt{n}), \mu_0 - \gamma'(\sigma/\sqrt{n}) \} \cup \{ \mu_0 + \gamma'(\sigma/\sqrt{n}), \mu_0 + \gamma(\sigma/\sqrt{n}) \}$$

en

$$I_2 = (\mu_0 - \gamma'(\sigma/\sqrt{n}), \mu_0 + \gamma'(\sigma/\sqrt{n})), \text{ waar } \gamma' < \gamma.$$

Gestel vir Figuur 2.2 is  $\gamma = 3$  en  $\gamma' = 1$ . Wanneer  $\mu = \mu_0$ ,  $P(\bar{X} \in I_1) = 0.3146$  en  $P(\bar{X} \in I_2) = 0.6827$ , sal die langer tyds-interval ongeveer twee keer soveel gebruik word as die korter een. Gestel daar het 'n verskuiwing in die prosesgemiddeld plaasgevind, sodanig dat  $\mu_1 = \mu_0 + 2\sigma/\sqrt{n}$ . Nou is  $P(X \in I_1) = 0.684$  en  $P(X \in I_2) = 0.1573$ . Omdat die korter interval meer gebruik word as gevolg van die verskuiwing in  $\mu$ , sal daar meer steekproewe getrek word, en die tyd wat benodig word om 'n steekproefgemiddelde op te spoor wat buite die kontrolelimiete lê, sal verminder.

In Figuur 2.2 word die steekproefgemiddeldes teenoor elke steekproef gestip. In die praktiese toepassing van die kaart sal dit nodig gevind word om op die kaart die aantal kere te noteer wat steekproewe geneem word, aangesien die kontroleinterval tussen die punte op die grafiek 'n weerspieëling is van die feit dat die werklike tydintervalle tussen steekproewe nie dieselfde is nie. Indien die punte gestip word, is die interval tussen steekproef 1 en steekproef 2  $d_2$ , terwyl die interval tussen steekproewe 2 en 3,  $d_1$  is.

'n Alternatiewe manier om 'n kaart te konstrueer is om die steekproefgemiddeldes op 'n horisontale as te stip teenoor tyd. Dan sal die intervalle tussen punte op die kaart varieer ten opsigte van die werklike tydintervalle tussen steekproewe. Die alternatiewe metode is relatief maklik uitvoerbaar met die hand, as  $d_2 = cd_1$ , waar  $c$  'n klein positiewe heelgetal is. Indien  $d_2$  aansienlik groter is as  $d_1$ , sal blanko spasies voorkom in die geval waar  $d_2$  gebruik word.

## EIENSKAPPE VAN DIE VSI-KAART

Die eienskap van 'n kontrolekaart word bepaal deur die tydsduur wat die kaart neem om 'n sein weer te gee. Indien die proses onder statistiese beheer is, sal die tyd lank wees tot 'n sein voorkom en die foute sal min wees. As daar 'n verskuiwing in die prosesgemiddeld plaasgevind het, sal die tyd tot 'n sein kort wees en die frekwensies van foute sal toeneem.

Die aantal steekproewe wat geneem word voordat 'n sein gegee word, is gewoonlik die lopies-lengte. Die verwagte aantal steekproewe is dan die gemiddelde lopies-lengte (GLL). In die geval van 'n vaste intervallengte tussen steekproewe, kan GLL maklik omgeskakel word na die verwagte tyd tot 'n sein voorkom, deur dit te vermenigvuldig met die vaste intervallengte [Reynolds en Amin, 1988]. Die GLL kan dan uitgedruk word as die verwagte tyd tot 'n sein. Die tempo van steekproefneming sal konstant wees, ongeag die waarde van  $\mu$ .

In die geval van die VSI-KAART, sal die tyd tot 'n sein nie 'n konstante veelvoud wees van die aantal steekproewe tot 'n sein nie. Die tempo van steekproefneming is afhanklik van die waarde van  $\mu$ . Gevolglik is dit vir die VSI-KAART nodig om beide die aantal steekproewe tot 'n sein en die tyd tot 'n sein te noteer.

Definieer die aantal steekproewe tot 'n sein as die aantal steekproewe wat geneem word vanaf die begin van die proses totdat die kaart 'n sein gee. Die gemiddelde aantal steekproewe tot 'n sein (GASS), is dan die verwagte waarde van die aantal steekproewe tot 'n sein. Definieer die tyd tot 'n sein as die tyd vanaf die begin van die proses tot die tyd wat die kaart 'n sein gee, en net so die gemiddelde tyd tot 'n sein (GTS). Beide GASS en GTS is funksies van die prosesgemiddeld  $\mu$ .

Wanneer  $\mu = \mu_0$  sal GTS 'n groot waarde hê en wanneer  $\mu$  skuif vanaf  $\mu_0$ , sal GTS kleiner word. Om groot steekproefkoste te vermy moet GASS nie uitermatig groot wees in vergelyking met GTS nie, veral wanneer  $\mu = \mu_0$ , aangesien daar veronderstel word dat die proses die meeste van die tyd as  $\mu = \mu_0$  "werkzaam" sal wees.

Solank as wat die kontrolelimiete vas is, sal die VSI-KAART geen effek hê op die waarskynlikheid dat  $\bar{X}$  buite die kontrolelimiete lê nie. Die waarskynlikheid dat  $\bar{X}$  buite die kontrolelimiete lê word gegee deur  $q = P(\bar{X} \leq \mu_0 - \gamma\sigma/\sqrt{n} \text{ of } \bar{X} \geq \mu_0 + \gamma\sigma/\sqrt{n})$ , ongeag die interval tussen die steekproewe. Gestel  $N$  = aantal steekproewe tot 'n sein. Dan sal  $N$  die meetkundige verdeling besit met parameter  $q$  wanneer die proses nie verander nie. Gevolglik is (GASS),  $E(N) = 1/q$  en die variansie van  $N$ ,  $Var(N) = (1 - q)/q^2$ .

Laat  $T$  = tyd tot 'n sein en

$R_i$  = steekproefinterval wat gebruik word voor die  $i$ -de steekproef.

Dan is  $T = \sum_{i=1}^N R_i$ .

Die verdeling van die  $R_i$ 's wat gebruik word, besit die voorwaardelike verdeling van  $d(\bar{X})$  gegee geen sein is weergegee nie, omdat  $d(\bar{X})$  net gedefinieer is vir waardes van  $\bar{X}$  wat onder beheer is. Vir vereenvoudiging word veronderstel dat die kaart begin op tyd 0 en dat  $R_1$  die interval is wat gebruik word voor die eerste steekproef bepaal word, volgens 'n ewekansige interval met dieselfde verdeling as die ander  $R_i$ 's, al word geen steekproef geneem op tyd 0 nie.

Indien die prosesgemiddeld konstant is, is  $R_1, R_2, \dots$  onderling onafhanklik identies verdeel.

Met behulp van die Wald-identiteit kan GTS geskryf word as  $E(T) = E(N)E(R_i)$ .

As  $p_j = P(d(\bar{X}) = d_j) = P(\bar{X} \in I_j)$ , dan is

$E(R_i) = \sum_{j=1}^i d_j \frac{p_j}{1-q}$  met voorwaardelike waarskynlikheid op geen sein omdat

$$\sum_{i=1}^i p_i = 1 - q < 1.$$

Dan is

$$E(T) = \sum_{j=1}^i \frac{d_j p_j}{q(1-q)} \quad (GTS)$$

Die variansie van  $T$  kan uitgedruk word [Reynolds en Amin, 1988] as :

$$\begin{aligned} \text{var}(T) &= E(N)\text{var}(R_i) + \text{var}(N)\{E(R_i)\}^2 \\ &= \frac{\sum_{j=1}^i d_j^2 p_j}{q(1-q)} + \frac{(1-2q)\left(\sum_{j=1}^i d_j p_j\right)^2}{q^2(1-q)^2} \end{aligned}$$

Die waarskynlikhede  $q$  en  $p_j$  is afhanklik van  $\mu$  se waarde.

## GEVOLGTREKKING

Die VSI-kenmerk van die  $\bar{X}$ -kaart kan die tyd wat nodig is om klein verskuiwings in die proses op te spoor, aansienlik verminder. Met die kaart soos opgestel in Figuur 2.2, is dit maklik vir die gebruiker om die wagtyd tot die volgende steekproef te bepaal deur net te kyk na die posisie van die vorige waarneming op die kaart.

'n Nadeel van die kaart is die koste en moeite om die kaart te onderhou. Die steekproefintervalle wat voorgeskryf word deur die kaart, mag nie ooreenstem met die natuurlike periodes in die proses soos bv. skofte van personeel nie.

## 2.4 DIE R-KAART

Na aanleiding van die  $\bar{X}$ -kaart vir die beheer van steekproewe se gemiddeldes, word 'n verdere kaart benodig wat sal bepaal of die verspreiding in elke steekproef nie buite beheer is nie. Dieselfde vereistes wat vir die  $\bar{X}$ -kaart van toepassing is, is ook vir die R-kaart van toepassing [Bezuidenhout, 1984].

**Berekening van die kontrolelimiete :**

$$SL : \bar{R}$$

$$BKL : D_4\bar{R}$$

$$OKL : D_3\bar{R}$$

(2.4)

$\bar{R}$  is dan die sentrale lyn en waardes vir  $D_3$  en  $D_4$  in Tabel 2.1.

Nadat die kontrolelimiete bereken is, word dit tesame met die punte  $\bar{R}$  en  $R_1, \dots, R_m$  gestip. 'n Punt buite die limiete sal aandui dat die proses buite beheer is.

**VOORBEELD 2.2**

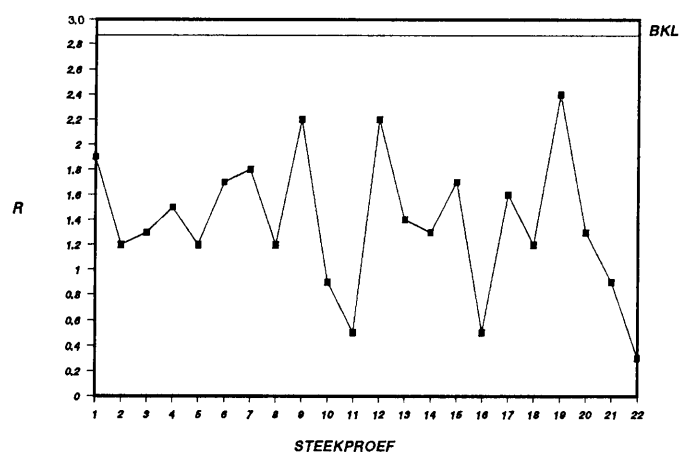
Sien Voorbeeld 2.1 vir die data en Tabel 2.1 vir die tabelwaardes vir die berekening van die kontrolelimiete vir die R-kaart.

**Kontrolelimiete :**

$$BKL : D_4\bar{R} = 2.115(1.37) = 2.89$$

$$OKL : D_3\bar{R} = 0(1.37) = 0$$

Die R-kaart word grafies voorgestel in Figuur 2.3. Uit hierdie figuur blyk dit dat alle punte onder die boonste kontrolelimiet val en die prosesvariasie gevolglik onder statistiese beheer is.



**Figuur 2.3 :** Die R-kaart vir voorbeeld 2.2

## 2.5 DIE S<sup>2</sup>-KAART

Die S<sup>2</sup>-kaart word gebruik om te bepaal of die prosesverspreiding op 'n gegewe tyd onder statistiese beheer is [Duncan, 1974]. Die kaart word gewoonlik vir groot steekproewe gebruik. Beskou die stogastiese veranderlike  $X$  met gemiddelde  $\mu_0$  en standaardafwyking  $\sigma_0$ .

Wanneer 'n proses normaal verdeel is, is dit bekend dat

$(n-1)S^2/\sigma_0^2 \sim \chi_{n-1}^2$ , waaruit volg dat

$$P\left\{\frac{\sigma_0^2 \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}{n-1} \leq S^2 \leq \frac{\sigma_0^2 \chi_{n-1, \alpha/2}^2}{n-1}\right\} = 1 - \alpha$$

**Kontrolelimiete** [Alt en Bedewi, 1986]:

$$OKL = \sigma_0^2 \frac{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}{(n-1)}$$

$$BKL = \sigma_0^2 \frac{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}{n-1}$$

(2.5)

Gewoonlik word daar net van die boonste kontrolelimiet gebruik gemaak en dan word  $\chi_{n-1, \alpha/2}^2$  vervang deur  $\chi_{n-1, \alpha}^2$ .

Toetsing of die proses onder statistiese beheer is, kan ook voorgestel word deur die hipotese

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

(2.6)

[Alt en Bedewi, 1986] stel 'n verdere kaart voor wat gebruik word om die prosesverspreiding te monitor wat nie ten volle gebruik maak van die verdeling van die steekproefstatistiek nie, maar eerder van die eerste twee momente.

Stel  $r$  is 'n positiewe heelgetal. Omdat  $(n-1)S^2/\sigma_0^2 \sim \chi_{n-1}^2$  verdeel is, volg dit dat

$$E(S^r) = \sigma_0^2 \left\{ \frac{2}{n-1} \right\}^{r/2} \frac{\Gamma((n+r-1)/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$$

Vir  $r=1$ , is  $E(S) = \sigma_0 \left\{ \frac{2}{n-1} \right\}^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} = \sigma_0 c_4$ , en vir  $r=2$ , is  $E(S^2) = \sigma_0^2$ .

Dus is  $var(s) = \sigma_0^2(1 - c_4^2)$ .

**Kontrolelimiete** [Alt en Bedewi, 1986]:

$$SL = \sigma_0 c_4$$

$$OKL = \sigma_0 \{c_4 - 3(1 - c_4^2)^{1/2}\}$$

$$BKL = \sigma_0 \{c_4 + 3(1 - c_4^2)^{1/2}\}$$

(2.7)

Tabelwaardes vir  $c_4$  is in [Duncan, 1974] beskikbaar.

Indien daar met 'n skewe verdeling gewerk word, word aanbeveel dat die eerste metode met kontrolelimiete soos (2.5) gebruik word.

Kontrolelimiete, tesame met die kaart, kan op soortgelyke wyse as die  $\bar{X}$ - en  $R$ -kaart opgestel word.

## 2.6 DIE KUMULATIEWESOM-KAART

Die Kusom-kaart [Butler, 1983] monitor 'n prosesveranderlike en verklaar opwaartse sowel as afwaartse tendense daarin. Die Kusom-kaart is bruikbaar vir klein steekproewe byvoorbeeld vir  $n=1$ , waar 'n item tydens produksie op 'n sekere tyd getrek word en 'n besluit geneem moet word of die proses nog onder statistiese beheer is.

Gestel dat ons vir 'n sekere proses die stogastiese veranderlike  $X$ , waarvoor  $\sigma$  bekend is, wil beheer, sodanig dat die prosesgemiddelde  $\mu_1$  is. Indien daar met vasgestelde tussenposes telkens 'n waarneming van  $X$  gemaak word, wat aangedui word deur  $X_1, X_2, X_3, \dots$ , dan sal die gestandaardiseerde waarde  $\frac{(X_i - \mu_1)}{\sigma}$  se verwagtingswaarde nul wees solank die prosesgemiddelde  $\mu_1$  is. Die kumulatiewe som van die eerste  $m$  gestandaardiseerde waardes word aangedui deur

$$K_m = \sum_{i=1}^m \frac{(X_i - \mu_1)}{\sigma}.$$

Solank die prosesgemiddeld  $\mu_1$  is, sal die kumulatiewe som  $K_m$  naby nul wees, met ander woorde die proses is onder statistiese beheer. 'n Verandering in die prosesgemiddelde word gekwantifiseer volgens die helling van die Kusom-grafiek.

Gestel egter dat die prosesgemiddeld 'n verskuiwing ondergaan het na  $\mu_2 = \mu_1 + c$ , met  $c = \delta\sigma$ . Indien  $\delta > 0$  is daar 'n opwaartse verskuiwing in  $\mu$ , en indien  $\delta < 0$  het daar 'n afwaartse verskuiwing plaasgevind.

By die waarneming ná die verskuiwing, sal die  $m + 1^{\text{de}}$  waarneming nou wees :

$$K_{m+1} = K_m + \frac{(X_{m+1} - \mu_1)}{\sigma}.$$

Die verwagtingswaarde van  $K_{m+1}$  is dan :

$$\begin{aligned} E(K_{m+1}) &= E(K_m) + E\left(\frac{X_{m+1} - \mu_1}{\sigma}\right) \\ &= 0 + \frac{(\mu_1 + \delta\sigma - \mu_1)}{\sigma} \\ &= \delta \end{aligned}$$

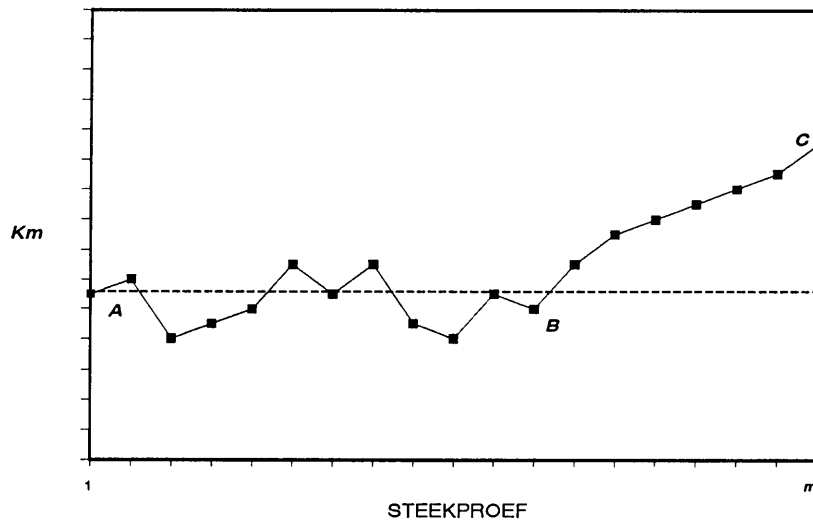
Net so is, na die  $m + 2^{\text{de}}$  waarneming :

$$\begin{aligned} E(K_{m+2}) &= 2\delta \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ E(K_{m+p}) &= p\delta \end{aligned}$$

As  $K_m$  grafies voorgestel word teen  $m$ , sal die grafiek naby aan nul bly solank die prosesgemiddelde  $\mu_1$  is, maar sodra die prosesgemiddelde verskuif, sal die grafiek styg of daal, afhangende van die teken van  $\delta$ .

Dit is belangrik om daarop te let dat by elke punt op die grafiek,  $K_m$  die informasie van alle vorige waarnemings tot en met die laaste waarneming insluit. Nadat die punte  $K_1, \dots, K_m$  gestip word, moet daar 'n stel kontrolelyne gekonstrueer word.

In Figuur 2.4 word 'n aantal fiktiewe waardes van  $K_m$  getoon. Vanaf A na B wil dit voorkom of die prosesgemiddeld wel  $\mu_1$  kan wees, maar vanaf B na C suggereer die grafiek dat daar 'n positiewe verskuiwing in die prosesgemiddeld kan wees.



Figuur 2.4 : Grafiek van die kumulatiewe som  $K_m = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)$

### 'n SEKWENSIELE WAARSKYNLIKHEIDSVERHOUDINGTOETS [Duncan, 1974]

Beskou die punte in Figuur 2.4 in omgekeerde vorm. As die laaste punt op die grafiek die  $m^{\text{de}}$  kumulatiewe som voorstel, definieer  $Y_1$  die gestandaardiseerde "inkrement" vanaf  $K_{m-1}$  tot  $K_m$  as :

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= K_m - K_{m-1} \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{(X_i - \mu_1)}{\sigma} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(X_i - \mu_1)}{\sigma} \\
 &= \frac{(X_m - \mu_1)}{\sigma} \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 Y_m &= \frac{(X_1 - \mu_1)}{\sigma}
 \end{aligned}$$

Indien  $X_1, \dots, X_m$  waarnemings is uit dieselfde populasie wat die normaalverdeling besit met parameters  $\mu_x$  en  $\sigma_x$ , sal  $Y_1, \dots, Y_m$  ook normaal verdeel wees met parameters  $\mu_y = \frac{(\mu_x - \mu_1)}{\sigma_x}$  en  $\sigma_y = 1$  onderskeidelik.

Beskou die hipotese :

$$H_0 : \mu_x = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_x = \mu_2 = \mu_1 + \delta\sigma_x$$

waar  $\mu_1$  die aanvaarbare prosesgemiddelde is en  $\delta\sigma_x$  die verskuiwing in die prosesgemiddelde. Vir die stogastiese veranderlike  $Y$  kan die hipotese herskryf word as :

$$H_0 : \mu_y = 0$$

$$H_1 : \mu_y = \delta$$

Die waarskynlikheidsverhouding onder die twee hipoteses is :

$$\frac{P_{2m}}{P_{1m}} = e^{\left\{ \frac{\delta \sum_{i=1}^m Y_i - \frac{\delta^2}{2} m}{\sigma^2} \right\}}$$

(2.8)

Die verbruikers-en produsenterisiko's is dan :

$$P(\text{punt buite kontroleperke/proses binne beheer}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\text{punt binne kontroleperke/proses buite beheer}) = \beta$$

Die waarskynlikheidsverhouding (2.8) sal tot die verwerping van  $H_0$  lei as :

$$e^{\left\{ \frac{\delta \sum_{i=1}^m Y_i - \frac{\delta^2}{2} m}{\sigma^2} \right\}} \geq \frac{1-\beta}{\alpha/2}, \text{ met } \delta \text{ positief.}$$

of

$$\delta \sum_{i=1}^m Y_i - \frac{\delta^2}{2} m \geq \ln \frac{1-\beta}{\alpha/2}$$

$$\sum_{i=1}^m Y_i \geq \frac{1}{\delta} \ln \frac{1-\beta}{\alpha/2} + \frac{\delta}{2} m, \text{ vir } \delta \text{ positief.}$$

In terme van die waarnemings  $X_i$  kan die verwerpingsgebied geskryf word as :

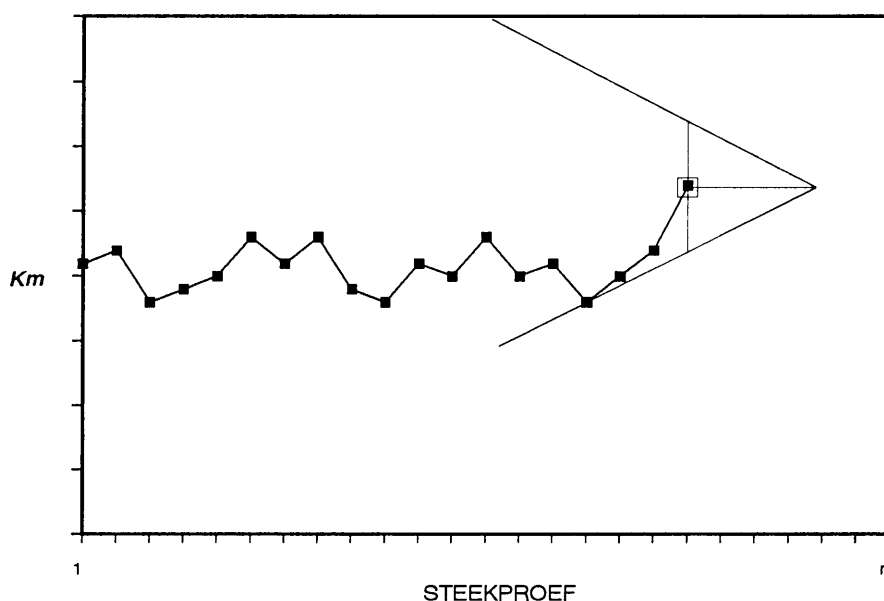
$$\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1) \geq \frac{1}{\sigma} \ln \frac{1-\beta}{\alpha/2} + \frac{\delta}{2} m, \quad \text{vir } \delta > 0.$$

Indien  $\delta$  negatief is, is die verwerpingsgebied :

$$\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1) \leq \frac{1}{\delta} \ln \frac{1-\beta}{\alpha/2}.$$

### ONTWIKKELING VAN DIE MASKER

In die ontwikkeling van die voorafgaande teorie, word daar vanaf die laaste waargenome punt op die grafiek teruggekyk na die reeks punte wat sekvensieel waargeneem is. Telkens wanneer 'n nuwe punt waargeneem is, moet 'n nuwe stel verwerpingspunte, met daardie punt as oorsprong, gekonstrueer word. In die praktyk word dit gedoen deur 'n masker uit karton te sny soos in Figuur 2.5.



**Figuur 2.5 :** Die kumulatiewesom-kontrolekaart met die masker

### ONTWERP VAN 'N KUMULATIEWESOM-KONTROLEKAART [Duncan, 1974]

- Besluit op 'n standaard of spesifikasie van kwaliteit, sê  $\mu = \mu_1$ .
- Stel 'n kleinste waarde, sê  $V$ , van die absolute verskuiwing in die gemiddelde wat wenslik is om met 'n redelike vertroue te kan uitwys. Bereken  $\delta = V/\sigma$ .

- Besluit op die verbruikers-en produsenterisiko's,  $\alpha$  en  $\beta$ .
- Bereken  $\theta = b \tan \frac{\delta}{2c}$  en  $v = \frac{2}{\delta^2} \ln \frac{(1-\beta)}{\alpha^2}$  waar  $c$  sodanig gekies word dat die skaal van die grafiek op die papier inpas.
- Konstrueer die masker en assestelsel en begin om die kumulatiewe somme van waarnemings daarop te stip.
- Plaas telkens die masker met oorsprong op die laaste waargenome punt. Indien een van die sye enige vorige punt of punte bedek, is die proses buite statistiese beheer.

Let op dat, as die masker enige vorige punt bedek, dit 'n aanduiding is dat dit die laaste gestipte punt is wat 'n betekenisvolle afwyking toon, en nie die punt wat deur die masker bedek word nie. Dit beteken natuurlik nie dat die proses by die laaste gestipte punt buite beheer geraak het nie, maar slegs dat dit nou betekenisvol aangetoon word. Die verloop van die grafiek op die kumulatiewesom-kontrolekaart gee gewoonlik 'n goeie aanduiding van waar daar 'n verskuiwing in die proses gemiddeld plaasgevind het.

### VOORBEELD 2.3

In 'n fabriek wat 'n sekere tipe silinder vervaardig, is 15 steekproewe van grootte 1 elk geneem en die diameter van elke silinder is gemeet. Die data word in Tabel 2.3 gegee.

Gestel die aanvaarbare kwaliteit is  $\mu_1 = 0.63$ , en ons wil 'n verskuiwing van 1 standaardafwyking uitwys.

Dit is  $V = \sigma$ , dit wil sê  $\delta = V/\sigma = 1$ .

Stel  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 0.05$  en  $c = 1$ , die skaalfaktor.

Dan volg dat :

$$\theta = b \tan \left( \frac{\delta}{2c} \right) = b \tan(0.5) = 26^\circ 31'.$$

$$\text{en } v = \frac{2}{\delta^2} \ln \frac{(1-\beta)}{\alpha^2}$$

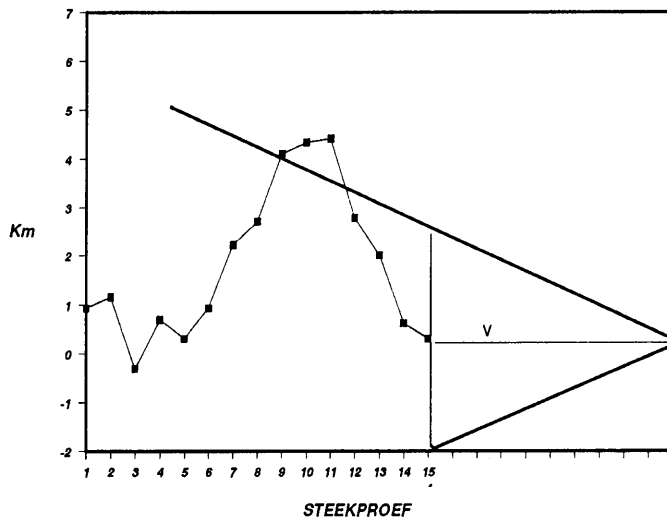
$$= 2 \ln \left( \frac{0.95}{0.005} \right) = 10.5$$

In Figuur 2.6 word die kumulatiewesomme met die berekende masker grafies voorgestel.

Tabel 2.3 : Die metings in (mm) van voorbeeld 2.3

| Steekproef | Maat $x_i$ | $x_i - \mu_1$ | $\frac{1}{\sigma_x} \Sigma(x_i - \mu_1)$ |
|------------|------------|---------------|--|
| 1          | 0.6324     | 0.0024        | 0.930                                    |
| 2          | 0.6306     | 0.0006        | 1.162                                    |
| 3          | 0.6262     | -0.0038       | -0.310                                   |
| 4          | 0.6326     | 0.0026        | 0.697                                    |
| 5          | 0.6290     | -0.0010       | 0.310                                    |
| 6          | 0.6316     | 0.0016        | 0.930                                    |
| 7          | 0.6336     | 0.0036        | 2.235                                    |
| 8          | 0.6310     | 0.0010        | 2.712                                    |
| 9          | 0.6336     | 0.0036        | 4.108                                    |
| 10         | 0.6306     | 0.0006        | 4.341                                    |
| 11         | 0.6302     | 0.0002        | 4.418                                    |
| 12         | 0.6258     | -0.0042       | 2.790                                    |
| 13         | 0.6280     | -0.0020       | 2.015                                    |
| 14         | 0.6264     | -0.0036       | 0.619                                    |
| 15         | 0.6292     | -0.0008       | 0.309                                    |

$\sigma_x = 0.00258$  en  $\bar{x} = 0.63$



Figuur 2.6 : Die kusomkaart vir voorbeeld 2.3

Uit Figuur 2.6 kan gesien word dat die indien die masker op die laaste gestipte punt geplaas word, die proses buite beheer is.

## 2.7 DIE P-KAART

Die P-kaart word gebruik as kontrolemaatstaf in gevalle waar vervaardigde items :

- versamel word in groot lotte waarvan die lotgroottes varieer, en waarop 'n 100 %-inspeksie uitgevoer word, of
- versamel word in groot lotte waarvan die lotgroottes konstant is, en waaruit steekproewe van varieerbare groottes getrek word vir inspeksie [Bezuidenhout, 1984].

### DIE DOEL VAN DIE P-KAART

- om die prosesgemiddeld (gemiddelde verhouding defektiewes) te beheer
- om die gemiddelde verhouding defektiewe items in die geïnspekteerde lotte/subgroepe te bepaal
- om enige verandering in die gemiddelde kwaliteitspeil onder die aandag van Bestuur te bring
- om 'n buitengewone hoë verhouding defektiewes in geïnspekteerde lotte/subgroepe uit te wys, sodat die oorsake van swak kwaliteit geïdentifiseer kan word
- om uit te wys wanneer daar 'n buitengewone lae verhouding defektiewes in geïnspekteerde lotte/subgroepe gevind word, wat onder andere kan dui op te lae inspeksiestandaarde, en
- om aan te dui wanneer  $\bar{X}$ - en  $R$ -kaarte gebruik moet word om kwaliteitsprobleme te ontleed.

### VOORVEREISTES VIR DIE KONSTRUKSIE VAN DIE P-KAART

1.  $N$ , die lotgrootte, of  $n$ , die subgrootte, moet groter wees as 50.
2.  $n\bar{p} \geq 4$ , waar  $\bar{p}$  die gemiddelde verhouding defektiewes is.
3. Die aantal subgroepe  $k$ , moet groter of gelyk wees aan 20.

#### Berekening van die kontrolelimiete :

##### Aksielimiete :

$$BLA : \bar{p} + 3\hat{\sigma}_p = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

$$OLA : \bar{p} - 3\hat{\sigma}_p = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}} \quad (2.9)$$

waar  $\bar{p} = \frac{\text{totale aantal defektiewe items}}{\text{totale aantal geïnspekteerde items}}$ , die sentralelyn (SL) is.

Omdat die steekproefgrootte  $n$  kan varieer van steekproef tot steekproef, moet die kontroleperke soos in (2.9), vir elke waarneming bereken en gekonstrueer word vir daardie besondere waarde van  $n$ .

#### OPMERKING

Indien daar in die beginstadium van die konstruksie van die P-kaart 'n punt is wat buite die kontrolelimiete val, moet 'n ondersoek geloods word na oorsake van die abnormale verskynsel. Indien geldige redes daarvoor gevind kan word, moet die betrokke subgroep geïgnoreer word en alle berekenings herhaal word.

## 2.8 DIE nP-KAART

Die doelstellings van, en vereistes vir die nP-kaart is soortgelyk aan dié van die P-kaart [Bezuidenhout, 1984]. Die nP-kaart is egter 'n praktiese alternatief vir die P-kaart indien alle subgroepe ewe groot is, aangesien die berekening van die kontrolelimiete in hierdie geval eenvoudiger is.

**Berekening van die kontrolelimiete :**

**Aksielimiete :**

$$BLA : n\bar{p} + 3\hat{\sigma}_{np} = n\bar{p} + 3\sqrt{np(1-p)}$$

$$OLA : n\bar{p} - 3\hat{\sigma}_{np} = n\bar{p} - 3\sqrt{np(1-p)} \quad (2.10)$$

waar  $\bar{p} = \frac{\text{totale aantal defektiewe items}}{\text{totale aantal geïnspekteerde items}}$ , die sentralelyn (SL) is.

'n Ander benadering wat ook gebruik word wanneer  $n$  konstant is, is om kontrolelimiete vir die "verhouding defektiewes" op te stel met kontrolelimiete as volg :

$$SL : \bar{p}$$

$$OKL : \bar{p} - 3\hat{\sigma}_p = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$BKL : \bar{p} + 3\hat{\sigma}_{\hat{p}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad (2.11)$$

Die resultate van (2.10) en (2.11) sal dieselfde wees.

#### VOORBEELD 2.4

Gedurende die afgelope maand is daar daaglik 'n steekproef van 200 artikels uit die produksie van 'n sekere fabriek geneem en die aantal defektiewe artikels is bepaal. Die data word in Tabel 2.4 gegee.

Die totale aantal defektiewe artikels wat waargeneem is, is 284.

Die totale aantal artikels wat geïnspekteer is, is 5600.

$$\bar{p} = \frac{284}{5600} = 0.0507$$

en

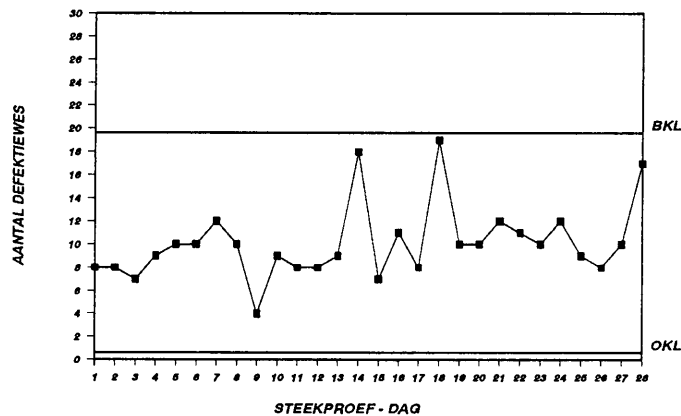
$$\hat{\sigma}_{np} = \sqrt{np(1-p)} = 3.1$$

**Kontrolelimiete :**

$$SL = n\bar{p} = 10.14$$

$$OLA = n\bar{p} - 3\hat{\sigma}_{np} = 0.84$$

$$BLA = n\bar{p} + 3\hat{\sigma}_{np} = 19.44$$



**Figuur 2.7 :** 'n Grafiese voorstelling van 'n nP-kaart vir voorbeeld 2.4

Uit Figuur 2.7 kan gesien word dat die proses onder statistiese beheer is

Tabel 2.4 : Die data vir voorbeeld 2.4

| DAG VAN<br>MAAND | AANTAL DEFEK-<br>TIEWES $X_i$ | $P_i = \frac{x_i}{200}$ |
|------------------|-------------------------------|-------------------------|
| 1                | 8                             | 0.04                    |
| 2                | 8                             | 0.04                    |
| 3                | 7                             | 0.035                   |
| 4                | 9                             | 0.045                   |
| 5                | 10                            | 0.05                    |
| 6                | 10                            | 0.05                    |
| 7                | 12                            | 0.06                    |
| 8                | 10                            | 0.05                    |
| 9                | 4                             | 0.02                    |
| 10               | 9                             | 0.045                   |
| 11               | 8                             | 0.04                    |
| 12               | 8                             | 0.06                    |
| 13               | 9                             | 0.045                   |
| 14               | 18                            | 0.09                    |
| 15               | 7                             | 0.035                   |
| 16               | 11                            | 0.055                   |
| 17               | 8                             | 0.04                    |
| 18               | 19                            | 0.095                   |
| 19               | 10                            | 0.05                    |
| 20               | 10                            | 0.05                    |
| 21               | 12                            | 0.06                    |
| 22               | 11                            | 0.055                   |
| 23               | 10                            | 0.05                    |
| 24               | 12                            | 0.06                    |
| 25               | 9                             | 0.045                   |
| 26               | 8                             | 0.04                    |
| 27               | 10                            | 0.05                    |
| 28               | 17                            | 0.085                   |

## 2.9 SAMEVATTING

In hierdie hoofstuk is die mees algemene eenveranderlike kontroletegnieke behandel wat in kwaliteitsbeheer gebruik word. Met die uitsondering van die  $\bar{X}$ -kaart met veranderbare steekproefintervalle en miskien die Kumulatiewesom-kaart, is die eenveranderlike kontrolekaarte maklik toepasbaar in die praktyk.

# HOOFSTUK 3

## MEERVERANDERLIKE KONTROLETEGNIKE

### 3.1 INLEIDING

In hierdie hoofstuk word 'n oorsig gegee van bestaande meerveranderlike kontroletegnieke in kwaliteitbeheer. Dié tegnieke is hoofsaaklik uitbreidings van die eenveranderlike tegnieke wat in Hoofstuk 2 bespreek is. Afdeling 3.2 handel oor die  $T^2$ -kaart met verwante metodes vir die beheer van die gemiddeld van 'n proses en kan beskou word as 'n meerveranderlike veralgemening van die  $\bar{X}$ -kaart. Die Det(S), S- en Log|S|-kaart vir die beheer van prosesverspreiding word in Afdelings 3.3, 3.4 en 3.5 bespreek en is meerveranderlike uitbreidings van die R- en  $S^2$ -kaart vir die eenveranderlike geval. In Afdeling 3.6 word die Multinomiaal-gebaseerde attribuutkaart bespreek. Hierdie kaart is ontwerp om voorsiening te maak vir gevalle wanneer die kwaliteit van 'n item in meer as twee kategorieë geklassifiseer kan word en is 'n uitbreiding van die  $p$ - en  $np$ -kaarte. Laastens word 'n oorsig van meerveranderlike kusom prosedures gegee.

### 3.2 DIE $T^2$ -KAART

Dié tegniek behels die berekening van die gemiddeld vir 'n ewekansige steekproef van grootte  $n$  vir elk van die  $p$ -karakteristieke [Montgomery en Wadsworth, 1972].

Die versameling van gemiddeldes kan in vektornotasie as volg voorgestel word :

$$\bar{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_p \end{pmatrix}$$

Die huidige vektor van gemiddeldes word dan gekombineer in die toetsgrootheid

$$T^2 = n(\bar{\underline{x}} - \bar{\underline{x}})'S^{-1}(\bar{\underline{x}} - \bar{\underline{x}}), \quad (3.1)$$

en word met 'n enkele kontrolelimiet vergelyk. In Vergelyking 3.1 is  $\bar{\underline{x}}$  die vektor van nominale gemiddeldes vir elke kwaliteitskarakteristiek. Dit is :

$$\bar{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_p \end{pmatrix},$$

gebaseer op m steekproewe van grootte n elk waarby  $\bar{x}_i$  die sentralelyn is vir die gewone eenveranderlike  $\bar{X}$ -kaarte vir die  $i$ -de veranderlike.

Verder is  $S^{-1}$  die inverse van die steekproefvariensie-kovariansie-matriks  $S$ . Die kontrolelimiet vir die kaart is ongeveer gelyk aan  $T_{\alpha,p,n-1}^2$  wat in tabelle beskikbaar is [Morrison, 1988], of wat bereken kan word deur  $T_{\alpha,p,n-1}^2 = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{\alpha,p,n-p}$ , waar  $F_{\alpha,p,n-p}$  die boonste  $\alpha$ -persentasiepunt is van die F-verdeling met  $p$  en  $n-p$  grade van vryheid is, terwyl  $T_{\alpha,p,n-1}^2$  die boonste  $\alpha$ -persentasiepunt van die  $T^2$ -verdeling is met  $p$  en  $n-1$  grade van vryheid.

$S^{-1}$  en  $\bar{\underline{x}}$  word verkry deur die neem van m-steekproewe van groottes n met die aanname dat die proses onder statistiese beheer is. Die steekproefgemiddeldes en variansies word dan soos volg vir elke steekproef bereken :

$$\bar{x}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ijk}, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, p$$

$$s_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, p$$

waar  $x_{ijk}$  die  $i$ -de waarneming in die  $j$ -de steekproef op die  $k$ -de kwaliteitskarakteristiek is.

$\bar{\underline{x}}_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{x}_{jk}$ ,  $k = 1, \dots, p$  word dan bereken vir elke kwaliteitskarakteristiek vir die  $m$ -steekproewe

en voorgestel deur die vektor  $\bar{\underline{x}}$ .

Die steekproefkovariansie tussen die  $k$ -de en  $l$ -de karakteristiek vir die  $j$ -de steekproef is :

$$s_{jkl} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})(x_{ijl} - \bar{x}_{jl}), \quad j = 1, \dots, m; \quad k \neq l = 1, \dots, p.$$

Die gemiddeld vir die variansies en kovariansies word dan oor die  $m$ -steekproewe bereken deur :

$$s_k^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_{jk}^2, \quad k = 1, \dots, p$$

en

$$s_{kl} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_{jkl}, \quad k \neq l = 1, \dots, p.$$

Dié statistieke word gebruik om die matriks  $S$  op te stel.

$$S = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_{12} & \dots & s_{1k} & \dots & s_{1p} \\ s_{12} & s_2^2 & \dots & s_{2k} & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1p} & s_{2p} & \dots & s_{kp} & \dots & s_p^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

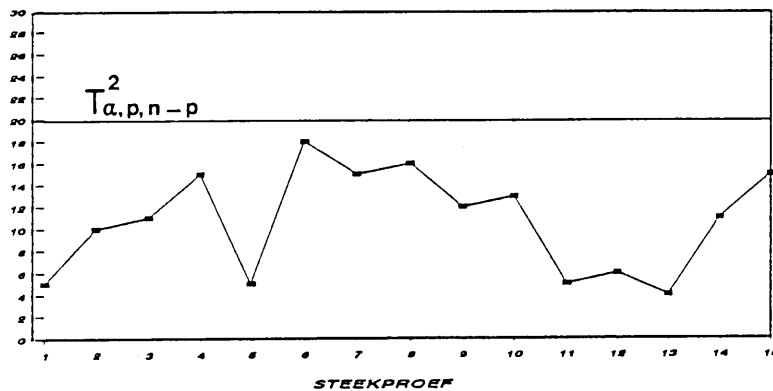
As  $S^{-1}$  eers bereken is vir die aanvanklike  $m$ -steekproewe is dit nie nodig om dit weer te bereken

tensy daar genoeg rede is om te vermoed dat inherente prosesvariasie verander het. Nadat die aanvanklike waardes van  $\bar{x}$  en  $S^{-1}$  bereken is, kan dit gebruik word in die berekening van die  $T^2$ -statistiek vir elke steekproef om te bepaal of die proses nog onder statistiese beheer is.

Indien  $p = 2$  kan Vergelyking 3.1 geskryf word as:

$$T^2 = \frac{n}{s_1^2 s_2^2 - s_{12}^2} \{ s_1^2 (\bar{x}_2 - \bar{x}_2)^2 + s_2^2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^2 - 2s_{12} (\bar{x}_1 - \bar{x}_1) (\bar{x}_2 - \bar{x}_2) \} \quad (3.3)$$

Figuur 3.1 is 'n tipiese voorbeeld van 'n  $T^2$ -kaart.



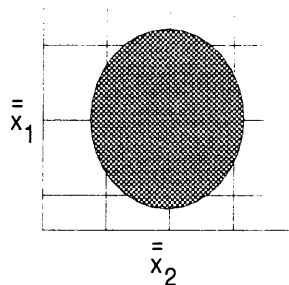
Figuur 3.1 : Hotelling se  $T^2$ -kaart.

Vir die  $T^2$ -kaart word die uitspraak oor die proses deur 'n enkele syfer gegee. Die onderhoud van die kaart is redelik eenvoudig omdat  $\bar{\underline{x}}$  en  $S^{-1}$  slegs een keer bereken word. Elke keer wanneer 'n nuwe punt tot die kaart gevoeg word, word slegs die steekproefgemiddeld  $\bar{\underline{x}}$  en  $T^2$  bereken vir die "nuwe" punt.

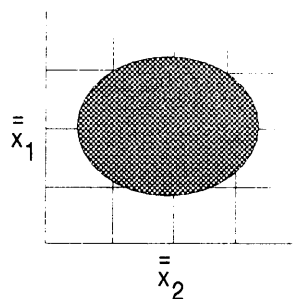
Indien 'n stel steekproefgemiddeldes buite beheer is, is dit egter nie onmiddellik moontlik om te kan sê watter van die  $q(q < p)$ -kwaliteitskarakteristieke vir die situasie verantwoordelik is nie. Die gebruik van die kontrole-ellips of gelyktydige intervalle kan help om sulke karakteristieke te identifiseer.

### **DIE KONTROLE-ELLIPS**

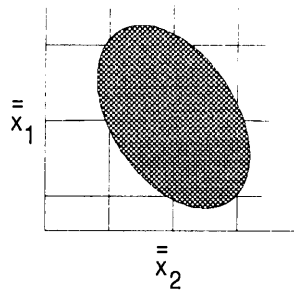
Indien  $p = 2$  kan die kontrole-ellips gebruik word om te bepaal of die proses onder statistiese beheer is. Vir  $p = 2$  beskryf Vergelyking 3.3 'n ellips wat gesentreer is in die punte  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Die oriëntasie van die ellips is afhanklik van die elemente van  $\Sigma$ . Figuur 3.2 is 'n voorbeeld van wanneer  $s_1^2 = s_2^2$  en  $s_{12} = 0$ , terwyl Figuur 3.3 'n voorbeeld is van onafhanklike maar ongelyke variansies. Figuur 3.4 is 'n voorbeeld van twee veranderlikes wat afhanklik van mekaar is. (Die figure is oorgeneem uit Montgomery en Wadsworth, 1972.)



**Figuur 3.2**



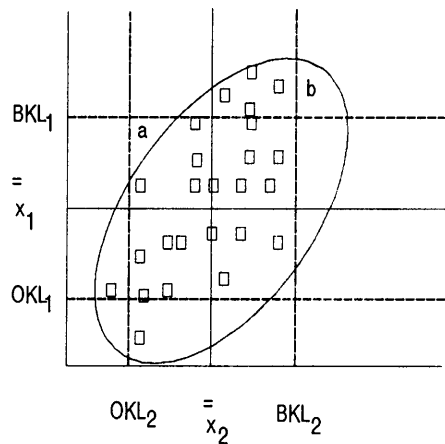
**Figuur 3.3**



**Figuur 3.4**

Dit kan aangetoon word dat indien die steekproefvektor van gemiddeldes  $\bar{x}$  op die kontrolelimiet van die  $T^2$ -kaart gestip word, dit ooreenstemmend op die omtrek van die ellips gestip sal word. Indien die vektor van punte onder die limiet van die  $T^2$ -kaart gestip word, sal dit ooreenstemmend vir die ellips binne-in die ellips gestip wees. Die ellips kan in die plek van die  $T^2$ -kaart gebruik word met omtrek as kontrolelimiet.

Met behulp van die ellips kan die konsep van verkeerde gevolgtrekkings met die gebruik van eenveranderlike kontrolekaarte duidelik geïllustreer word.



**Figuur 3.5:** Illustrasie van kontrolegebied met behulp van die ellips

In Figuur 3.5 sal die punt a in terme van eenveranderlike kontrolelimiete gesien word as 'n punt binne beheer. In die meerveranderlike konteks is dié punt in werklikheid buite beheer. Die omgekeerde geld vir punt b. In die eenveranderlike geval is die punt b buite beheer, maar met die meerveranderlike benadering is punt b binne beheer. Die gestipte lyne is die kontrolelimiete vir die afsonderlike eenveranderlike kaarte vir  $x_1$  en  $x_2$ .

Die gebruik van die ellips het tot gevolg dat die tydvolgorde van ingesamelde data nie waargeneem kan word nie. Dit is ook moeiliker om te bepaal waar die proses buite beheer geraak het. As 'n punt buite die omtrek gestip word, is dit egter makliker om te bepaal watter een van die karakteristieke buite beheer is.

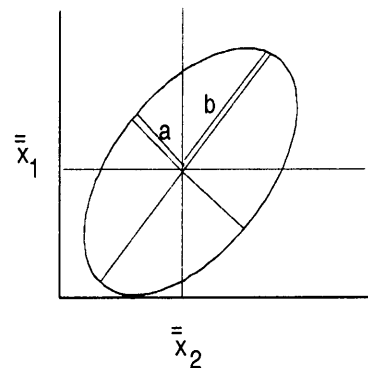
Die kontrole-ellips kan gekonstrueer word deur gebruik te maak van die karakteristieke wortels van die matriks  $S$ , wat uit die volgende vergelykings bepaal kan word :

$$|S - \lambda I|$$

of in die twee veranderlike geval

$$\lambda^2 - (s_1^2 + s_2^2)\lambda + (s_1^2 s_2^2 - s_{12}^2) = 0 \quad (3.4)$$

Gestel  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  is oplossings van (3.4) en dat  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Die lengte van die hoofas van die ellips is dan  $\sqrt{\lambda_1 T_{\alpha, 2, n-1}^2}$  en die lengte van die newe-as is  $\sqrt{\lambda_2 T_{\alpha, 2, n-1}^2}$ . Indien  $\theta$  die hoek is tussen die hoofas en die  $x_1$ -koördinaat, is  $\tan \theta = \frac{\lambda_1 - s_1^2}{s_{12}}$ . Sien Figuur 3.6 vir die konstruksie van die ellips. Figuur 3.6 is oorgeneem uit [Jackson, 1956].



$$a = \sqrt{\lambda_1 T_{\alpha, 2, n-1}^2}$$

$$b = \sqrt{\lambda_2 T_{\alpha, 2, n-1}^2}$$

**Figuur 3.6:** Ellips met lengtes van asse

### **HOOFAS-ROTASIE**

Om die hoof- en newe-asse van die kontrole-ellips te bepaal, moet 'n hoofas-rotasie plaasvind. Dit is 'n transformasie van die oorspronklike twee veranderlikes  $x_1$  en  $x_2$  na twee nuwe veranderlikes, sê  $z_1$  en  $z_2$  wat ongekorrleerd is.

Stel  $(z_1 z_2) = (x_1 x_2) V'$  of stel  $\underline{z} = \underline{x} V'$ , waarby  $\underline{z} = (z_1, z_2)$ .

$S = \begin{pmatrix} s_{x_1}^2 & s_{x_{12}} \\ s_{x_{12}} & s_{x_2}^2 \end{pmatrix}$ , die steekproefkovariansiematriks van die twee oorspronklike veranderlikes  $x_1$  en  $x_2$ ,

waarby  $V = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2) = \begin{pmatrix} v_{x1} & v_{y1} \\ v_{x2} & v_{y2} \end{pmatrix}$ ,

met  $\underline{v}_1$  en  $\underline{v}_2$  die karakteristieke vektore met  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  die ooreenstemmende karakteristieke wortels.

Die kovariansiematriks van  $\underline{z}$  word verkry deur die kovariansiematriks van  $\underline{x}$  links met  $V$  en regs met  $V'$  te vermenigvuldig. Dit is  $VS V' = \Lambda$ .

Die nuwe veranderlike  $z_1$  besit 'n gemiddeld van 0 en 'n variansie van  $\lambda_1^2$ , en  $z_2$  'n gemiddeld van 0 en 'n variansie van  $\lambda_2^2$ . Indien die oorspronklike twee veranderlikes  $x_1$  en  $x_2$  'n tweeveranderlike normaalverdeling besit, sal  $z_1$  en  $z_2$  ook normaal verdeel wees [Anderson, 1958].

Stel  $\underline{w}_1 = \underline{v}_1/\lambda_1$  en  $\underline{w}_2 = \underline{v}_2/\lambda_2$  sodat die transformasie van die oorspronklike veranderlikes as

$\underline{y} = \underline{z}\Lambda^{-1} = \underline{x}W'$  geskryf kan word. Die kovariansiematriks van  $\underline{y}$  is dan  $WSW' = I$ , die identiteitsmatriks,  $I$ . Die vektor  $\underline{y}$  is dan onafhanklik normaal verdeel, met 'n gemiddeld van  $\underline{0}$  en kovariansiematriks  $I$ .

Die som van kwadrate van  $p$  onafhanklike normaalverdeelde veranderlikes, elk met gemiddeld 0 en variansie 1 is chi-kwadraat verdeel met  $p$  grade van vryheid. Vir klein steekproewe wanneer die variansies beraam moet word, moet chi-kwadraat vervang word met  $T^2$  [Jackson, 1958]. Die som van kwadrate van individuele pare van  $y$ 's is gelyk aan  $T^2$ . Dit is:

$$\begin{aligned} T^2 &= \underline{x}S^{-1}\underline{x}' \\ &= \underline{x}W'W\underline{x}' \\ &= \underline{y}\underline{y}' \end{aligned} \tag{3.5}$$

Vergelyking 3.5 sal dieselfde resultate lewer as Vergelyking 3.1. 'n Voordeel is egter dat met voldoende insig van die proses en statistiese onderbou van die vektor  $\underline{y}$ , uitspraak in die breë oor die proses se gedrag gegee kan word [(Schall en Chandra, (1987)) en (Jackson (1959))].

### Roy se vereniging-snyding metode

'n Alternatiewe afleiding van Hotelling se  $T^2$ -toetsgrootheid is die sogenaamde vereniging-snyding-metode van Roy [Strivastava en Carter, 1983]. Aangesien hierdie toets gebaseer is op alle moontlike lineêre kombinasies van  $\underline{X}$ , naamlik  $\underline{a}'\underline{X}$ , stel die vereniging-snyding metode die navorser instaat om met behulp van (3.9) gelyktydige vertrouensintervalle op te stel, om sodoende vas te stel welke veranderlikes daartoe gelei het dat die proses buite beheer geraak het.

Kies enige nie-nul p-komponentvektor  $\underline{a}$  en vorm die lineêre kombinasie  $y = \underline{a}'\underline{x}$ , met  $\underline{x} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$  verdeel.

$$E(y) = \underline{a}'\underline{\mu}$$

$$Kov(y, y') = Kov(\underline{a}'\underline{x}, \underline{x}'\underline{a}) = \underline{a}'\Sigma\underline{a}$$

Gevolgtlik is  $y \sim n(\underline{a}'\underline{\mu}, \underline{a}'\Sigma\underline{a})$  verdeel.

Stel  $\underline{a}'\underline{x}_\alpha$  is 'n realisasie van  $\underline{a}'\underline{x}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \bar{y})(y_\alpha - \bar{y})'$$

$$\text{Maar } \bar{y} = \underline{a}'\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{\alpha=1}^N \underline{x}_\alpha = \underline{a}'\bar{\underline{x}}, \text{ derhalwe is } S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{\alpha=1}^N (\underline{a}'\underline{x}_\alpha - \underline{a}'\bar{\underline{x}})(\underline{a}'\underline{x}_\alpha - \underline{a}'\bar{\underline{x}})' = \underline{a}'S\underline{a}.$$

Die volgende hipotese

$$H_0(\underline{a}) : \underline{a}'\underline{\mu} = \underline{a}'\underline{\mu}_0$$

$$H_a(\underline{a}) : \underline{a}'\underline{\mu} \neq \underline{a}'\underline{\mu}_0 \tag{3.6}$$

kan getoets word met behulp van die grootheid

$$t(\underline{a}) = \frac{(\bar{y} - \mu_0(y))\sqrt{n}}{S_y} = \frac{\underline{a}'(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)\sqrt{N}}{(\underline{a}'S\underline{a})^{1/2}}.$$

Dit wil sê  $H_0$  word aanvaar indien

$$t^2(\underline{a}) = N \left\{ \underline{a}'(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0) \right\}^2 / (\underline{a}'S\underline{a}) < t_{\alpha/2, N-1}^2. \text{ Nou is } H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0 \text{ waar as en slegs as } H_0(\underline{a}) \text{ waar is } \forall \underline{a}. \text{ Die meer-}$$

veranderlike aannamegebied is dus die snyding  $\bigcap_{\underline{a}} t^2(\underline{a}) \leq t_{\alpha/2, N-1}^2$ .

Ekwivalent hieraan is die aannamegebied  $\max_{\underline{a}} t^2(\underline{a}) \leq t_{\alpha/2, N-1}^2$ , want indien die maksimum waarde

van  $t^2(\underline{a})$  kleiner is as  $t_{\alpha/2, N-1}^2$ , sal al die ander waardes van  $t^2(\underline{a})$  ook in die aannamegebied val.

Die alternatiewe hipotese  $H_a: \mu \neq \mu_0$  is waar indien vir enige  $\underline{a}$ ,  $H_1(\underline{a})$  waar is, dit wil sê  $H_a = \cup_{\underline{a}} H_a(\underline{a})$ .

$H_0$  sal verwerp word indien vir enige  $\underline{a}$ ,  $t^2(\underline{a}) > t_{\alpha/2, N-1}^2$ , sodat die kritieke gebied vir verwerping van  $H_0$ ,  $\cup_{\underline{a}} \{t^2(\underline{a}) > t_{\alpha/2, N-1}^2\}$  is.

Definieer  $G = \underline{a}'(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)N(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)' \underline{a} - \lambda(\underline{a}'S\underline{a} - 1)$ . Dié t-toets is invariant met betrekking tot skaal- en lokaliteitstransformasies van waarnemings, sodat  $S_y^2 = \underline{a}'S\underline{a} = 1$  geneem kan word en  $\lambda$  'n Lagrange-vermenigvuldiger is.

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{a}} = 2(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)N(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)' \underline{a} - 2\lambda S\underline{a}$$

Indien  $\frac{\partial G}{\partial \underline{a}} = \underline{0}$  volg vir 'n relatiewe maksimum dat :

$$\{(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)'N - \lambda S\}\underline{a} = \underline{0} \tag{3.7}$$

Vermenigvuldiging van Vergelyking 3.7 van links met  $\underline{a}'$  lewer  $\underline{a}'(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)' \underline{a}N = \lambda \underline{a}'S\underline{a}$ , waaruit

volg dat

$$\lambda = \frac{\underline{a}'(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)' \underline{a}N}{\underline{a}'S\underline{a}} = t^2(\underline{a}) \tag{3.8}$$

Deur Vergelyking 3.7 van links met  $S^{-1}$  te vermenigvuldig volg dat :

$$\{S^{-1}(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)'N - \lambda I\}\underline{a} = \underline{0}. \text{ Vir } \underline{a} \neq \underline{0} \text{ volg dat } |A - \lambda I| = 0, \text{ 'n homogene stelsel van vergelykings.}$$

Maar  $spA = \sum_{i=1}^p \lambda_i$  en aangesien  $rang(A) = rangN(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)'S^{-1}(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0) = 1$ , geld gevolglik dat

$\lambda_{maks} = \lambda_1 = N(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)'S^{-1}(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0) \sim T^2$ . Stel  $T_{\alpha}^2$  is die  $\alpha\%$  kritieke waarde van die  $T^2$ -verdeling,

dan volg dat  $P(\forall t^2(\underline{a}) \leq T_{\alpha, p, N-p}^2) = 1 - \alpha$  geld vir alle  $\underline{a}$ .

Vir die bepaling van gelyktydige vertrouensintervalle vir die lineêre kombinasies  $\underline{a}'\underline{\mu}$  van  $\underline{\mu}$ , beskou :

$$\begin{aligned}
 P(-T_\alpha < t(\underline{a}) < T_\alpha) &= 1 - \alpha \\
 &= P\left(-T_\alpha < \frac{\text{maks } \underline{a}'(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)\sqrt{N}}{(\underline{a}'S\underline{a})^{1/2}} < T_\alpha\right) = P\left(-T_\alpha \frac{(\underline{a}'S\underline{a})^{1/2}}{\sqrt{N}} < \underline{a}'\bar{\underline{x}} - \underline{a}'\underline{\mu}_0 < T_\alpha \frac{(\underline{a}'S\underline{a})^{1/2}}{\sqrt{N}}\right) \\
 &= P\left(-\underline{a}'\bar{\underline{x}} - T_\alpha \frac{(\underline{a}'S\underline{a})^{1/2}}{\sqrt{N}} < -\underline{a}'\underline{\mu}_0 < -\underline{a}'\bar{\underline{x}} + T_\alpha \frac{(\underline{a}'S\underline{a})^{1/2}}{\sqrt{N}}\right) = P\left(\underline{a}'\bar{\underline{x}} - T_\alpha \frac{(\underline{a}'S\underline{a})^{1/2}}{\sqrt{N}} < \underline{a}'\underline{\mu}_0 < \underline{a}'\bar{\underline{x}} + T_\alpha \frac{(\underline{a}'S\underline{a})^{1/2}}{\sqrt{N}}\right)
 \end{aligned}$$

'n  $100(1 - \alpha)\%$  gelyktydige vertrouensinterval vir alle kombinasies  $\underline{a}'\underline{\mu}$  van  $\underline{\mu}$  is dan :

$$\left\{ \underline{a}'\bar{\underline{x}} - T_\alpha \sqrt{\frac{\underline{a}'S\underline{a}}{N}}; \underline{a}'\bar{\underline{x}} + T_\alpha \sqrt{\frac{\underline{a}'S\underline{a}}{N}} \right\}, \quad (3.9)$$

aangesien die vertrouensinterval ook geld vir  $\text{maks } t(\underline{a})$ .

Deur  $T_\alpha$  in Vergelyking 3.9 met  $t_{\alpha/2p, n-1}$  te vervang, word 'n vertrouensinterval verkry wat bekend staan as die *Bonferroni-metode van gelyktydige intervale*.

Dit is:

$$\left\{ \underline{a}'\bar{\underline{x}} - t_{\alpha/2p, n-1} \sqrt{\frac{\underline{a}'S\underline{a}}{N}}; \underline{a}'\bar{\underline{x}} + t_{\alpha/2p, n-1} \sqrt{\frac{\underline{a}'S\underline{a}}{N}} \right\}, \quad (3.10)$$

### 3.3 Die Det(S)-KAART

Vir enige paar stogastiese veranderlikes  $x_1$  en  $x_2$  is die kovariansie 'n maatstaf van lineêre assosiasie tussen  $x_1$  en  $x_2$ , aangedui deur  $\sigma_{12}$ . Die gestandaardiseerde maatstaf van lineêre assosiasie is  $\rho = \sigma_{12}/\sqrt{\sigma_1^2}\sqrt{\sigma_2^2}$ . In die geval van  $p$  stogastiese veranderlikes kan die  $p$ -variansies en  $p(p-1)/2$ -kovariansies in 'n  $p \times p$  simmetriese matriks  $\Sigma$  voorgestel word.

$$\text{Indien } p = 2, \text{ is } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Vir  $p > 1$  kan die hipotese in (2.6) herskryf word as  $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$  teen  $H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$ .

Die aanneemlikheidsverhoudingstoets van dié hipotese is volgens [Alt en Bedewi, 1986] gebaseer op die toetsgrootheid

$$\lambda = \left\{ \left( \frac{n-1}{n} \right)^p \frac{|S|}{|\Sigma_0|} \right\}^{n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (n-1) (sp(S\Sigma_0^{-1}) - np) \right\}, \quad (3.11)$$

met  $A: (p \times p)$  'n simmetriese matriks met inskrywings die steekproefsom van vierkante en kruisprodukte. Vir  $p = 2$  is

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 & \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) \\ \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) & \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \end{pmatrix}$$

Let wel dat  $S = (n-1)^{-1}A$ , die steekproefvariensie-kovariensie-matriks is. Die toets wat gebaseer is op  $\lambda$  is nie onsydig nie. [Anderson, 1984] het aangetoon dat die gewysigde aanneemlikheidsverhoudingstoets aangedui deur  $\lambda^*$ , waar  $n$  met  $(n-1)$  in (3.11) vervang word, 'n onsydige beramer is.

Die werklike toetsgrootheid wat gebruik word, is dan

$$W^* = -2 \ln \lambda^*, \text{ waar} \quad (3.12)$$

$$W^* = -p(n-1) - (n-1) \ln(|S|) + (n-1) \ln(|\Sigma_0|) + (n-1) sp(\Sigma_0^{-1}S).$$

Vir  $p = 2$  is

$$|S| = s_1^2 s_2^2 - s_{12}^2, \quad |\Sigma_0| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$$

en

$$sp(\Sigma_0^{-1}S) = (1 - \rho^2)^{-1} \{ (s_1^2/\sigma_1^2) + (s_2^2/\sigma_2^2) - 2\rho(s_{12}/\sigma_1\sigma_2) \}.$$

Anderson (1984) het aangetoon dat  $W^*$  asimptoties  $X^2$ -verdeel is, met  $\left(\frac{p}{2}(p+1)\right)$  grade van vryheid.

Die veralgemeende steekproefvariensie  $|S|$  word gewoonlik gebruik as 'n skalaarmaatstaf van meer- veranderlike verspreiding. Omdat  $A = (n-1)^p |S|$  'n lineêre veelvoud van  $S$  is, geld dieselfde aanname ook vir  $A$ .

Om meer insig in  $A$  te kry as 'n maatstaf van verspreiding, beskou die geval waar  $p = 2$ , met

$r = a_{12}/\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ , die steekproefkorrelasiekoëffisiënt.

Beskou nou die data as afwykings van die gemiddeldes. Dit is

$$D = \begin{pmatrix} x_{11} & - & \bar{x}_1 & x_{12} & - & \bar{x}_1 & \cdots & \cdot & x_{1n} & - & \bar{x}_1 \\ x_{21} & - & \bar{x}_2 & x_{22} & - & \bar{x}_2 & \cdots & \cdot & x_{2n} & - & \bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{pmatrix}.$$

$$A = DD' \text{ en } S = (n-1)^{-1}DD'.$$

Dus is  $a_{11} = \underline{d}_1'\underline{d}_1$ ,  $a_{12} = \underline{d}_1'\underline{d}_2$ ,  $a_{22} = \underline{d}_2'\underline{d}_2$  en  $r$  kan geskryf word as  $r = \underline{d}_1'\underline{d}_2/\sqrt{\underline{d}_1'\underline{d}_1}\sqrt{\underline{d}_2'\underline{d}_2}$ , wat die formule is vir die kosinus van die hoek tussen  $\underline{d}_1$  en  $\underline{d}_2$ .

Uit die voorafgaande teorie volg dat die matriks  $A$  as volg uitgedruk kan word :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{d}_1' & \underline{d}_1 & \underline{d}_1' & \underline{d}_2 \\ \underline{d}_1' & \underline{d}_2 & \underline{d}_2' & \underline{d}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (n-1)s_1^2 & (n-1)rs_1s_2 \\ (n-1)rs_1s_2 & (n-1)s_2^2 \end{pmatrix}.$$

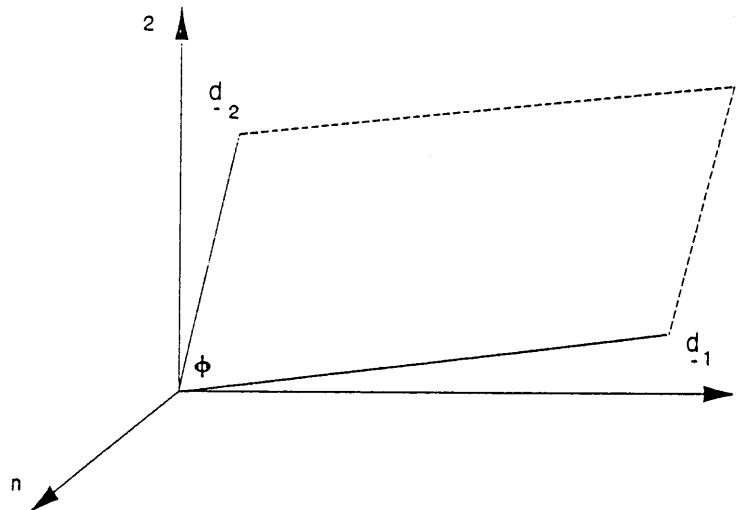
Dus is

$$|A| = (n-1)^2s_1^2s_2^2(1-r^2)$$

$$= (n-1)^2s_1^2s_2^2\sin^2\theta$$

Maar  $(n-1)s_1s_2\sin\theta = \sqrt{\underline{d}_1'\underline{d}_1}\sqrt{\underline{d}_2'\underline{d}_2}\sin\theta$ , die oppervlakte van die parallelogram wat gevorm word deur

gebruik te maak van  $\underline{d}_1$  en  $\underline{d}_2$  as die hoofasse soos aangedui in Figuur 3.7.  $|A|$  is dus die vierkant van hierdie oppervlakte.



Figuur 3.7 :  $|A|$  meetkundig voorgestel as die vierkantswortel van die oppervlakte van die parallelogram.

[Alt, 1985] het aangetoon dat vir  $p = 2$ , volg dat  $2(n - 1)|S|^{1/2}/\Sigma_0^{1/2} \sim X^2$  verdeel is met  $(2n - 4)$  grade van vryheid. Deur manipulasie van hierdie uitdrukking kan die volgende kontrolelimiete verkry word :

$$OKL : |\Sigma_0|^{1/2} X_{2n-4, 1-\alpha/2}^2 / 2(n-1)$$

$$BKL : |\Sigma_0|^{1/2} X_{2n-4, \alpha/2}^2 / 2(n-1). \tag{3.13}$$

Vir elke ewekansige steekproef van grootte  $n$ , moet  $|S|^{1/2} = (s_1^2 s_2^2 - s_{12}^2)^{1/2}$  bereken word, en indien die waarde van  $|S|^{1/2}$  buite die kontrolelimiete lê, is die prosesverspreiding buite beheer.

### 3.4 DIE LOG|S|-KAART

'n Verdere kontrolekaart wat gebruik word om die prosesverspreiding te beheer, is die Log|S|-kaart, die logaritme van die determinant van die steekproefkovariansiematriks. [Gnanadesikan en Gupta, 1970] het aangetoon dat dié stogastiese veranderlike benader kan word deur die normaalverdeling en die toepassing of benadering verbeter soos wat  $n$ , die steekproefgrootte, en  $p$ , die getal veranderlikes, toeneem.

Vir die Log|S|-kaart word die determinant  $|S_j|$ , vir elk van die  $m$ -steekproewe van grootte  $n$  elk bereken, met

$$|S_j| = \begin{vmatrix} s_{j1}^2 & s_{j12} & \cdots & \cdot & s_{j1p} \\ s_{j12} & s_{j2}^2 & \cdots & \cdot & s_{j2p} \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ s_{j1p} & s_{j2p} & \cdots & \cdot & s_{jp}^2 \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

$s_{jk}^2$  is die variansie van die  $k^{de}$  karakteristiek vir die  $j^{de}$  steekproef, en  $s_{jkl}$  die kovariansie vir karakteristieke  $k$  en  $l$  vir die  $j^{de}$  steekproef.

Wanneer die steekproewe geneem word, met die veronderstelling dat die proses onder beheer is, word  $m$  onafhanklike beraamings van die variansie-kovariansie-matriks bereken. Die logaritmes word dan van elk van die determinante van die matrikse geneem. Hierna is dit moontlik om

$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j$  die gemiddeld en  $s_y = \left\{ \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2 \right\}^{1/2}$  die standaardafwyking, met  $y_j = \log |S_j|$ , te bereken.

'n Kontrolekaart met  $(1 - \alpha)$ -waarskynlikheidslimiete kan gekonstrueer word met kontrolelimiete as volg :

$$\begin{aligned} BKL & : \bar{y} + z_{\alpha/2} s_y \\ OKL & : \bar{y} - z_{\alpha/2} s_y, \end{aligned} \quad (3.15)$$

waar  $z_{\alpha/2}$  die persentasiepunt van die normaalverdeling is.

Vir elke steekproef word  $y_j$  gestip op 'n kontrolekaart met limiete soos in (3.15). Indien 'n gestipte punt buite die limiete lê, is die prosesverspreiding buite beheer.

### 3.5 DIE S-KAART

Beskou die geval van 'n enkele steekproef met  $N$  waarnemings vir  $p$  veranderlikes met parameters  $\underline{\mu}$  en  $\Sigma$ , waarby  $\Sigma$  'n positiewe definitie kovariansiematriks is.

Om uitspraak oor die gedrag van die proses in die meerveranderlike geval te maak, moet die volgende hipotese getoets word:

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0$$

teen

$$H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$$

Die aanneemlikheidsverhouding volgens [Morrison, 1988] word gegee deur

$$\lambda = \left\{ \left( \frac{n-1}{n} \right)^p \frac{|S|}{|\Sigma_0|} \right\}^{n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (n-1) (sp(S\Sigma_0^{-1}) - np) \right\},$$

Dié verhouding kan benader word waar  $N - 1$  vervang word deur 'n *algemene graad van vryheid parameter*,  $\nu$  vir  $S$ .

Die toetsstatistiek is dan :

$$L = \nu (\ln |\Sigma_0| - \ln |S| + sp(S\Sigma_0^{-1}) - p)$$

Vir  $N$  groot besit  $L$  'n Chi-kwadraat verdeling met  $(1/2)p(p+1)$  grade van vryheid onder die nulhipotese.

Vir matige  $N$  het [Bartlett, 1954] die geskaleerde grootheid  $L'$ , voorgestel waarby

$$L' = \left\{ 1 - \frac{1}{6(N-1)} (2p+1 - 2/(p+1)) \right\} L \tag{3.16}$$

Die nulhipotese word verwerp indien  $L' > X_{\alpha, 1/2p(p+1)}^2$

Indien die nulhipotese verwerp word, is dit belangrik om die oorsaak te bepaal. Dit is om die veranderlike(s) te identifiseer wat vir die buite beheer situasie verantwoordelik is. Net soos in die geval vir die beheer van die proses gemiddeld bestaan daar meervoudige vergelykingsprosedures, te wete Roy se vereniging-snyding-metode en die Bonferroni-metode van gelyktydige intervalle om die moontlike "oorsaak" te identifiseer.

## ROY SE VERENIGING-SNYDING METODE

Beskou die hipotese :

$$H_0(\underline{a}): \underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a} = \underline{a}' \underline{\Sigma}_0 \underline{a}$$

$$H_0(\underline{a}): \underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a} \neq \underline{a}' \underline{\Sigma}_0 \underline{a}$$

Stel  $y = \underline{a}' X$ , dan is  $H_0: \sigma_y^2 = \sigma_0^2$  en  $(N-1)S^2/\sigma_0^2 \sim X_{\alpha, N-1}^2$  verdeel.

Die eenveranderlike toetsgrootheid is derhalwe  $X^2(\underline{a}) = \frac{(N-1) \underline{a}' \underline{a}}{\underline{a}' \underline{\Sigma}_0 \underline{a}}$

met kritieke gebied

$$\{X^2(\underline{a}): X^2(\underline{a}) < X_{1-\alpha_1, N-1}^2 \text{ of } X^2(\underline{a}) > X_{\alpha_2, N-1}^2\}$$

waarby  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ .

Die nulhipotese van  $H_0: \Sigma = \Sigma_0$  word aanvaar indien  $l \leq c_p \leq c_1 \leq u$ , waar  $c_p$  en  $c_1$  die kleinste en grootste karakteristieke wortels is van  $(N-1)S \Sigma_0^{-1}$ , en  $l$  en  $u$  die onderste en boonste persentasie-punte van die karakteristieke verdeling is, sodanig dat

$$P(l \leq c_p \leq c_1 \leq u) = 1 - \alpha$$

Dié persentasie-punte is in tabelle van [Pearson en Hartley, 1972] getabelleer. Die spesiale eienskap van die vereniging-snyding toets is dat dit 'n familie van gelyktydige vertrouensintervalle beskikbaar stel vir alle kwadratiese vorms van  $\underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a}$  in die kovariansiematriks. Die  $100(1-2\alpha)\%$  familie besit die algemene interval

$$\frac{\underline{a}'(N-1)S\underline{a}}{u} \leq \underline{a}' \underline{\Sigma} \underline{a} \leq \frac{\underline{a}'(N-1)S\underline{a}}{l} \quad (3.17)$$

Alternatiewelik kan Bonferroni-gelyktydige-intervalle verkry word vir die  $k$  kwadratiese vorms,

$$\underline{a}_1'(N-1)S\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k'(N-1)S\underline{a}_k$$

deur die *stert* waarskynlikhede deur  $k$  te deel. Dit is:

$$\frac{\underline{a}_i'(N-1)S\underline{a}_i}{X_{\alpha_1/k, N-1}^2} \leq \underline{a}_i' \underline{\Sigma} \underline{a}_i \leq \frac{\underline{a}_i'(N-1)S\underline{a}_i}{X_{1-\alpha_1/k, N-1}^2} \quad (3.18)$$

### 3.6 DIE MULTINOMIAAL-GEBASEERDE ATTRIBUUTKONTROLEKAART

#### INLEIDING

In die geval van die p- en np-kaarte is voorsiening gemaak vir twee klassifikasies. Dit is wanneer 'n item aan die spesifikasies voldoen of nie voldoen nie. Voorsiening is nie gemaak indien 'n item in een van meer as twee kategorieë geklassifiseer kan word nie. [Kolarik en Jaisingh, 1987] het families van algemene attribuutkontrolekaarte ontwikkel, gebaseer op die multinomiaalverdeling wat van toepassing is op sorteerprobleme.

Die volgende notasie is van toepassing :

$n$ , die steekproefgrootte

$X_i$ , die  $i^{\text{de}}$  stogastiese veranderlike,  $i = 1, 2, \dots, r$

$n_i$ , positiewe heelgetal met  $\sum_{i=1}^r n_i = n$

$p_i$  die  $i^{\text{de}}$  proporsie met  $p_i > 0$  en  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$

$\bar{p}_i$  is die gestabiliseerde of prosesproporsie  $i$ , met

$\bar{p}_i > 0$  en  $\sum_{i=1}^r \bar{p}_i = 1$ .

#### AANNAMES

- Opeenvolgende items wat ondersoek word, moet onafhanklik van mekaar wees.
- Elke item moet slegs in een van  $r$ -kategorieë geklassifiseer word.
- Die steekproef moet uit 'n kontinue produksieproses geneem word.

#### ONTWIKKELING

Die multinomiaalverdeling kan as volg uitgedruk word :

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_r = n_r)$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$$

(3.19)

Indien  $r = 2$ , vereenvoudig (3.19) na die binomiaalverdeling wat die basis vorm van die p- en np-kaarte [Blank, 1980].

Die gemiddeld en variansie van die  $i$ -de veranderlike in die multinomiaalverdeling is :

$$\mu_i = n p_i$$

en

$$\sigma_i^2 = n p_i (1 - p_i).$$

(3.20)

Deur die gebruikmaking van (3.20) en sigma-limiete kan die families, of stelle van  $r - 1$ ,  $np_i$ -kontrole-kaarte ontwikkel word. Sigma-limiete vir die  $np_i$ -kaarte kan gestel word op veelvoude van  $\sigma_i$ , of waarskynlikheidslimiete kan gebruik word. Laasgenoemde tegniek sal in hierdie afdeling toegepas word [Kolarik en Jaisingh, 1987].

Bewerkingskarakteristieke vir 'n kaartfamilie vir 'n gegewe stel van  $p_i$ 's word bereken met behulp van die volgende verhouding :

$$\beta = \Sigma^* \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r},$$

(3.21)

met  $\Sigma^*$  die som oor alle moontlike kombinasies van  $n_i$ -waardes indien :

$$OKL_i \leq n_i \leq BKL_i, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

en

$$\sum_{i=1}^r n_i = n$$

Die berekening van die tipe I-fout  $\alpha$  is as volg :

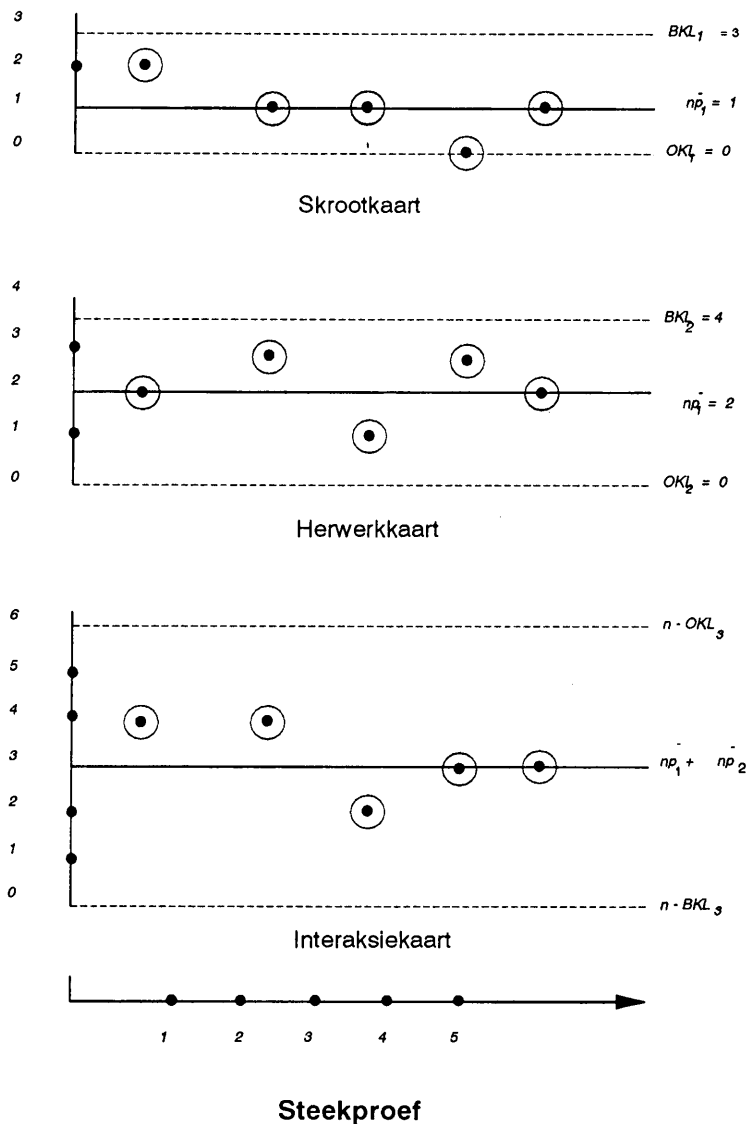
$$\alpha = 1 - \Sigma^* \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \dots \bar{p}_r^{n_r}$$

(3.22)

## TOEPASSING

Beskou die geval vir  $r = 3$ , waar 'n driedimensionele kontrolekonsep ingebring word. In die praktyk mag 'n familie van drie kaarte met kontrolelimiete op 'n gespesifiseerde aantal items ontwikkel word.

Beskou 'n voorbeeld waar items afkomstig is uit 'n proses wat in een van drie kategorieë (naamlik aanvaarbaar, herwerkbaar en skroot) geklassifiseer kan word na inspeksie. Die aantal herwerkbare en skrootitems word dan gestip. Die families van  $np_i$ -kaarte word dan opgestel soos in Figuur 3.8 en geïnterpreteer vir kontroledoelindes.



**Figuur 3.8 :** Families van  $np_i$ -kaarte

In die geval waar  $r = 3$  is, sal die proses onder beheer wees indien die volgende voorwaardes bevredig word :

$$OKL_1 \leq x_1 \leq BKL_1$$

$$OKL_2 \leq x_2 \leq BKL_2$$

$$OKL_3 \leq x_3 \leq BKL_3.$$

(3.23)

Die laaste uitdrukking kan uitgedruk word in terme van  $OKL_3, BKL_3$  en  $x_1 + x_2$ . Omdat  $x_3 = n - x_1 - x_2$

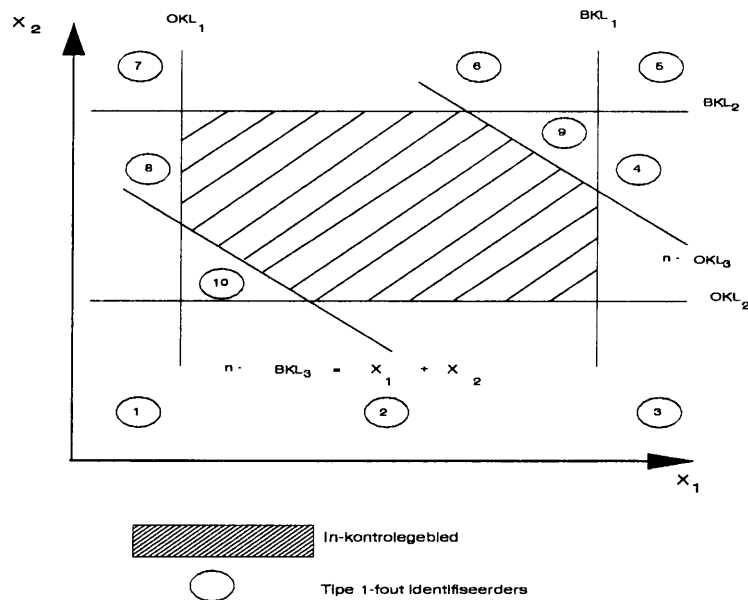
volg dat :

$$OKL_3 \leq n - x_1 - x_2 \leq BKL_3$$

en derhalwe dat

$$n - BKL_3 \leq x_1 + x_2 \leq n - OKL_3$$

Die resultaat is 'n nie-reghoekige aanvaardingsgebied of 'n "in-kontrolegebied". Vir die meeste gevalle sal dit 'n heksogonale gebied wees wanneer dit gestip word op die asse  $x_1$  en  $x_2$ . Sien Figuur 3.9.



Figuur 3.9 : In-kontrolegebied vir 'n np-kaart met  $r=3$

Konseptueel sal die bewerkings-karakteristieke vir die familie van  $np_i$ -kaarte 'n keuringsoppervlak wees, terwyl dit vir  $r = 2$ , die binomiaal geval, eerder 'n keuringskromme sal wees.

Die basiese ontwikkeling vir  $r \geq 4$  is analoog aan die geval vir  $r = 3$ . Soos wat  $r$  toeneem, neem die aantal  $np_i$ -kaarte toe, asook die hoeveelheid werk om die kaarte in stand te hou. Die konseptuele bewerkingskarakteristieke is van hoër dimensie as 'n oppervlak en word 'n abstrakte vorm. Die bewerkingskarakteristieke is dieselfde as vir  $r = 3$ , maar die aantal berekeninge neem geweldig toe soos wat  $r$  toeneem.

### GEVOLGTREKING

Die uitbreiding van 'n binomiaal- na 'n multinomiaalbasis laat ruimte vir situasies waar items in meer as twee kategorieë geklassifiseer kan word na afloop van 'n inspeksie. Dié toepassing is veral van toepassing in sorteringsbewerkings waar dienste as goed, redelik of swak geklassifiseer kan word. Die wiskunde betrokke by  $np_i$ -kaartfamilies is redelik eenvoudig. Kaarte kan maklik opgestel en onderhou word. Die aantal berekeninge neem egter toe as die aantal klassifikasies en die steekproefgrootte toeneem.

## 3.7 MEERVERANDERLIKE KUSOM-PROSEDURES

### TEORIE VAN KUSOMME

Aanvaar 'n reeks van stogastiese veranderlikes  $x_1, x_2, \dots$  word waargeneem, waarvan die eerste  $x_1, \dots, x_{m-1}$  afkomstig is uit 'n "goeie" verdeling met verdelingsfunksie  $F_g$ , en die volgende  $x_m, x_{m+1}, \dots$  afkomstig is uit 'n "swak" verdeling met verdelingsfunksie  $F_s$ ,  $F_g \neq F_s$ . Beide die verdelingsfunksies is bekend, maar  $m$  is onbekend. Dit is die skuif wat die verdelingsfunksie op 'n onbekende tydstip maak. Die doel is om te bepaal of, en indien wel, waar die skuif plaasvind.

Volgens [Crosier, 1988] word 'n sein gegee indien 'n skuif vir die eerste keer plaasvind as :

$$S_n = \sum_{i=1}^n \log \frac{f_s(x_i)}{f_g(x_i)} - \min_{k \leq n} \sum_{i=1}^k \log \frac{f_s(x_i)}{f_g(x_i)} > L,$$

(3.24)

waar  $f_s$  en  $f_g$  die digthede ooreenkomstig tot  $F_s$  en  $F_g$  respektiewelik is.  $L$  is 'n konstante wat die prosedure se bewerkingskarakteristieke bepaal en is onafhanklik van  $n$ .

Die statistiek  $S_n$  kan rekursief as volg bereken word :

$$S_n = \text{maks} \left\{ S_{n-1} + \log \frac{f_s(x_n)}{f_g(x_n)}, 0 \right\} \quad (3.25)$$

Vergelyking (3.25) kan herskryf word deur  $\log \left( \frac{f_s(x_n)}{f_g(x_n)} \right)$  en  $L$  te deel deur dieselfde konstante. Die resultaat

is 'n ekwivalente prosedure wat makliker is om te gebruik. Die aanvangswaarde van die kusom  $S_0$  is 'n getal tussen 0 en  $L$ . Die fundamentele punt van Crosier en Lukas, 1982, is dat 'n versigtige keuse van  $S_0$ , 'n kusomwaarde met verbeterde eienskappe gee. Die waarde van Vergelyking 3.25 is dat dit vir verskeie algemene verdelings reduceer na 'n baie eenvoudige prosedure.

Veronderstel dat  $\underline{x}_n$  afkomstig is uit òf 'n meerveranderlike normaalverdeling met 'n "goeie" gemiddeld  $\underline{\mu}_g$ , òf 'n meerveranderlike verdeling met 'n "swak" gemiddeld  $\underline{\mu}_s$ . Dit is,  $F_g$  en  $F_s$  is die verdelingsfunksies van meerveranderlike normaalverdelings met vektore van gemiddeldes  $\underline{\mu}_g$  en  $\underline{\mu}_s$  en met bekende gemeenskaplike kovariansiematriks  $\Sigma$ . Alle vektore is  $(p \times 1)$  en alle matrikse  $(p \times p)$ .

Vir die toepassing is :

$$\begin{aligned} f_s(\underline{x}_n)/f_g(\underline{x}_n) &= \frac{(2\pi)^{-p/2} |\Sigma|^{-1/2} \text{eksp}(-0.5(\underline{x}_n - \underline{\mu}_s)'\Sigma^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_s))}{(2\pi)^{-p/2} |\Sigma|^{-1/2} \text{eksp}(-0.5(\underline{x}_n - \underline{\mu}_g)'\Sigma^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_g))} \\ &= \frac{\text{eksp}(-0.5(\underline{x}_n - \underline{\mu}_s)'\Sigma^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_s))}{\text{eksp}(-0.5(\underline{x}_n - \underline{\mu}_g)'\Sigma^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_g))} \end{aligned}$$

Deur logaritmes te neem is :

$$\log(f_s(\underline{x}_n)/f_g(\underline{x}_n)) = (\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g)'\Sigma^{-1}\underline{x}_n - 0.5(\underline{\mu}_s + \underline{\mu}_g)'\Sigma^{-1}(\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g) \quad (3.26)$$

Indien (3.26) in vergelyking (3.25) vervang word, kan  $S_n$  herskryf word as :

$$S_n = \text{maks}(S_{n-1} + \underline{a}'\underline{x}_n - K, 0) > H, \quad (3.27)$$

waar

$$\underline{a}' = \frac{(\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g)' \Sigma^{-1}}{\left( (\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g) \right)^{1/2}}$$

en

$$K = 0.5 \frac{(\underline{\mu}_s + \underline{\mu}_g)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g)}{\left( (\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g) \right)^{1/2}}$$

Die veranderlike  $\underline{a}' \underline{x}_n$  besit 'n eenveranderlike normaalverdeling met 'n variansie van 1. Die grootheid  $\underline{a}' \underline{x}_n$  is 'n lineêre kombinasie van normaal verdeelde stogastiese veranderlikes wat gevolglik normaal verdeel is. 'n Proses sal onder statistiese beheer wees indien die gemiddeld  $\underline{a}' \underline{\mu}_g$  is, en in 'n swak toestand indien die gemiddeld  $\underline{a}' \underline{\mu}_s$  is. Dié afleiding is gemodelleer op die afleiding van diskriminantanalise deur [Anderson, 1984].

Definieer die nie-sentrale parameter :

$$D = \sqrt{(\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g)' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}_s - \underline{\mu}_g)} \tag{3.28}$$

Die kusom om 'n skuif in die gemiddeld van 'n meerveranderlike normaalverdeling op te spoor, kan dan as volg geskryf word :

$$S_n = \text{maks}(S_{n-1} + \underline{a}' (\underline{x}_n - \underline{\mu}_g) - 0.5D, 0) > H, \tag{3.29}$$

waar  $\underline{a}' (\underline{x}_n - \underline{\mu}_g)$  'n standaard normaalverdeling besit wanneer  $\underline{x}_n$  'n gemiddeld het van  $\underline{\mu}_g$ .

Wanneer die gemiddeld van  $\underline{x}_n$ ,  $\underline{\mu}_s$  is, besit  $\underline{a}' (\underline{x}_n - \underline{\mu}_g)$  'n eenveranderlike normaalverdeling met gemiddeld  $D$  en variansie 1. Dus om 'n skuif in die gemiddeld van 'n meerveranderlike normaal stogastiese veranderlike op te spoor, reduceer die kusomprosedure na 'n eenveranderlike normaal kusomprosedure.

Die teorie van die eenveranderlike kusomme kan vir die berekening van  $H$ , die gemiddelde lopieslengte (GLL) en die aanvangswaarde vir die kusom  $S_0$ , kan net so vir die meerveranderlike geval gebruik word [Healy, 1987].

Na elke tydperioede, word  $S_n$  vergelyk met 'n vaste grens  $H$ . Dié prosedure is baie eenvoudig aangesien elke beslissing afhang van die vorige kusomwaarde  $S_{n-1}$  en die huidige waarneming  $x_n$ . Nadat 'n skuif opgespoor is word die kusomwaarde gestel op  $S_0$ .  $K$  lê tussen  $\mu_g$  en  $\mu_s$ . Vir eenveranderlike kusomprosedures word  $K$  soms gekies as  $\mu_g$ . Die kusom is dus veronderstel om willekeurig klein bewegings in die onderliggende gemiddeld op te tel. Dié keuse sal egter òf te veel alarms gee, òf so groot waarde van  $H$  vereis dat dit stadig sal wees om skuiwe op te tel [Woodall en Ncube, 1985]. Hoe groter  $H$  is, hoe langer is die gemiddelde lopieslengte GLL. Genoemde groothede kan in tabelle afgelees word [Crosier en Lucas, 1982].

Die vermoë van die kusomprosedure om te onderskei tussen  $\underline{\mu}_g$  en  $\underline{\mu}_s$  is afhanklik van  $\underline{\mu}_g, \underline{\mu}_s$  en  $\Sigma$ , alleenlik deur  $D$ . Dit is nie afhanklik van  $p$ , die aantal faktore nie.

## TOEPASSING OP DIE KOVARIANSIEMATRIKS VAN 'N MEERVERANDERLIKE NORMAALVERDELING

Gestel  $\underline{x}_n$  is afkomstig uit òf 'n meerveranderlike normaalverdeling met 'n "goeie" kovariansiematriks  $\Sigma$ , òf 'n meerveranderlike normaalverdeling met 'n "slegte" kovariansiematriks  $C\Sigma$ . Dit is,  $F_g$  en  $F_s$  is meerveranderlike normaalverdelings met kovariansiematriks  $\Sigma$  en  $C\Sigma$  onderskeidelik, met gemeenskaplike vektor van gemiddeldes  $\underline{\mu}$ . Dié tipe verskuiwing van  $\Sigma$  na  $C\Sigma$  is die eenvoudigste verskuiwing moontlik. Dit stel naamlik dat al die variansies proporsioneel skuif en dat die korrelasies tussen die veranderlikes dieselfde bly. Dié tipe skuif kan plaasvind as iets in die vervaardigingsproses plaasvind wat al die veranderlikes beïnvloed.

Alle vektore is  $(p \times 1)$  en alle matrikse is  $(p \times p)$ . Dus is :

$$\begin{aligned} f_s(\underline{x}_n)/f_g(\underline{x}_n) &= \frac{(2\pi)^{-p/2} |C\Sigma|^{-1/2} \exp(-0.5(\underline{x}_n - \underline{\mu})'(C\Sigma)^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu}))}{(2\pi)^{-p/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp(-0.5(\underline{x}_n - \underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu}))} \\ &= C^{-p/2} \exp(-0.5(\underline{x}_n - \underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu})(1/C - 1)) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Deur die logaritme te neem van (3.30) volg dat :

$$\log f_s(\underline{x}_n)/f_g(\underline{x}_n) = -p/2 \log(C) + 0.5(\underline{x}_n - \underline{\mu})' \Sigma^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu})(1 - 1/C)$$

en in (3.25) te vervang, volg dat

$$S_n = maks(S_{n-1} + (\underline{x}_n - \underline{\mu})' \Sigma^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu}) - K, 0) > H,$$

$$\text{waar } K = p \log(C) \{C/(C - 1)\}.$$

$$\text{Stel } \underline{y}_n = (\underline{x}_n - \underline{\mu})' \Sigma^{-1}(\underline{x}_n - \underline{\mu}).$$

Die voorafgaande prosedure is 'n kusom van  $\underline{y}_n$ , wat Hotelling se  $T^2$ -statistiek is. [Pignatiello en

Runger, 1990] het 'n kusom van  $\underline{y}_n$ 's voorgestel om 'n skuif in die gemiddeld en nie in die kovariansiematriks nie voor te stel. Net so het [Crosier, 1988] voorgestel dat  $\sqrt{\underline{y}_n}$  gebruik word in 'n kusom vir die gemiddeld.

Die voorafgaande prosedure aanvaar dat waarnemings een op 'n keer inkom en dat die kusomstatistieke opgedateer word met elke nuwe waarneming. Gestel nou dat  $m$ -waarnemings op elke tydstip aankom en stel  $x_{n,i}$  is die  $i$ -de waarneming op tydstip  $n$ . Dan is die hergeskaleerde kusomprosedure volgens [Healy, 1987] :

$$S_n = maks\left(S_{n-1} + \sum_{i=1}^m (x_{n,i} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1}(x_{n,i} - \underline{\mu}) - K, 0\right) > H,$$

$$\text{waar } K = pm \log(C) \{C/(C - 1)\}.$$

### 3.8 SAMEVATTING

In hierdie hoofstuk is 'n kort oorsig gegee van bestaande meerveranderlike kontrolekaarte, uitbreidings van bekende eenveranderlike kontrolekaarte. Alhoewel die toepassing van die meerveranderlike kaarte nie te moeilik is nie, sal dit 'n ietwat vreemde benadering wees vir die alledaagse gebuiker in die praktyk. Vir suksesvolle toepassing en aanvaarding van die meerveranderlike benadering in die praktyk, sal aangetoon moet word dat dié benadering nie net 'n verbetering is op die bekende eenveranderlike kaarte, maar ook maklik implementeerbaar is.

Die vernaamste kaarte, óf die wat die meeste in die praktyk gebruik word, is dié vir die beheer van die prosesgemiddeld en die prosesverspreiding. In die eenveranderlike geval soos vervat in Hoofstuk 2 is dit die  $\bar{X}$ - en S-kaart, terwyl dit in die meerveranderlike geval, die  $T^2$ -kaart en die verskillende S-kaarte is.

In die hoofstukke wat volg word slegs aandag gegee aan bogenoemde kaarte. Vergelykings word getref tussen een- en meerveranderlike benaderings, en tussen die verskillende meerveranderlike kaarte vir die beheer van die prosesverspreiding. Die vergelykings wat getref word is gegrond op simulاسies wat uitgevoer word met die veronderstelling dat 'n proses presies op standaard funksioneer en wanneer die proses afwyk vanaf die standaard, en die aanname van normaliteit.

## HOOFSTUK 4

### SIMULASIES MET DIE VERONDERSTELLING DAT DIE PROSES ONDER BEHEER IS

#### 4.1 INLEIDING

In hierdie hoofstuk word die resultate bespreek van simulاسies wat gedoen is op van die groothede gedefinieer in Hoofstukke 2 en 3. Die simulاسies is onder die nulhipotese uitgevoer met die uitgangspunt dat die proses onder statistiese beheer is. Die rede hiervoor is om die gedrag van dié groothede te bepaal onder normale omstandighede.

Data is gesimuleer uit 'n normaalverdeling, waarna die een- en meerveranderlike kontrolekaarte vir die beheer van die prosesgemiddeld en prosesverspreiding toegepas en geëvalueer is.

Indien bevind is dat die proses meerveranderlik buite beheer is, is Roy se vereniging-snyding-metode, asook die Bonferroni-metode van gelyktydige intervalle gebruik om te bepaal welke veranderlike(s) vir dié toestand verantwoordelik is.

Die rekenaarpakket SAS [SAS/IML, 1985], is deurgaans gebruik vir die simulاسies. 'n Program vir twee veranderlikes wat maklik uitgebrei kan word na meerdere veranderlikes is in Bylae A vervat.

Aangesien die toetsgrootheid geassosieer met die  $T^2$ -kaart onder die aanname van meerveranderlike normaliteit 'n eksakte verdeling besit, is die resultate van hierdie gedeelte van die simulاسiestudie gebruik om die korrektheid van die rekenaarprogram [Bylae A] te kontroleer. Dit dien verder gemeld te word dat die verdelings van die verskillende toetsgrootthede gebaseer op funksies van die steekproefkovariansiematriks  $S$  asimptoties geldig is. Die klein steekproef-gedrag van die kaarte gebaseer op  $S$  moet derhalwe empiries bestudeer word.

#### 4.2 UITLEG VAN DIE SIMULASIES

##### 4.2.1 AGTERGROND

Die data is gegenerer uit 'n normaalverdeling met gegewe parameters,  $\underline{\mu}_0$  en  $\Sigma_0$ . Die volgende simbole met hul betekenis is deurgaans gebruik:

$p$  : die aantal veranderlikes,

$n$  : die steekproefgrootte,

$\alpha$  : die peil van betekenis en

$m$  : Die aantal steekproewe van grootte  $n$ , waarby  $m = 2000$  deurgaans gebruik is.

Steekproefgroottes van 10, 15 en 25 is gebruik in kombinasies van 2, 3 en 5 veranderlikes. Daar is deurgaans met 'n 5 % peil van betekenis gewerk. Enkele simulاسies vir  $\alpha = 10\%$  is vir drie veranderlikes gedoen. Die tendens van bevindings was dieselfde as in die geval van 'n 5 % peil van betekenis.

Die tersaaklike parameters wat gebruik is vir die generering van die data is:

$$\underline{\mu}_0 = (11.58 \quad 6.55 \quad 10.46 \quad 7.16 \quad 3.28)$$

en

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1.185 & 0.033 & -0.2518 & 0.5563 & 0.2174 \\ 0.033 & 0.093 & 0.1208 & 0.0939 & -0.0015 \\ -0.2518 & 0.1208 & 1.6600 & 0.3016 & 0.0499 \\ 0.5563 & 0.0939 & 0.3016 & 1.2196 & 0.1031 \\ 0.2174 & -0.0015 & 0.0499 & 0.1031 & 0.8062 \end{pmatrix}$$

Vir 2 en 3 veranderlikes is telkens die eerste subgedeeltes van  $\underline{\mu}_0$  en  $\Sigma_0$  gebruik.

#### 4.2.2 TOETS VIR DIE BEHEER VAN DIE PROSESGEMIDDELD

Die meerveranderlike benadering

Beskou die volgende hipotese :

$$H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0,$$

en die toetsgrootheid

$$T^2 = n(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1}(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu}_0),$$

waarby

$S^{-1}$  die inverse van die steekproefkovariansiematriks is,

$\underline{\mu}_0$  die populasie vektor van gemiddeldes (bekend),

$\bar{\underline{x}}$  die vektor van steekproefgemiddeldes en

$n$  die steekproefgrootte is.

Indien bevind is dat 'n steekproef buite beheer is volgens die  $T^2$ -kaart, is Roy se vereniging-snydingmetode en Bonferroni-metode gebruik om te bepaal welke veranderlike(s) vir dié toestand verantwoordelik is.

Dit is:

Roy se vereniging-snydingmetode

$$\left( \underline{a} \bar{\underline{x}} - T_\alpha \sqrt{\frac{\underline{a} S \underline{a}}{n}}, \underline{a} \bar{\underline{x}} + T_\alpha \sqrt{\frac{\underline{a} S \underline{a}}{n}} \right)$$

Bonferroni-metode

$$\left( \underline{a} \bar{\underline{x}} - t_{\alpha/2p} \sqrt{\frac{\underline{a} S \underline{a}}{n}}, \underline{a} \bar{\underline{x}} + t_{\alpha/2p} \sqrt{\frac{\underline{a} S \underline{a}}{n}} \right)$$

Sien Hoofstuk 3 vir meer besonderhede oor die meerveranderlike benadering vir die beheer van die prosesgemiddeld.

### Die eenveranderlike benadering

Soos vervat in Hoofstuk 2 word daar vir elke veranderlike 'n afsonderlike stel kontrolelimiete gekonstrueer deur Vergelyking 2.2 of 2.3 te gebruik.

Indien 'n steekproefgemiddeld vir 'n bepaalde veranderlike buite die limiete volgens bogenoemde vergelykings val, is die proses buite beheer.

## 4.2.3 TOETS VIR DIE BEHEER VAN DIE PROSESPERSPREIDING

### Die meerveranderlike benadering

Beskou die hipotese :

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0$$

Indien  $H_0$  verwerp word, is die proses meerveranderlik buite beheer. Die Det(S), S en die Log|S|-kaart is gebruik vir die toetsing van bogenoemde hipotese. Die Det(S)-kaart is egter nie vir  $p > 2$  beskou nie, aangesien onbevredigende klein steekproef ( $n \leq 25$ ) resultate verkry is wanneer die kontrolelimiete (3.13) in die algemene vorm vir  $p$  veranderlikes gebruik word.

Vir die Log|S|-kaart is 'n loodstudie vooraf gedoen om die parameters te beraam vir die konstruksie van die kontrolelimiete. Data is uit 'n normaalverdeling gegeneer met die bekende parameters  $\mu_0$  en  $\Sigma_0$  vir  $p = 2, 3$  en  $5$  met 'n steekproefgrootte van  $15$ . 'n Honderd steekproewe is onder beheer gegeneer, waarna die beraamers  $\hat{\bar{y}}$  en  $\hat{s}_y$  bepaal is vir die konstruksie van die kontrolelimiete volgens Vergelyking 3.15 in Hoofstuk 3. Met behulp van dié beraamers is die kontrolelimiete in Tabel 4.6 gekonstrueer.

Net soos in die geval vir die beheer van die prosesgemiddeld, is Roy se vereniging-snyding-metode en die Bonferroni-metode gebruik om die tersaaklike parameter(s) te identifiseer wat die oorsaak is vir die buite-beheer-toestand in die meerveranderlike geval. Dié meervoudige vergelykingsprosedures is net op die buite-beheer situasies van die Det(S)- en S-kaart toegepas.

Dit is :

Roy se vereniging-snyding-metode

$$\frac{\underline{a}(n-1)S\underline{a}}{u} \leq \underline{a}'\Sigma\underline{a} \leq \frac{\underline{a}(n-1)S\underline{a}}{l}$$

waarby  $u$  en  $l$  getabelleer is in Pearson and Hartley (1972).

Bonferroni-metode

$$\frac{\underline{a}(n-1)S_{\underline{a}}}{X_{\alpha_1/p, n-1}^2} \leq \underline{a} \leq \frac{\overline{a}(n-1)S_{\overline{a}}}{X_{1-\alpha_2/p, n-1}^2}$$

waarby  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ .

Sien Hoofstuk 3 vir meer volledige inligting betreffende die grootthede.

### Die eenveranderlike benadering

Op dieselfde beginsel as in die geval vir die beheer van die prosesgemiddeld, word afsonderlike kontrolelimiete vir elke veranderlike gekonstrueer met behulp van Vergelyking 2.5 in Hoofstuk 2.

Elke veranderlike word afsonderlik beheer en indien 'n steekproef vir 'n veranderlike buite beheer is, is die proses buite beheer.

In die resultate wat later volg, word die een- en meerveranderlike benaderings vir beide die beheer van die prosesgemiddeld en prosesverspreiding vergelyk betreffende hul onderskeidingsvermoë. Dit wil sê, die aantal kere wat die proses gestop moes word, met die veronderstelling dat die proses op standaard funksioneer. Dié vergelyking word getref vir  $p = 2$  en  $3$ .

## 4.3 KRITIEKE WAARDES VIR DIE VERSKILLENDE GROOTHEDE

### 4.3.1 BEHEER VAN DIE PROSESGEMIDDELD

Tabel 4.1 : Kritieke waardes vir die  $T^2$ -kaart

| n  | $T_{\alpha, n-1}^2$ |       |       |
|----|---------------------|-------|-------|
|    | p                   |       |       |
|    | 2                   | 3     | 5     |
| 10 | 10.03               | 16.78 | 45.45 |
| 15 | 8.21                | 12.22 | 23.31 |
| 25 | 7.14                | 9.98  | 16.26 |

### Roy se vereniging-snyding-metode

Die  $T_{\alpha}$ -waardes verkry uit die kritieke waardes vir  $T^2$ -kaart is gebruik vir die konstruksie van die vertrouensintervalle.

Tabel 4.2 : Kritieke waardes vir die Bonferroni-metode

| n  | $t_{(\alpha/2)p, n-1}$ |       |       |
|----|------------------------|-------|-------|
|    | p                      |       |       |
|    | 2                      | 3     | 5     |
| 10 | 2.685                  | 2.934 | 3.250 |
| 15 | 2.510                  | 2.718 | 2.977 |
| 25 | 2.391                  | 2.574 | 2.797 |

Tabel 4.3 : Kontrolelimiete vir die  $\bar{X}$ -kaart

| n  | Veranderlike |       |      |      |      |       |
|----|--------------|-------|------|------|------|-------|
|    | 1            |       | 2    |      | 3    |       |
|    | OKL          | BKL   | OKL  | BKL  | OKL  | BKL   |
| 10 | 10.90        | 12.25 | 6.36 | 6.73 | 9.66 | 11.25 |
| 15 | 11.02        | 12.13 | 6.39 | 6.70 | 9.80 | 11.11 |
| 25 | 11.15        | 12.00 | 6.43 | 6.66 | 9.95 | 10.96 |

Die eenveranderlike kontrolelimiete is nie vir  $p > 3$  toegepas nie.

#### 4.3.2 BEHEER VAN DIE PROSESPREIDING

Tabel 4.4 : Kontrolelimiete vir die Det(S)-kaart

| n  | OKL   | BKL   |
|----|-------|-------|
| 10 | 0.383 | 1.602 |
| 15 | 0.494 | 1.497 |
| 25 | 0.593 | 1.377 |

LW : Die Det(S)-kaart is net vir  $p = 2$  toegepas.

Tabel 4.5 : Kontrolelimiete vir die meerveranderlike S-kaart

| n           | Veranderlikes |       |       |        |       |        |
|-------------|---------------|-------|-------|--------|-------|--------|
|             | 2             |       | 3     |        | 5     |        |
|             | OKL           | BKL   | OKL   | BKL    | OKL   | BKL    |
| 10,15 en 25 | 0.216         | 9.349 | 1.237 | 14.449 | 6.262 | 27.489 |

**Tabel 4.6 :** Kontrolelemiete vir die Log|S|-kaart

| p | OKL    | BKL   |
|---|--------|-------|
| 2 | -1.66  | -0.53 |
| 3 | -1.75  | -0.44 |
| 5 | -3.098 | -0.86 |

Die kontrolelimiete in bostaande tabel vir die Log|S|-kaart geld vir  $n = 10, 15$  en  $25$ .

**Tabel 4.7 :** Kritieke waardes vir Roy se vereniging-snyding-metode

| n  | p     |       |       |      |       |      |
|----|-------|-------|-------|------|-------|------|
|    | 2     |       | 3     |      | 5     |      |
|    | u     | l     | u     | l    | u     | l    |
| 10 | 21.06 | 1.92  | 24.31 | 1.16 | 29.75 | 0.57 |
| 15 | 29.96 | 5.06  | 33.80 | 3.72 | 40.15 | 2.07 |
| 25 | 43.67 | 11.37 | 48.27 | 9.28 | 55.78 | 6.49 |

**Tabel 4.8 :** Kritieke waardes vir die Bonferroni-metode

| n  | p                         |                         |                           |                         |                           |                         |
|----|---------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
|    | 2                         |                         | 3                         |                         | 5                         |                         |
|    | $X_{1-\alpha_1/p, n-1}^2$ | $X_{\alpha_2/p, n-1}^2$ | $X_{1-\alpha_1/p, n-1}^2$ | $X_{\alpha_2/p, n-1}^2$ | $X_{1-\alpha_1/p, n-1}^2$ | $X_{\alpha_2/p, n-1}^2$ |
| 10 | 21.03                     | 2.21                    | 22.16                     | 1.98                    | 23.60                     | 1.73                    |
| 15 | 28.47                     | 4.87                    | 29.78                     | 4.49                    | 31.46                     | 4.07                    |
| 25 | 42.16                     | 11.19                   | 43.69                     | 10.57                   | 45.67                     | 9.88                    |

**Tabel 4.9 :** Kontrolelimiete vir die eenveranderlike S-kaart

| n  | OKL  | BKL   |
|----|------|-------|
| 10 | 2.70 | 19.01 |
| 15 | 5.63 | 26.12 |
| 25 | 12.4 | 39.36 |

Die kontrolelimiete in bostaande tabel vir die eenveranderlike S-kaart geld vir  $p = 2, 3$  en  $5$ .

## 4.4 RESULTATE VERKRY UIT DIE SIMULASIESTUDIES

### 4.4.1 BEHEER VAN DIE PROSESGEMIDDELD

a.)  $p=2$

Tabel 4.10 : Resultate vir die  $T^2$ -kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 88 (4.4)                        |
| 15 | 99 (4.9)                        |
| 25 | 102 (5.1)                       |

Die getalle tussen hakies, dui die persentasie steekproewe aan wat buite beheer was.

Tabel 4.11 : Resultate van die meervoudige vergelykingsprosedures

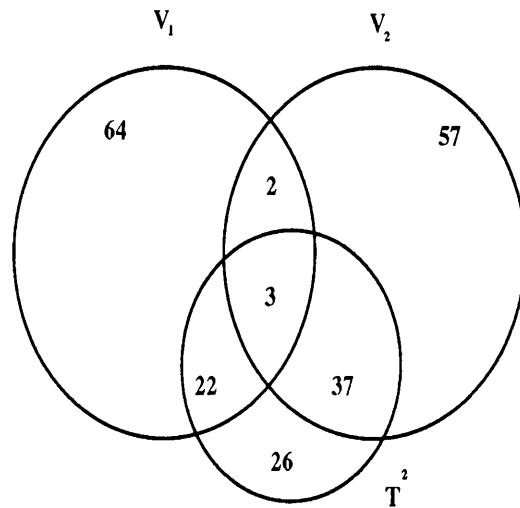
|                            | Roy se vereniging-snyding-metode |    |    | Bonferroni-metode |    |    |
|----------------------------|----------------------------------|----|----|-------------------|----|----|
|                            | n                                |    |    | n                 |    |    |
| Veranderlikes buite beheer | 10                               | 15 | 25 | 10                | 15 | 25 |
| 1                          | 19                               | 21 | 31 | 25                | 30 | 39 |
| 2                          | 28                               | 31 | 23 | 40                | 41 | 34 |
| 1,2                        | 0                                | 1  | 0  | 1                 | 1  | 2  |

Tabel 4.12 : Resultate vir die  $\bar{X}$ -kaart

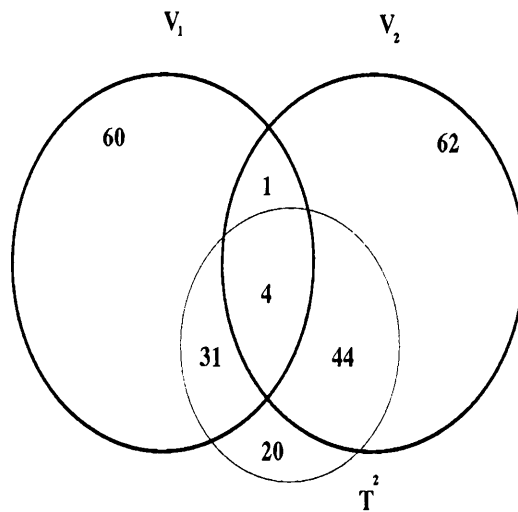
| Veranderlikes buite beheer | n         |            |            |
|----------------------------|-----------|------------|------------|
|                            | 10        | 15         | 25         |
| 1                          | 86        | 91         | 109        |
| 2                          | 94        | 106        | 111        |
| 1,2                        | 5         | 5          | 7          |
| Totaal                     | 185 (9.3) | 202 (10.1) | 227 (11.4) |

In bostaande tabelle en al die tabelle wat volg, dui die syfer 1 in kolom 1 aan dat slegs die eerste veranderlike buite beheer is en die syfer 2, dat slegs die tweede veranderlike buite beheer is. Die geval 1,2 is 'n aanduiding dat beide die veranderlikes gelyktydig buite beheer is.

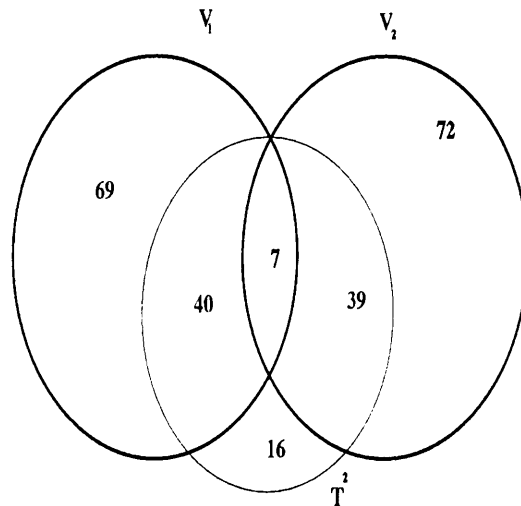
Die resultate in terme van gebeurtenisse, asook 'n vergelyking tussen die een- en meerveranderlike benaderings word grafies in Figure 4.1, 4.2 en 4.3 vir die onderskeie steekproefgroottes voorgestel.



**Figuur 4.1** : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 10$   
 ( $\bar{X}$ -kaart teenoor die  $T^2$ -kaart)



**Figuur 4.2** : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 15$   
 ( $\bar{X}$ -kaart teenoor die  $T^2$ -kaart)



**Figuur 4.3** : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 25$   
 $(\bar{X}$ -kaart teenoor die  $T^2$ -kaart)

Die resultate in die tabelle asook in Figure 4.1, 4.2 en 4.3 is onderling uitsluitende gebeurtenisse waarby

$V_1$  : die gebeurtenis is vir die  $\bar{X}$ -kaart wanneer die eerste veranderlike buite beheer was,

$V_2$  : die gebeurtenis is vir die  $\bar{X}$ -kaart wanneer die tweede veranderlike buite beheer was en

$T^2$  : die gebeurtenis wanneer die proses volgens Hotelling se  $T^2$ -kaart buite beheer was.

Volgens die eenveranderlike benadering is die proses ongeveer twee keer meer gestop (buite beheer), as in die geval van die meerveranderlike benadering, wat in ooreenstemming is met die teoretiese resultate in hierdie verband.

Vir elk van die gebeurtenisse in die vendiagramvoorstellings is die gemiddelde afwykings vir 'n steekproef, vir die veranderlikes van belang bereken.

Met ander woorde, indien 'n steekproef buite beheer is, is die absolute verskil tussen dié steekproef se vektor van gemiddeldes en die populasie vektor van gemiddeldes,  $\underline{\mu}_0$  bereken. Dié gemiddelde afwykings is dan gebruik om vir 'n bepaalde gebeurtenis onder-en bogrenswaardes vir die veranderlikes te bereken. Die doel van die oefening was om te poog om wysigings aan die konstruksie van die limiete vir die  $\bar{X}$ -kaart aan te bring wanneer twee veranderlikes gelyktydig beheer moet word, ten eide die "onnodige" *buite-beheer* situasies te verminder. Die resultate word in Tabel 4.13 weergegee. Sien Tabel 4.3 vir die oorspronklike kontrolelimiete vir die  $\bar{X}$ -kaart.

Die **gunstigste** gebeurtenis behoort die gevalle te wees waar die proses volgens **beide** benaderings buite beheer is. Dit is die gebeurtenisse  $V_1, T^2$ ,  $V_2, T^2$  en  $V_1, V_2, T^2$ . Vir die laaste gebeurtenis het die twee benaderings egter baie min in gemeen betreffende die aantal kere wat die proses buite beheer was. Vir die gebeurtenisse  $V_1, T^2$  en  $V_2, T^2$  is onderskeidelik 3, 3.8 en 4% steekproewe vir  $n = 10, 15$  en  $25$  buite beheer. 'n Konstruksie van die limiete soos in Tabel 4.13 vereis kleiner  $\alpha$ -waardes. Dié waardes word in Tabel 4.14 gegee.

**Tabel 4.13** : Kontrolelimiete vir die verskillende gebeurtenisse

| GEBEURTENIS | n           |       |             |      |             |       |             |      |             |       |             |     |
|-------------|-------------|-------|-------------|------|-------------|-------|-------------|------|-------------|-------|-------------|-----|
|             | 10          |       |             |      | 15          |       |             |      | 25          |       |             |     |
|             | $\bar{X}_1$ |       | $\bar{X}_2$ |      | $\bar{X}_1$ |       | $\bar{X}_2$ |      | $\bar{X}_1$ |       | $\bar{X}_2$ |     |
|             | OKL         | BKL   | OKL         | BKL  | OKL         | BKL   | OKL         | BKL  | OKL         | BKL   | OKL         | BKL |
| $V_1, T^2$  | 10.72       | 12.44 | -           | -    | 10.88       | 12.27 | -           | -    | 11.03       | 12.13 | -           | -   |
| $V_2, T^2$  | -           | -     | 6.31        | 6.79 | -           | -     | 6.35        | 6.74 | -           | -     | 6.4         | 6.7 |

**Tabel 4.14** :  $\alpha$ -waardes vir nuwe kontrolelimiete vir die  $\bar{X}$ -kaart

| Gebeurtenis | $\alpha$ |       |       |
|-------------|----------|-------|-------|
|             | n        |       |       |
|             | 10       | 15    | 25    |
| $V_1, T^2$  | 0.034    | 0.028 | 0.018 |
| $V_2, T^2$  | 0.032    | 0.026 | 0.022 |

Die  $\alpha$ -waardes wat in Tabel 4.14 gegee word is kleiner as die gestelde 5% wat sal mee bring dat minder steekproewe eenveranderlik buite beheer is.

Verdere simulasies, asook 'n ondersoek na relevante literatuur sal in dié verband uitgevoer moet word. Die doel van so 'n ondersoek is om 'n gewysigde strategie voor te stel vir die gebruik van eenveranderlike kontrolekaarte om die statistiese beheer van verskeie veranderlikes te bewerkstellig. 'n Gevaar ontstaan egter in die gebruik van die gewysigde eenveranderlike kontrolelimiete wanneer 'n verskuiwing in die prosesgemiddeld plaasvind.

b.)  $p=3$

Tabel 4.15 : Resultate vir die  $T^2$ -kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 90 (4.5)                        |
| 15 | 96 (4.8)                        |
| 25 | 103 (5.2)                       |

Tabel 4.16 : Resultate van die meervoudige vergelykingsprosedures

| Veranderlikes buite beheer | Roy se vereniging-snyding-metode |    |    | Bonferroni-metode |    |    |
|----------------------------|----------------------------------|----|----|-------------------|----|----|
|                            | n                                |    |    | n                 |    |    |
|                            | 10                               | 15 | 25 | 10                | 15 | 25 |
| 1                          | 5                                | 6  | 11 | 14                | 19 | 21 |
| 2                          | 2                                | 6  | 15 | 9                 | 14 | 23 |
| 3                          | 9                                | 8  | 4  | 14                | 17 | 20 |
| 1,2                        | 0                                | 0  | 1  | 0                 | 1  | 1  |
| 1,3                        | 0                                | 0  | 0  | 3                 | 0  | 0  |
| 2,3                        | 0                                | 0  | 0  | 2                 | 2  | 2  |
| 1,2,3                      | 0                                | 0  | 0  | 0                 | 0  | 1  |

Tabel 4.17 : Resultate vir die  $\bar{X}$ -kaart

| Veranderlikes buite beheer | n                 |                   |                   |
|----------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|                            | 10                | 15                | 25                |
| 1                          | 99                | 94                | 99                |
| 2                          | 82                | 93                | 117               |
| 3                          | 88                | 81                | 92                |
| 1,2                        | 4                 | 3                 | 6                 |
| 1,3                        | 8                 | 7                 | 4                 |
| 2,3                        | 10                | 10                | 14                |
| 1,2,3                      | 0                 | 0                 | 1                 |
| <b>Totaal</b>              | <b>291 (14.6)</b> | <b>288 (14.4)</b> | <b>333 (16.7)</b> |

Vir al drie die steekproefgroottes is die proses benaderd drie keer meer buite beheer volgens die afsonderlike  $\bar{X}$ -kaarte as in die geval van die meerveranderlike  $T^2$ -kaart.

c.)  $p=5$

Tabel 4.18 : Resultate vir die  $T^2$ -kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 104 (5.2)                       |
| 15 | 97 (4.9)                        |
| 25 | 105 (5.3)                       |

Die  $\bar{X}$ -kaart is nie toegepas vir  $p = 5$ , aangesien die aantal kombinasies te veel raak, veral as vergelykings getref moet word, en om die gebeurtenisse onderling uitsluitend te beskou. Dieselfde argument geld vir die meervoudige vergelykings prosedures.

#### 4.4.2 BEHEER VAN DIE PROSESVERSPREIDING

a.)  $p=2$

Tabel 4.19 : Resultate vir die verskillende meerveranderlike S-kaarte

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |          |
|----|---------------------------------|----------|
|    | Det(S)-kaart                    | S-kaart  |
| 10 | 101 (5.1)                       | 89 (4.5) |
| 15 | 130 (6.5)                       | 88 (4.4) |
| 25 | 98 (4.9)                        | 94 (4.7) |

Die getalle in hakies, is die persentasie steekproewe wat buite beheer is.

Tabel 4.20 : Resultate vir die meervoudige vergelykingsprosedures toegepas op die Det(S)-kaart

|                            | Roy se vereniging-snyding-metode |    |    | Bonferroni-metode |    |    |
|----------------------------|----------------------------------|----|----|-------------------|----|----|
|                            | n                                |    |    | n                 |    |    |
| Veranderlikes buite beheer | 10                               | 15 | 25 | 10                | 15 | 25 |
| 1                          | 18                               | 23 | 24 | 17                | 27 | 25 |
| 2                          | 15                               | 21 | 18 | 14                | 20 | 19 |
| 1 en 2                     | 1                                | 0  | 1  | 0                 | 1  | 1  |

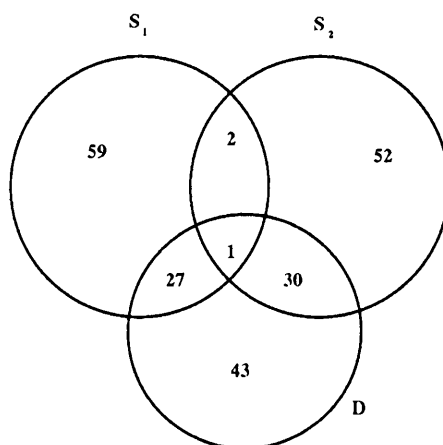
Tabel 4.21 : Resultate vir die meervoudige vergelykingsprosedures toegepas op die S-kaart

|                            | Roy se vereniging-snyding-metode |    |    | Bonferonni-metode |    |    |
|----------------------------|----------------------------------|----|----|-------------------|----|----|
|                            | n                                |    |    | n                 |    |    |
| Veranderlikes buite beheer | 10                               | 15 | 25 | 10                | 15 | 25 |
| 1                          | 7                                | 9  | 21 | 8                 | 9  | 21 |
| 2                          | 9                                | 12 | 11 | 9                 | 12 | 12 |
| 1 en 2                     | 1                                | 0  | 1  | 0                 | 1  | 1  |

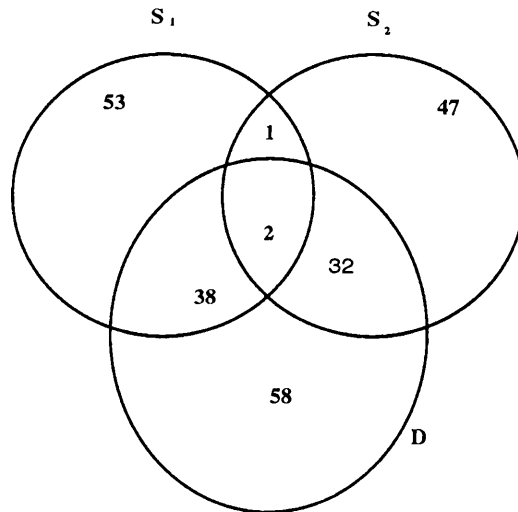
Tabel 4.22 : Resultate vir die eenveranderlike S-kaart

| Veranderlikes buite beheer | n         |           |           |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|
|                            | 10        | 15        | 25        |
| 1                          | 86        | 91        | 89        |
| 2                          | 82        | 79        | 96        |
| 1 en 2                     | 3         | 3         | 4         |
| Totaal                     | 171 (8.6) | 173 (8.7) | 189 (9.5) |

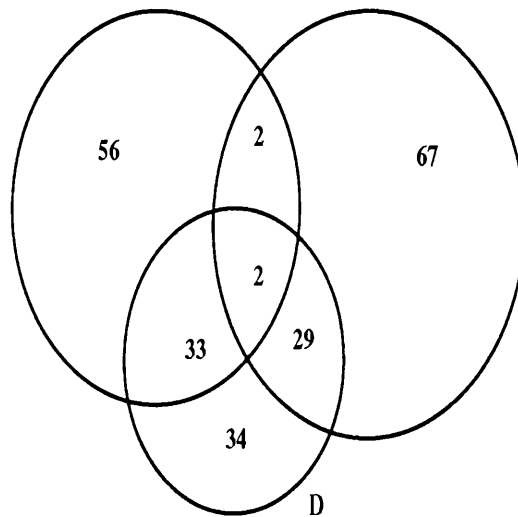
Die resultate asook 'n vergelyking tussen die een- en meerveranderlike benadering word grafies in Figure 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 en 4.9 vir die onderskeie steekproefgroottes voorgestel.



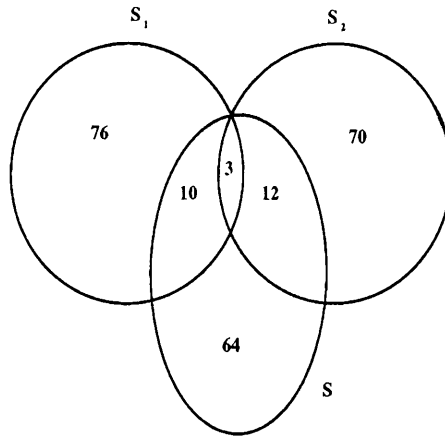
Figuur 4.4 : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 10$   
(Die Det(S)-kaart teenoor die eenveranderlike geval)



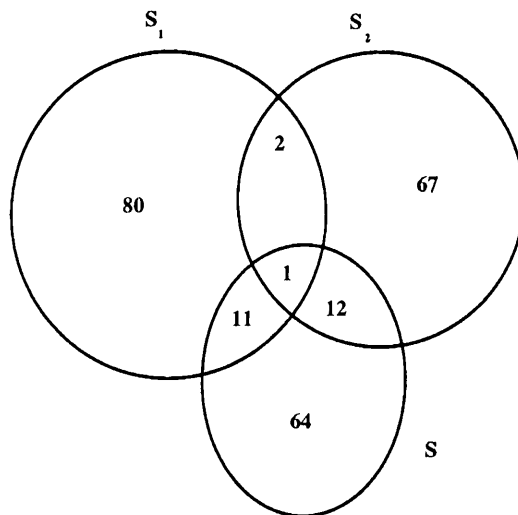
**Figuur 4.5** : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 15$   
 (Die Det(S)-kaart teenoor die eenveranderlike geval)



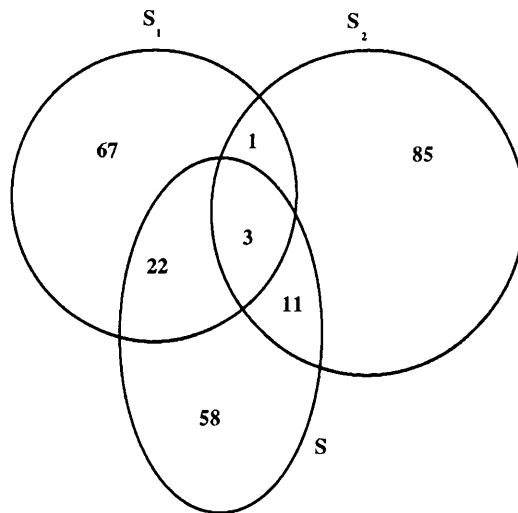
**Figuur 4.6** : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 25$   
 (Die Det(S)-kaart teenoor die eenveranderlike geval)



**Figuur 4.7** : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 10$   
 (Die S-kaart, eenveranderlik en meerveranderlik)



**Figuur 4.8** : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 15$   
 (Die S-kaart, eenveranderlik en meerveranderlik)



**Figuur 4.9** : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 25$   
(Die S-kaart, eenveranderlik en meerveranderlik)

Die resultate in die tabelle, asook in die voorafgaande figure is onderling uitsluitende gebeurtenisse waarby

- $S_1$  : die gebeurtenis is wanneer die eerste veranderlike buite beheer is volgens die eenveranderlike S-kaart,
- $S_2$  : die gebeurtenis is wanneer die tweede veranderlike buite beheer is volgens die eenveranderlike S-kaart,
- D : die gebeurtenis wanneer die proses buite beheer is volgens die Det(S)-kaart en
- S : die gebeurtenis wanneer die proses buite beheer is volgens die meerveranderlike S-kaart.

Volgens die eenveranderlike benadering is die proses ongeveer twee keer meer gestop (buite beheer), as in die geval van die meerveranderlike benadering, wat weereens met die teorie ooreenstem.

Vir elk van die gebeurtenisse in die vendiagramvoorstellings is die gemiddelde afwykings vir 'n steekproef, vir die veranderlikes van belang bereken.

Met ander woorde, indien 'n steekproef buite beheer is, is die absolute verskil tussen dié steekproef se variansies en die populasie variansies, die diagonaal elemente van  $\Sigma_0$ , bereken. Dié gemiddelde afwykings is dan gebruik om vir 'n bepaalde gebeurtenis onder- en bogrenswaardes vir die veranderlikes te bereken. Die doel van die oefening was om te poog om wysigings aan die konstruksie van die limiete vir die eenveranderlike S-kaart aan te bring wanneer twee veranderlikes gelyktydig beheer moet word, ten eide die "onnodige" buite-beheer situasies te verminder. Die resultate word in Tabel 4.23 weergegee vir die gebeurtenisse waar die een- en meerveranderlike S-kaarte gelyktydig buite beheer is.

**Tabel 4.23** : Kontrolelimiete vir die gebeurtenisse :  $\sigma_{ii} 2 \pm |afwyking|$

| GEBEURTENIS | n       |     |         |     |         |     |         |     |         |     |         |     |
|-------------|---------|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|
|             | 10      |     |         |     | 15      |     |         |     | 25      |     |         |     |
|             | $s_1^2$ |     | $s_2^2$ |     | $s_1^2$ |     | $s_2^2$ |     | $s_1^2$ |     | $s_2^2$ |     |
|             | OKL     | BKL | OKL     | BKL | OKL     | BKL | OKL     | BKL | OKL     | BKL | OKL     | BKL |
| $S_1, S$    | 0       | 2.7 | -       | -   | .05     | 2.3 | -       | -   | 0.2     | 2.2 | -       | -   |
| $S_2, S$    | -       | -   | 0       | .21 | -       | -   | 0       | .19 | -       | -   | .01     | .17 |

Net soos in die geval vir die beheer van die proses gemiddeld, is die mees gunstigste gebeurtenisse, dié waar beide benaderings gelyktydig buite beheer is. Nuwe  $\alpha$ -waardes is vir dié gebeurtenisse bereken gegrond op die gemiddelde afwykings en is in Tabel 4.24 saamgevat.

**Tabel 4.24** :  $\alpha$ -waardes vir nuwe kontrolelimiete vir die eenveranderlike S-kaart

| Gebeurtenis | $\alpha$ |       |       |
|-------------|----------|-------|-------|
|             | n        |       |       |
|             | 10       | 15    | 25    |
| $S_1, D$    | 0.02     | 0.02  | 0.009 |
| $S_2, D$    | 0.019    | 0.018 | 0.017 |

Die  $\alpha$ -waardes wat in Tabel 4.24 gegee word is kleiner as die gestelde 5% wat sal mee bring dat minder steekproewe eenveranderlik buite beheer is. (LW: die syfers in bostaande tabel is benaderd.)

Verdere simulاسies, asook 'n ondersoek na relevante literatuur sal in dié verband uitgevoer moet word. 'n Gevaar ontstaan egter in die gebruik van die gewysigde eenveranderlike kontrolelimiete wanneer 'n verskuiwing in die proses verspreiding plaasvind.

**b.) p=3**

**Tabel 4.25** : Resultate vir die meerveranderlike S-kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 96 (4.8)                        |
| 15 | 103 (5.2)                       |
| 25 | 103 (5.2)                       |

Tabel 4.26 : Resultate vir die meervoudige vergelykingsprosedures

|                            | Roy se vereniging-snyding-metode |    |    | Bonferonni-metode |    |    |
|----------------------------|----------------------------------|----|----|-------------------|----|----|
|                            | n                                |    |    | n                 |    |    |
| Veranderlikes buite beheer | 10                               | 15 | 25 | 10                | 15 | 25 |
| 1                          | 3                                | 7  | 5  | 5                 | 16 | 8  |
| 2                          | 2                                | 5  | 4  | 4                 | 8  | 5  |
| 3                          | 3                                | 2  | 8  | 6                 | 6  | 11 |
| 1,2                        | 0                                | 0  | 0  | 0                 | 0  | 1  |
| 1,3                        | 0                                | 0  | 0  | 1                 | 0  | 2  |
| 2,3                        | 0                                | 1  | 0  | 1                 | 1  | 1  |
| 1,2,3                      | 0                                | 0  | 0  | 0                 | 0  | 0  |

Tabel 4.27 : Resultate vir die eenveranderlike S-kaart

| Veranderlikes buite beheer | n                 |                   |                   |
|----------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|                            | 10                | 15                | 25                |
| 1                          | 93                | 90                | 107               |
| 2                          | 82                | 104               | 100               |
| 3                          | 79                | 95                | 83                |
| 1,2                        | 5                 | 5                 | 11                |
| 1,3                        | 4                 | 7                 | 7                 |
| 2,3                        | 4                 | 8                 | 8                 |
| 1,2,3                      | 0                 | 0                 | 0                 |
| <b>Totaal</b>              | <b>267 (13.4)</b> | <b>309 (15.5)</b> | <b>316 (15.8)</b> |

Vir die eenveranderlike benadering is die proses benaderd drie keer meer buite beheer as in die geval van die meerveranderlike benadering.

c.)  $p=5$

Tabel 4.28 : Resultate vir die meerveranderlike S-kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 122 (6.1)                       |
| 15 | 111 (5.6)                       |
| 25 | 109 (5.5)                       |

Om dieselfde redes as in die geval vir die beheer van die proses gemiddeld is geen limiete (vergelykings), vir die  $\bar{X}$ -kaart en die meervoudige vergelykingsprosedures bepaal nie.

#### d.) Resultate vir die Log|S|-kaart

Die resultate wat verkry is vir die Log|S|-kaart vir die verskillende kombinasies van veranderlikes en steekproefgroottes word in Tabel 4.29 saamgevat.

Tabel 4.29 : Resultate vir die Log|S|-kaart

| n  | p        |           |           |
|----|----------|-----------|-----------|
|    | 2        | 3         | 5         |
| 10 | 84 (4.2) | 161 (8.1) | 124 (6.2) |
| 15 | 53 (2.7) | 59 (3.0)  | 81 (4.1)  |
| 25 | 7 (0.4)  | 19 (1.0)  | 136 (6.8) |

Die resultate in Tabel 4.29 is by meerdere geleenthede bevestig (Hoofstuk 5), waar bv. 'n verskuiwing in die prosesgemiddeld bewerkstellig is, en die kovariansiematriks konstant gehou is. Die tendens van bevindinge was telkens dieselfde.

## 4.5 GEVOLGTREKKINGS

### 4.5.1 BEHEER VAN DIE PROSESGEMIDDELD

Dit blyk dat daar 'n besliste voordeel is in die gebruik van die  $T^2$ -kaart namate die aantal veranderlikes toeneem. Deurgaans is gevind dat benaderd 5% steekproewe buite beheer is volgens die  $T^2$ -kaart, terwyl dié persentasie groter word vir die  $\bar{X}$ -kaart namate  $p$  groter word. Vir  $p = 2$  en 3 is die getal steekproewe wat buite beheer is volgens die eenveranderlike benadering onderskeidelik, ongeveer 9% en 14%.

Indien die proses meerveranderlik buite beheer is, is in te min gevalle, die oorsaak (veranderlike(s)) geïdentifiseer met behulp van die meervoudige vergelykingsprosedures. Alhoewel die Bonferroni-metode beter resultate lewer as Roy se vereniging-snyding-metode, is dit nog steeds onbevredigend. Verdere ondersoek moet ingestel word na ander, beter metodes wat gebruik kan word in hierdie verband. 'n Moontlike oplossing is om die peil van betekenis te vergroot vir die gebruik van die meervoudige vergelykingsprosedures.

### 4.5.2 BEHEER VAN DIE PROSESPREIDING

Vir beide die Det(S)- en S-kaart is gevind dat benaderd 5% steekproewe buite beheer was indien die proses volgens standaard funksioneer. Onbevredigende resultate is waargeneem vir die Det(S)-kaart vir  $p > 2$ . Nadat verskeie simulاسies vir verskillende  $n$  en  $p$  gedoen is, is gevind dat die grootte,  $p(n-1) |S|^{1/2} / |\Sigma_0|^{1/2}$  nie die Chi-kwadraat verdeling besit nie. Dié benadering versleg namate  $p$  groter word. Die Det(S)-kaart toon egter goeie resultate vir wanneer twee veranderlikes beheer moet word. Die toepassing van die eenveranderlike S-kaart het dieselfde effek as die  $\bar{X}$ -kaart. Namate die aantal veranderlikes toeneem wat gelyktydig beheer moet word, vergroot die aantal steekproewe wat buite beheer is (*Tipe I-fout*).

Net soos in die geval vir die beheer van die prosesgemiddeld, is onbevredigende resultate waargeneem met behulp van die meervoudige vergelykingsprosedures. Ondersoek moet ingestel word na die gebruik van beter metodes, asook die moontlikheid om die peil van betekenis te vergroot wanneer Roy se vereniging-snyding-metode en die Bonferroni-metode van gelyktydige intervale gebruik word.

Die resultate wat vir die Log|S|-kaart waargeneem dui daarop die dié kaart meer konsekwente resultate lewer wanneer 'n "groot" aantal veranderlikes gelyktydig beheer moet word. Namate die steekproef-grootte groter word vir twee en drie veranderlikes is gevind dat die kaart nader aan die korrekte peil van betekenis van 5% funksioneer.

## HOOFSTUK 5

### SIMULASIESTUDIES ONDER VARIËRENDE OMSTANDIGHEDE

#### 5.1 INLEIDING

In hierdie hoofstuk word die resultate weergegee van simulاسies wat gedoen is op dieselfde wyse as in Hoofstuk 4, met dié verskil dat 'n proses wat moontlik buite beheer is, gesimuleer is.

Veranderinge in die proses is bewerkstellig deur telkens "nuwe" parameters,  $\underline{\mu}_1$  en  $\Sigma_1$  te gebruik vir die generering van die data.

Die drie tipes veranderinge wat bewerkstellig is, is

- a) 'n verskuiwing in die prosesgemiddeld,
- b) 'n verskuiwing in die variansies en
- c) 'n verandering in die kovariansiestrukture tussen pare veranderlikes.

Die doel van die simulاسies is om die gedrag van die verskillende benaderings vir die beheer van die prosesgemiddeld en prosesverspreiding te bepaal wanneer die proses nie volgens standaard funksioneer nie.

#### 5.2 UITLEG VAN DIE SIMULASIES

Net soos in Hoofstuk 4 is al die data uit 'n normaalverdeling gegeneer. Telkens is net 'n nuwe  $\underline{\mu}$  en  $\Sigma$  gebruik vir die generering van die data. Die oorspronklike kritiekewaardes soos in Hoofstuk 4 vervat, is gebruik vir die konstruksie van die kontrolelimiete.

##### 5.2.1 VERSKUIWING IN DIE PROSESGEMIDDELD

'n Algemene verskynsel wat in die praktyk voorkom is wanneer 'n verskuiwing in die prosesgemiddeld plaasvind as gevolg van verskeie redes, bv. die verandering van operateur of 'n verandering van materiaal.

Indien so 'n verskuiwing plaasvind is dit belangrik om dit so gou as moontlik te identifiseer en moontlik die proses te stop.

Die  $\bar{X}$ -kaart en die  $T^2$ -kaart met verdere prosedures soos in Hoofstuk 4, is toegepas op die gegeneerde data om te bepaal hoe onderskeidend dié groothede is t.o.v. afwykings vanaf die spesifikasie. Die  $\bar{X}$ -kaart is net vir  $p = 2$  en 3 toegepas.

In die vektor van gemiddeldes is een of meer van die gemiddeldes telkens in stappe, wat neerkom op die byvoeging van 'n persentasie van die variansies, vergroot. Dié nuwe vektor van gemiddeldes is dan saam met die oorspronklike kovariansiematriks gebruik om die data te genereer.

Notasie-gewys kan dit as volg voorgestel word :

$$\mu_i^* = \mu_i + k\sigma_{ii}^2.$$

### 5.2.2 VERSKUIWING IN DIE VARIANSIES

In die praktyk gebeur dit dikwels dat die prosesverspreiding vir 'n bepaalde karakteristiek toeneem, of te groot is, wat tot gevolg het dat onkonsekwente items gelewer word wat nie aan die spesifikasies voldoen nie. Indien so 'n situasie hom sou voordoem, is dit baie belangrik om dit vroegtydig te identifiseer en moontlik die proses te stop totdat die *probleem* uit die weg geruim is.

'n Verskuiwing in een of meer van die variansies in die kovariansiematriks is op soortgelyke wyse as in die geval van die verskuiwing in die prosesgemiddeld bewerkstellig. In notasie-vorm kan dit as volg voorgestel word:

$$\sigma_{ii}^{2*} = \sigma_{ii}^2(1 + k\%)$$

Die "nuwe" variansies (kovariansiematriks) is dan gebruik om die data te simuleer tesame met die oorspronklike vektor van gemiddeldes  $\underline{\mu}_0$ .

Die eenveranderlike S-kaart tesame met die meerveranderlike benaderings, te wete die Det(S), S en die Log|S|-kaart is toegepas op die gesimuleerde data, om te bepaal tot watter mate die verskillende benaderings in staat is om 'n afwyking op te tel.

### 5.2.3 VERANDERING AAN DIE STRUKTUUR VAN DIE KOVARIANSIEMATRIKS

In 'n vervaardigingsproses kan die verandering in die verwantskap tussen twee veranderlikes 'n invloed hê op die gedrag van die proses. 'n Voorbeeld hiervan is waar muntstukke vervaardig word. 'n Toename in die dikte van 'n muntstuk kan lei tot 'n moontlike kleiner diameter van 'n muntstuk, of die omgekeerde.

Vir 'n verandering in die struktuur, kan die toepassing van die meerveranderlike benaderings meebring dat baie steekproewe buite beheer is betreffende die prosesverspreiding. So 'n verandering is egter nie noodwendig identifiseerbaar met behulp van die eenveranderlike S-kaart nie, aangesien die eenveranderlike S-kaart, nie die verwantskap tussen veranderlikes in ag neem nie.

Tussen pare veranderlikes is die korrelasies vooraf bereken en dan stelselmatig vergroot. Nuwe kovariansies vir pare veranderlikes is dan bereken, ooreenkomstig met die verskillende toenemende korrelasies. Die "nuwe" kovariansies is dan gebruik vir die opstelling van  $\Sigma_1$  wat tesame met  $\underline{\mu}_0$  gebruik is om die data te genereer.

### 5.3 DIE RESULTATE VERKRY UIT DIE SIMULASIESTUDIES

#### 5.3.1 VERSKUIWING IN DIE PROSESGEMIDDELD

a.)  $p = 2$

Die volgende parameters is gebruik om die data te genereer :

$$\underline{\mu}'_1 = (11.58 + k\sigma_{11}^2, 6.55)$$

en

$$\Sigma_1 = \Sigma_0$$

In die vektor van gemiddeldes word die gemiddeld van slegs die eerste veranderlike in persentasie stappe van dié veranderlike se variansie vergroot.

**Tabel 5.1 :** Resultate vir die  $T^2$ -kaart vir  $p = 2$

| n  | k         |            |            |            |
|----|-----------|------------|------------|------------|
|    | 0.1       | 0.2        | 0.3        | 0.4        |
| 10 | 112 (5.6) | 150 (7.5)  | 216 (10.8) | 326 (16.3) |
| 15 | 119 (6.0) | 176 (8.8)  | 328 (16.4) | 505 (25.3) |
| 25 | 129 (6.5) | 262 (13.1) | 513 (25.7) | 854 (42.7) |

**Tabel 5.2 :** Resultate van Roy se vereniging-snyding-metode vir  $p = 2$

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 1             | 28  | 49  | 97  | 164 | 38  | 74  | 165 | 316 | 38  | 143 | 340 | 635 |
| 2             | 20  | 21  | 26  | 22  | 22  | 25  | 21  | 32  | 31  | 20  | 16  | 16  |
| 1,2           | 0   | 0   | 2   | 1   | 2   | 0   | 2   | 4   | 1   | 1   | 3   | 4   |

**Tabel 5.3 :** Resultate van die Bonferroni-metode vir  $p = 2$

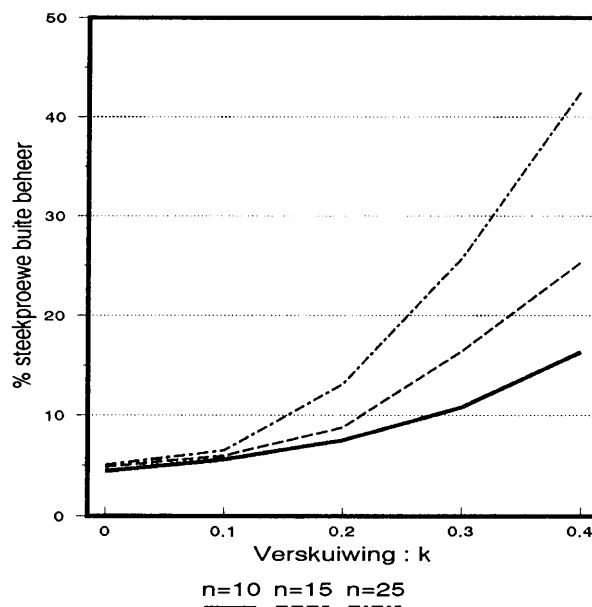
| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 1             | 44  | 67  | 127 | 214 | 52  | 101 | 229 | 375 | 50  | 182 | 395 | 727 |
| 2             | 34  | 35  | 38  | 40  | 35  | 35  | 28  | 44  | 42  | 29  | 30  | 20  |
| 1,2           | 2   | 2   | 10  | 5   | 4   | 1   | 6   | 15  | 3   | 4   | 9   | 21  |

Tabel 5.4 : Resultate vir die  $\bar{X}$ -kaart vir  $p = 2$

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |      |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |      |
|               | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4  |
| 1             | 94  | 228 | 370 | 582 | 131 | 229 | 496 | 708 | 154 | 358 | 734 | 1089 |
| 2             | 104 | 108 | 91  | 73  | 86  | 75  | 66  | 64  | 120 | 83  | 65  | 54   |
| 1,2           | 10  | 13  | 23  | 39  | 11  | 15  | 24  | 41  | 13  | 19  | 42  | 74   |
| Totaal        | 208 | 349 | 484 | 694 | 228 | 319 | 586 | 813 | 287 | 460 | 841 | 1217 |

In bostaande tabelle kan gesien word dat die buite-beheer gevalle toeneem vir die eerste veranderlike vir beide die  $\bar{X}$ -kaart en die meervoudige vergelykingsprosedures. Die meervoudige vergelykingsprosedures is egter nog steeds nie in staat om in al die gevalle waar die  $T^2$ -kaart buite beheer is, dié veranderlike(s) te identifiseer wat die oorsaak is vir die buite-beheer toestand nie.

Die resultate vir die  $T^2$ -kaart vir twee veranderlikes onder normale sowel as variërende omstandighede word grafies in Figuur 5.1 voorgestel.



Figuur 5.1 : Resultate van die simulasies vir die  $T^2$ -kaart ( $p = 2$ )

In Figuur 5.1 kom dit duidelik na vore dat, namate die verskuiwing, sowel as die steekproefgrootte toeneem, die onderskeidingsvermoë van die  $T^2$ -kaart toeneem.

**b.)  $p=3$**

Die volgende parameters is gebruik om die data te genereer :

$$\underline{\mu}_1 = (11.58, 6.55 + k\sigma_{22}^2, 7.16 + k\sigma_{33}^2)$$

en

$$\Sigma_1 = \Sigma_0$$

In die vektor van gemiddeldes word die gemiddeldes van die tweede en derde veranderlike in terme van 'n persentasie van hul variansies vergroot.

**Tabel 5.5 :** Resultate vir die  $T^2$ -kaart vir  $p = 3$

| n  | k         |            |            |             |
|----|-----------|------------|------------|-------------|
|    | 0.1       | 0.2        | 0.3        | 0.4         |
| 10 | 127 (6.3) | 141 (7.1)  | 196 (9.8)  | 341 (17.1)  |
| 15 | 122 (6.1) | 197 (9.9)  | 353 (17.7) | 524 (26.2)  |
| 25 | 159 (7.9) | 311 (15.6) | 603 (30.2) | 1006 (50.3) |

**Tabel 5.6 :** Resultate van Roy se vereniging-snyding-metode vir  $p = 3$

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 1             | 8   | 6   | 7   | 5   | 9   | 6   | 6   | 12  | 7   | 6   | 8   | 5   |
| 2             | 7   | 7   | 4   | 5   | 5   | 6   | 11  | 12  | 8   | 10  | 10  | 6   |
| 3             | 8   | 17  | 38  | 96  | 10  | 40  | 95  | 201 | 30  | 79  | 267 | 601 |
| 1,2           | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| 1,3           | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 5   |
| 2,3           | 1   | 0   | 2   | 1   | 0   | 0   | 1   | 2   | 2   | 0   | 6   | 14  |
| 1,2,3         | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |

**Tabel 5.7 :** Resultate van die Bonferroni-metode vir  $p = 3$

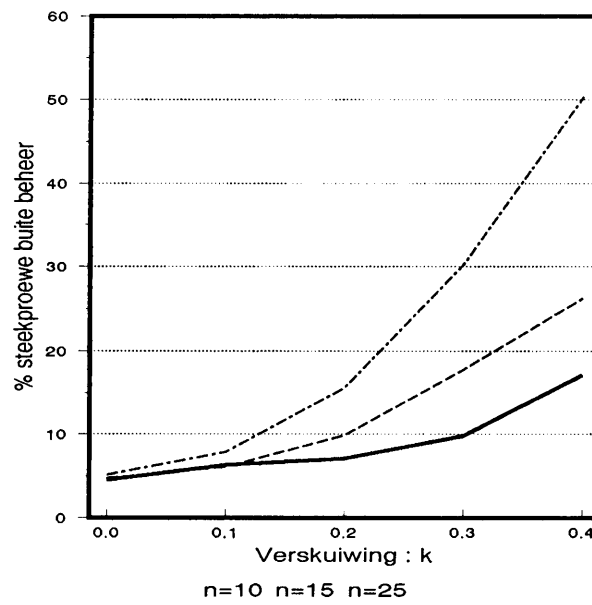
| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 1             | 11  | 16  | 16  | 16  | 25  | 19  | 22  | 27  | 22  | 21  | 17  | 7   |
| 2             | 17  | 17  | 14  | 25  | 17  | 17  | 24  | 20  | 20  | 29  | 26  | 16  |
| 3             | 28  | 47  | 79  | 190 | 31  | 70  | 184 | 345 | 59  | 148 | 409 | 782 |
| 1,2           | 1   | 1   | 0   | 1   | 0   | 1   | 0   | 0   | 2   | 1   | 2   | 0   |
| 1,3           | 2   | 0   | 3   | 6   | 1   | 6   | 3   | 12  | 1   | 7   | 9   | 22  |
| 2,3           | 2   | 5   | 8   | 8   | 3   | 4   | 15  | 18  | 8   | 8   | 28  | 53  |
| 1,2,3         | 0   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   |

Tabel 5.8 : Resultate vir die  $\bar{X}$ -kaart vir  $p = 3$

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |      |     |     |      |      |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|------|------|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |      | 25  |     |      |      |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |      | k   |     |      |      |
|               | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4  | 0.1 | 0.2 | 0.3  | 0.4  |
| 1             | 91  | 73  | 73  | 54  | 88  | 79  | 75  | 49   | 73  | 69  | 41   | 23   |
| 2             | 105 | 88  | 76  | 68  | 99  | 68  | 66  | 56   | 106 | 95  | 73   | 19   |
| 3             | 110 | 226 | 359 | 565 | 125 | 278 | 526 | 844  | 178 | 401 | 831  | 1175 |
| 1,2           | 7   | 8   | 7   | 5   | 3   | 9   | 5   | 2    | 3   | 9   | 5    | 2    |
| 1,3           | 7   | 14  | 22  | 29  | 10  | 15  | 27  | 47   | 9   | 32  | 40   | 75   |
| 2,3           | 18  | 27  | 48  | 113 | 27  | 33  | 72  | 106  | 31  | 70  | 139  | 217  |
| 1,2,3         | 0   | 1   | 1   | 8   | 0   | 4   | 3   | 6    | 2   | 2   | 7    | 7    |
| Totaal        | 338 | 437 | 586 | 842 | 352 | 486 | 774 | 1110 | 402 | 678 | 1136 | 1518 |

In Tabele 5.6, 5.7 en 5.8 kan gesien word hoe die buite-beheer gevalle toeneem vir Veranderlike 2 en 3 namate die verskuiwing toeneem in die prosesgemiddeld.

Die resultate vir die  $T^2$ -kaart vir drie veranderlikes onder normale, sowel as variërende omstandighede word grafies in Figuur 5.2 voorgestel.



Figuur 5.2 : Resultate van die simulaties vir die  $T^2$ -kaart ( $p = 3$ )

In Figuur 5.2 kan gesien word dat namate die verskuiwing, sowel as die steekproefgrootte toeneem, die onderskeidingsvermoë van die  $T^2$ -kaart toeneem.

c.)  $p = 5$

Die volgende parameters is gebruik om die data te genereer :

$$\underline{\mu}_1 = (11.58 + k\sigma_{11}^2, 6.55, 10.46, 7.16 + k\sigma_{44}^2, 3.28)$$

en

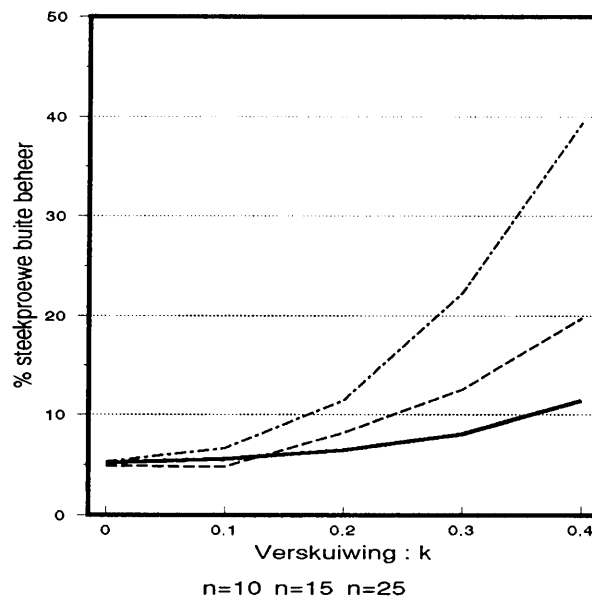
$$\Sigma_1 = \Sigma_0$$

In die vektor van gemiddeldes word die gemiddeldes van die eerste en vierde veranderlikes in terme van 'n persentasie van hul variansies vergroot.

Tabel 5.9 : Resultate vir die  $T^2$ -kaart vir  $p = 5$

| n  | k         |            |            |            |
|----|-----------|------------|------------|------------|
|    | 0.1       | 0.2        | 0.3        | 0.4        |
| 10 | 111 (5.6) | 130 (6.5)  | 162 (8.1)  | 228 (11.4) |
| 15 | 96 (4.8)  | 163 (8.2)  | 250 (12.5) | 393 (19.7) |
| 25 | 134 (6.7) | 227 (11.4) | 445 (22.3) | 787 (39.4) |

Die resultate vir die  $T^2$ -kaart onder normale, sowel as variërende omstandighede word grafies in Figuur 5.3 voorgestel.



Figuur 5.3 : Resultate van die simulaties vir die  $T^2$ -kaart ( $p = 5$ )

In bostaande figuur is dieselfde tendens te bespeur as in Figure 5.1 en 5.2.

### 5.3.2 VERSKUIWING IN DIE VARIANSIES

a.)  $p=2$

Die volgende parameters is gebruik om die data te genereer :

$$\mu_1 = \mu_0$$

en

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1.185(1+k\%) & 0.033 \\ 0.033 & 0.093 \end{pmatrix}$$

Die variansie van slegs die eerste veranderlike word telkens met 'n persentasie,  $k$ , vergroot.

**Tabel 5.10 :** Resultate vir die verskillende meerveranderlike S-kaarte

| k   | n          |           |           |            |            |          |            |            |          |
|-----|------------|-----------|-----------|------------|------------|----------|------------|------------|----------|
|     | 10         |           |           | 15         |            |          | 25         |            |          |
|     | Det(S)     | S         | Log S     | Det(S)     | S          | Log S    | Det(S)     | S          | Log S    |
| 0.2 | 120 (6)    | 119 (5.9) | 83 (4.2)  | 139 (7)    | 125 (6.3)  | 25 (1.3) | 152 (7.6)  | 105 (5.3)  | 13 (0.7) |
| 0.3 | 159 (8)    | 124 (6.2) | 92 (4.6)  | 186 (9.3)  | 146 (7.3)  | 33 (1.7) | 207 (10.4) | 144 (7.2)  | 20 (1)   |
| 0.4 | 192 (9.6)  | 137 (6.9) | 111 (5.6) | 224 (11.2) | 173 (8.7)  | 47 (2.4) | 295 (14.8) | 208 (10.4) | 37 (1.9) |
| 0.5 | 210 (10.5) | 163 (8.2) | 130 (6.5) | 263 (13.2) | 207 (10.4) | 62 (3.1) | 391 (19.6) | 329 (16.5) | 73 (3.7) |

**Tabel 5.11 :** Resultate van Roy se vereniging-snyding-metode : Det(S)-kaart

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 1             | 33  | 55  | 68  | 100 | 31  | 56  | 97  | 114 | 33  | 89  | 146 | 246 |
| 2             | 15  | 16  | 16  | 21  | 15  | 18  | 19  | 15  | 22  | 6   | 14  | 12  |
| 1,2           | 1   | 1   | 2   | 5   | 0   | 2   | 0   | 0   | 1   | 2   | 1   | 1   |

**Tabel 5.12 :** Resultate vir die Bonferroni-metode : Det(S)-kaart

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 1             | 23  | 43  | 62  | 89  | 37  | 70  | 113 | 130 | 43  | 104 | 164 | 261 |
| 2             | 13  | 14  | 14  | 19  | 17  | 25  | 20  | 21  | 30  | 14  | 17  | 18  |
| 1,2           | 1   | 1   | 1   | 3   | 2   | 2   | 3   | 2   | 1   | 2   | 3   | 4   |

**Tabel 5.13 :** Resultate vir Roy se vereniging-snyding-metode : S-kaart

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 1             | 24  | 45  | 58  | 79  | 34  | 64  | 96  | 130 | 26  | 78  | 133 | 261 |
| 2             | 15  | 16  | 14  | 19  | 12  | 15  | 12  | 18  | 14  | 9   | 20  | 12  |
| 1,2           | 3   | 2   | 2   | 7   | 3   | 4   | 3   | 8   | 2   | 5   | 7   | 9   |

**Tabel 5.14 :** Resultate vir die Bonferroni-metode : S-kaart

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 1             | 22  | 40  | 54  | 78  | 32  | 66  | 102 | 135 | 26  | 83  | 138 | 262 |
| 2             | 15  | 15  | 14  | 19  | 13  | 15  | 11  | 18  | 14  | 9   | 19  | 11  |
| 1,2           | 3   | 2   | 1   | 6   | 5   | 6   | 5   | 9   | 2   | 6   | 8   | 13  |

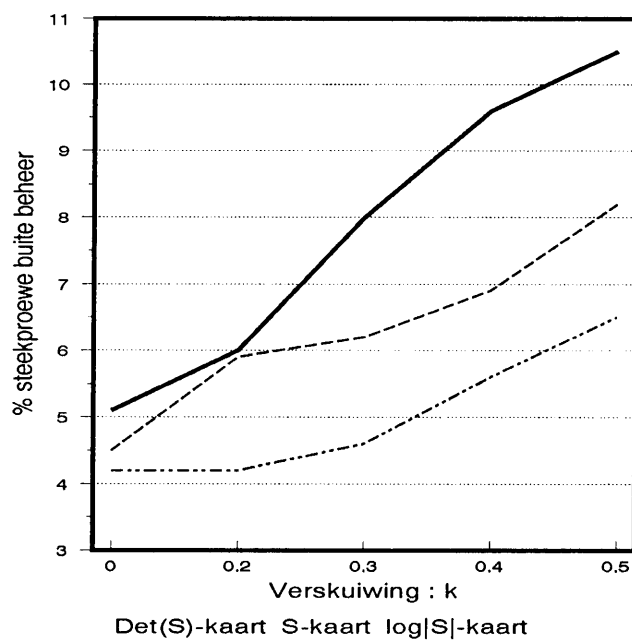
LW : die meervoudigingsprosedures is nie op die resultate van die Log|S|-kaart toegepas nie.

Tabel 5.15 : Resultate vir die eenveranderlike S-kaart

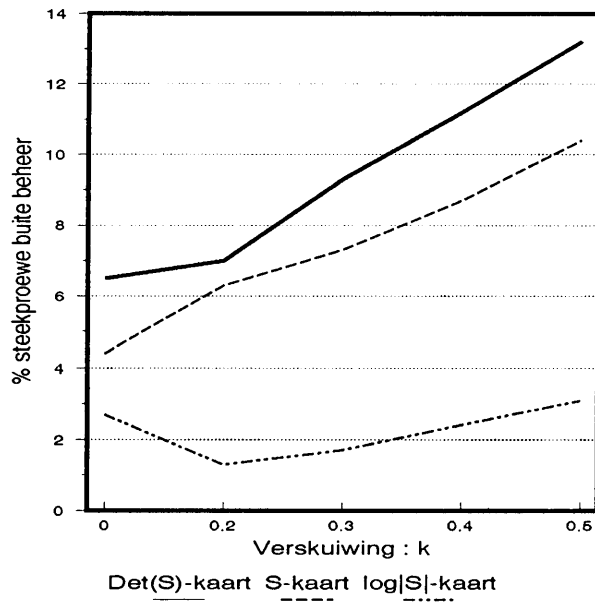
| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 1             | 152 | 121 | 256 | 357 | 167 | 292 | 354 | 440 | 198 | 349 | 474 | 668 |
| 2             | 85  | 90  | 81  | 80  | 80  | 84  | 84  | 79  | 95  | 64  | 75  | 60  |
| 1,2           | 11  | 13  | 13  | 20  | 12  | 14  | 14  | 30  | 6   | 11  | 18  | 36  |
| Totaal        | 248 | 224 | 350 | 457 | 259 | 390 | 452 | 549 | 299 | 424 | 567 | 764 |

In bostaande tabelle kan gesien word hoe die aantal buite-beheer gevalle toeneem vir Veranderlike 1, dié veranderlike waar die verskuiwing plaasvind. Dié tendens is by die eenveranderlike S-kaart, sowel as die meervoudige vergelykingsprosedures teenwoordig.

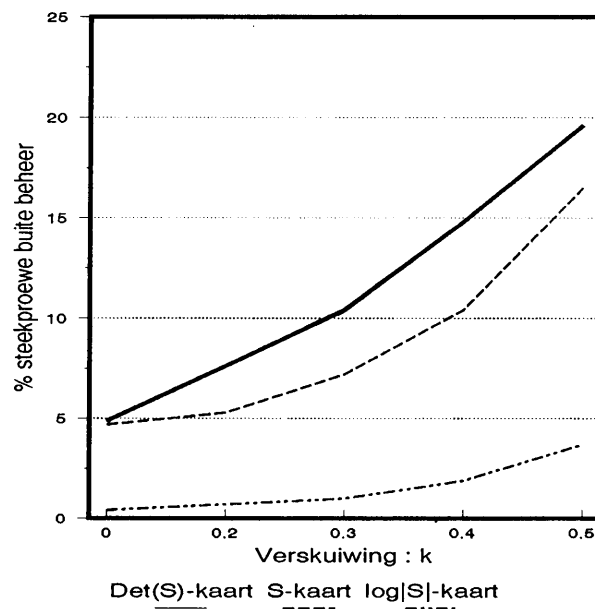
Die resultate vir die Det(S), S en die Log|S|-kaart vir die verskillende steekproefgroottes word in Figure 5.4, 5.5 en 5.6 grafies voorgestel.



Figuur 5.4 : Resultate vir die verskillende S-kaarte  
( $p = 2, n = 10$ )



Figuur 5.5 : Resultate vir die verskillende S-kaarte  
( $p = 2, n = 15$ )



Figuur 5.6 : Resultate vir die verskillende S-kaarte  
( $p = 2, n = 25$ )

In Figure 5.4, 5.5 en 5.6 is dit duidelik dat die Det(S)-kaart die meeste gevoelig is vir veranderinge in die prosesverspreiding, terwyl die Log|S|-kaart die minste gevoelig is daarvoor. Die steekproefgrootte het ook 'n direkte invloed op die onderskeidingsvermoë van al drie die benaderings. Soos  $n$  toeneem, verbeter die onderskeidingsvermoëns van die verskillende benaderings.

b.)  $p=3$

Die volgende parameters is gebruik om die data te genereer :

$$\mu_1 = \mu_0$$

en

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1.185 & 0.033 & -0.2518 \\ 0.033 & 0.093(1+k\%) & 0.1208 \\ -0.2518 & 0.1208 & 1.66(1+k\%) \end{pmatrix}$$

Die variansie van die tweede en derde veranderlike word telkens met 'n persentasie  $k$ , vergroot.

Tabel 5.16 : Resultate vir die verskillende S-kaarte

| k   | n          |            |            |            |            |            |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|     | 10         |            | 15         |            | 25         |            |
|     | S          | Log S      | S          | Log S      | S          | Log S      |
| 0.3 | 142 (7.1)  | 238 (11.9) | 164 (8.2)  | 230 (11.5) | 244 (12.2) | 258 (12.9) |
| 0.4 | 172 (8.6)  | 337 (16.9) | 232 (11.6) | 331 (16.6) | 392 (19.6) | 403 (20.2) |
| 0.5 | 252 (12.6) | 416 (20.8) | 375 (18.8) | 488 (24.4) | 583 (29.2) | 570 (28.5) |
| 0.6 | 287 (14.4) | 484 (24.2) | 477 (23.9) | 640 (32.0) | 830 (41.5) | 815 (40.7) |

Tabel 5.17 : Resultate van Roy se vereniging-snyding-metode vir  $p = 3$

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
| 1             | 5   | 7   | 4   | 3   | 9   | 7   | 10  | 4   | 10  | 6   | 7   | 5   |
| 2             | 24  | 28  | 49  | 77  | 25  | 41  | 94  | 118 | 44  | 92  | 134 | 212 |
| 3             | 15  | 29  | 52  | 72  | 29  | 48  | 83  | 125 | 50  | 103 | 160 | 248 |
| 1,2           | 0   | 2   | 1   | 0   | 1   | 0   | 1   | 1   | 0   | 1   | 0   | 1   |
| 1,3           | 0   | 1   | 1   | 1   | 0   | 0   | 2   | 2   | 1   | 1   | 0   | 4   |
| 2,3           | 0   | 3   | 5   | 16  | 1   | 7   | 7   | 21  | 4   | 10  | 33  | 66  |
| 1,2,3         | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   |

**Tabel 5.18** : Resultate van die Bonferroni-metode vir  $p = 3$

| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |     | 25  |     |     |     |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |     | k   |     |     |     |
|               | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
| 1             | 10  | 9   | 9   | 8   | 14  | 10  | 10  | 6   | 13  | 9   | 15  | 8   |
| 2             | 27  | 34  | 61  | 78  | 35  | 55  | 107 | 143 | 53  | 101 | 157 | 240 |
| 3             | 19  | 32  | 53  | 78  | 34  | 60  | 88  | 134 | 60  | 120 | 184 | 272 |
| 1,2           | 1   | 3   | 3   | 1   | 0   | 1   | 2   | 3   | 1   | 4   | 1   | 7   |
| 1,3           | 1   | 2   | 4   | 3   | 0   | 2   | 8   | 8   | 6   | 4   | 7   | 5   |
| 2,3           | 3   | 9   | 16  | 33  | 7   | 17  | 43  | 62  | 18  | 50  | 70  | 155 |
| 1,2,3         | 1   | 0   | 0   | 0   | 2   | 0   | 4   | 1   | 0   | 1   | 0   | 3   |

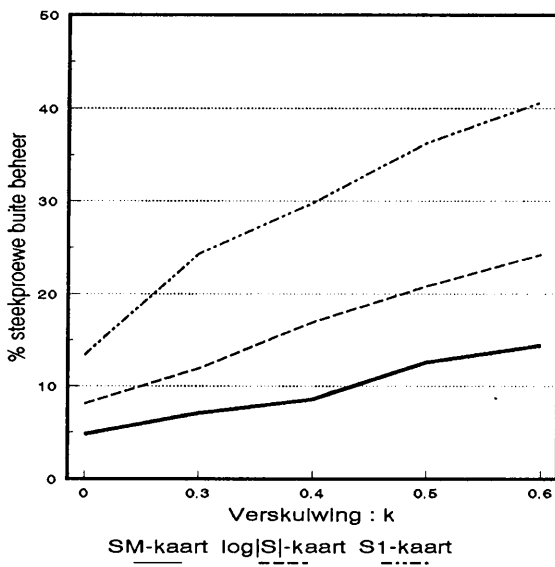
LW : vir  $p > 2$  is die meervoudige vergelykingsprosedures vir die beheer van die prosesverspreiding net toegepas op die uitkomst van die meer veranderlike S-kaart.

**Tabel 5.19** : Resultate vir die eenveranderlike S-kaart vir  $p = 3$

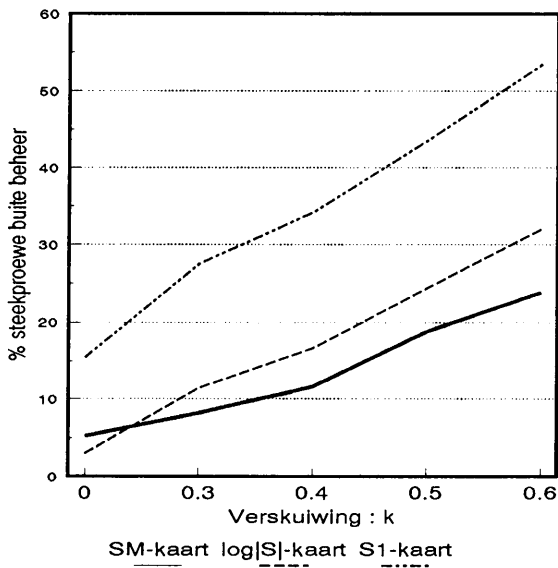
| Veranderlikes | n   |     |     |     |     |     |     |      |     |     |      |      |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|------|------|
|               | 10  |     |     |     | 15  |     |     |      | 25  |     |      |      |
|               | k   |     |     |     | k   |     |     |      | k   |     |      |      |
|               | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6  | 0.3 | 0.4 | 0.5  | 0.6  |
| 1             | 70  | 74  | 66  | 54  | 74  | 65  | 57  | 57   | 73  | 59  | 44   | 33   |
| 2             | 196 | 217 | 263 | 295 | 217 | 275 | 328 | 374  | 268 | 347 | 407  | 442  |
| 3             | 166 | 229 | 285 | 308 | 207 | 244 | 325 | 386  | 269 | 372 | 408  | 485  |
| 1,2           | 11  | 17  | 16  | 19  | 9   | 14  | 14  | 22   | 13  | 12  | 18   | 19   |
| 1,3           | 12  | 12  | 20  | 17  | 8   | 13  | 21  | 26   | 17  | 19  | 35   | 21   |
| 2,3           | 29  | 45  | 71  | 115 | 31  | 65  | 114 | 195  | 74  | 136 | 213  | 388  |
| 1,2,3         | 1   | 1   | 5   | 6   | 4   | 7   | 10  | 8    | 4   | 9   | 9    | 20   |
| <b>Totaal</b> | 485 | 595 | 726 | 814 | 550 | 683 | 869 | 1068 | 718 | 954 | 1134 | 1408 |

Let op hoe die buite-beheer situasies toeneem vir 'n groter wordende k vir die gevalle (veranderlikes), 2, 3, en 2,3 in bostaande tabelle. Dié tendens is vir die eenveranderlike S-kaart, sowel as vir die meervoudige vergelykingsprosedures teenwoordig.

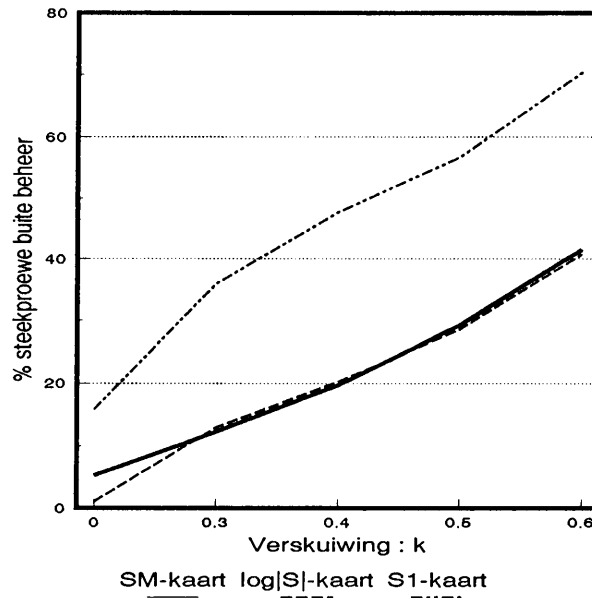
Die resultate vir die meer veranderlike S-kaart, die Log|S|-kaart en die eenveranderlike S-kaarte word vir die onderskeie steekproefgroottes in Figure 5.7, 5.8 en 5.9 voorgestel. Die afkortings  $S_m$  en  $S_1$ , beteken onderskeidelik die meer veranderlike S-kaart en die eenveranderlike S-kaart.



**Figuur 5.7 :** Resultate vir die verskillende S-kaarte  
 ( $p = 3, n = 10$ )



**Figuur 5.8 :** Resultate vir die verskillende S-kaarte  
 ( $p = 3, n = 15$ )



**Figuur 5.9** : Resultate vir die verskillende S-kaarte  
 ( $p = 3, n = 25$ )

In Figure 5.7, 5.8 en 5.9 kan gesien word dat namate die verskuiwing, sowel as die steekproefgrootte toeneem, die onderskeidingsvermoë van die drie verskillende kaarte toeneem. Die eenveranderlike S-kaart is telkens benaderd 3 keer meer buite beheer as die meerveranderlike kontrolekaarte.

**c.)  $p=5$**

Die volgende parameters is gebruik om die data te genereer :

$$\mu_1 = \mu_0$$

en

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1.185(1+k\%) & 0.033 & -0.2518 & 0.5563 & 0.2174 \\ 0.033 & 0.093 & 0.1208 & 0.0939 & -0.0015 \\ -0.2518 & 0.1208 & 1.66 & 0.3016 & 0.0499 \\ 0.5563 & 0.0939 & 0.3016 & 1.2196(1+k\%) & 0.1031 \\ 0.2174 & -0.0015 & 0.0499 & 0.1031 & 0.8062 \end{pmatrix}$$

Die variansie van die eerste en die vierde veranderlike word telkens met 'n persentasie k, vergroot.

Tabel 5.20 : Resultate vir die verskillende S-kaarte

| k   | n          |            |            |            |            |             |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
|     | 10         |            | 15         |            | 25         |             |
|     | S          | log S      | S          | log S      | S          | log S       |
| 0.2 | 133 (6.7)  | 148 (7.4)  | 136 (6.8)  | 253 (12.7) | 159 (8.0)  | 450 (22.5)  |
| 0.3 | 166 (8.3)  | 181 (9.1)  | 169 (8.5)  | 362 (18.1) | 266 (13.3) | 670 (33.5)  |
| 0.4 | 172 (8.6)  | 237 (11.9) | 258 (12.9) | 497 (24.9) | 429 (21.5) | 886 (44.3)  |
| 0.5 | 229 (11.5) | 294 (14.7) | 338 (16.9) | 610 (30.5) | 681 (34.1) | 1079 (54.0) |

### 5.3.3 VERANDERING AAN DIE KOVARIANSIESTRUKTUUR

#### a.) p=2

Die korrelasie tussen die eerste en die tweede veranderlike is telkens verhoog en 'n nuwe kovariansie is ooreenkomstig bereken.

Vir  $\Sigma_0$  is  $\rho_{12} = 0.0994 \Rightarrow \sigma_{12} = 0.033$

Indien  $\rho_{12} = 0.4 \Rightarrow \sigma_{12} = 0.132$

$\rho_{12} = 0.5 \Rightarrow \sigma_{12} = 0.1659$

$\rho_{12} = 0.6 \Rightarrow \sigma_{12} = 0.199$

Die nuwe kovariansies is dan in  $\Sigma_1$  gestel en saam met  $\mu_0$  as parameters gebruik om die data te genereer uit 'n normaalverdeling.

Tabel 5.21 : Resultate vir die verskillende S-kaarte

| $\rho_{12}$ | n      |     |       |        |     |       |        |      |       |
|-------------|--------|-----|-------|--------|-----|-------|--------|------|-------|
|             | 10     |     |       | 15     |     |       | 25     |      |       |
|             | Det(S) | S   | Log S | Det(S) | S   | Log S | Det(S) | S    | Log S |
| 0.4         | 107    | 164 | 111   | 93     | 189 | 14    | 101    | 280  | 6     |
| 0.5         | 119    | 187 | 132   | 126    | 329 | 29    | 145    | 597  | 4     |
| 0.6         | 137    | 309 | 170   | 185    | 561 | 60    | 252    | 1097 | 24    |

Indien bevind is dat 'n steekproef buite beheer is, is Roy se vereniging-snyding-metode en die Bonferroni-metode toegepas vir beide die Det(S)- en S-kaart. Dié meervoudige vergelykingsprosedures neem glad nie so 'n verandering in die struktuur van 'n kovariansiematriks in ag nie. Soos wat die aantal buite-beheer gevalle meer en meer word wanneer die korrelasie tussen die twee veranderlikes verhoog, bly die resultate konstant vir die meervoudige vergelykingsprosedures.

Dieselfde tendens is ook vir die eenveranderlike benadering waargeneem. Die kontrolelimiete vir die eenveranderlike S-kaart neem glad nie die verwantskap tussen pare veranderlikes in ag nie. Die resultate vir die eenveranderlike S-kaart word in Tabel 5.22 weergegee. Die data wat gebruik is, is dieselfde as dit waarop die meerveranderlike benaderings geëvalueer is.

**Tabel 5.22** : Resultate vir die eenveranderlike S-kaart

| Veranderlikes | n           |     |     |             |     |     |             |     |     |
|---------------|-------------|-----|-----|-------------|-----|-----|-------------|-----|-----|
|               | 10          |     |     | 15          |     |     | 25          |     |     |
|               | $\rho_{12}$ |     |     | $\rho_{12}$ |     |     | $\rho_{12}$ |     |     |
|               | 0.4         | 0.5 | 0.6 | 0.4         | 0.5 | 0.6 | 0.4         | 0.5 | 0.6 |
| 1             | 111         | 93  | 88  | 98          | 102 | 87  | 97          | 92  | 86  |
| 2             | 103         | 104 | 85  | 72          | 73  | 90  | 91          | 85  | 103 |
| 1,2           | 7           | 13  | 8   | 5           | 8   | 9   | 9           | 4   | 6   |
| Totaal        | 221         | 210 | 181 | 175         | 183 | 186 | 197         | 181 | 195 |

Die resultate in Tabel 5.22 is soortgelyk aan dié in Hoofstuk 4 wanneer veronderstel word dat die proses op standaard funksioneer. (Sien Tabel 4.22). Indien die korrelasie verder verhoog word, kan dit gebeur dat beide die veranderlikes gelyktydig by meer geleenthede buite beheer is.

**b.)  $\rho=3$**

Die korrelasie tussen die tweede en die derde veranderlike is telkens verhoog en 'n nuwe kovariansie is ooreenkomstig bereken.

Vir  $\Sigma_0$  is  $\rho_{23} = 0.307 \Rightarrow \sigma_{23} = 0.307$

Indien  $\rho_{23} = 0.6 \Rightarrow \sigma_{23} = 0.235$

$\rho_{23} = 0.7 \Rightarrow \sigma_{23} = 0.270$

$\rho_{23} = 0.8 \Rightarrow \sigma_{23} = 0.314$

$\rho_{23} = 0.9 \Rightarrow \sigma_{23} = 0.353$

Die nuwe kovariansies is dan in  $\Sigma_1$  gestel en saam met  $\mu_0$  as parameters gebruik om die data te genereer uit 'n normaalverdeling.

**Tabel 5.23** : Resultate vir die verskillende S-kaarte

| $\rho_{23}$ | n    |       |      |       |      |       |
|-------------|------|-------|------|-------|------|-------|
|             | 10   |       | 15   |       | 25   |       |
|             | S    | Log S | S    | Log S | S    | Log S |
| 0.6         | 127  | 237   | 171  | 61    | 310  | 3     |
| 0.7         | 190  | 337   | 361  | 106   | 766  | 11    |
| 0.8         | 487  | 621   | 1014 | 320   | 1784 | 68    |
| 0.9         | 1504 | 1360  | 1978 | 1182  | 2000 | 912   |

**Tabel 5.24 : Resultate vir die eenveranderlike S-kaart**

| Veranderlikes | n           |            |            |            |             |            |            |            |             |            |            |            |
|---------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|------------|------------|------------|
|               | 10          |            |            |            | 15          |            |            |            | 25          |            |            |            |
|               | $\rho_{23}$ |            |            |            | $\rho_{23}$ |            |            |            | $\rho_{23}$ |            |            |            |
|               | 0.6         | 0.7        | 0.8        | 0.9        | 0.6         | 0.7        | 0.8        | 0.9        | 0.6         | 0.7        | 0.8        | 0.9        |
| 1             | 92          | 87         | 81         | 100        | 91          | 85         | 112        | 103        | 88          | 80         | 77         | 113        |
| 2             | 68          | 76         | 67         | 67         | 78          | 73         | 72         | 59         | 95          | 82         | 65         | 56         |
| 3             | 90          | 86         | 70         | 61         | 87          | 80         | 61         | 44         | 88          | 74         | 65         | 58         |
| 1,2           | 6           | 3          | 2          | 2          | 2           | 4          | 7          | 2          | 5           | 5          | 2          | 6          |
| 1,3           | 4           | 7          | 2          | 3          | 6           | 7          | 3          | 1          | 4           | 5          | 2          | 3          |
| 2,3           | 13          | 12         | 21         | 46         | 6           | 16         | 29         | 39         | 15          | 12         | 35         | 40         |
| 1,2,3         | 1           | 0          | 1          | 2          | 0           | 3          | 0          | 3          | 0           | 2          | 0          | 5          |
| <b>Totaal</b> | <b>274</b>  | <b>271</b> | <b>244</b> | <b>281</b> | <b>270</b>  | <b>268</b> | <b>284</b> | <b>251</b> | <b>295</b>  | <b>260</b> | <b>246</b> | <b>281</b> |

Let op dat die aantal gevalle waar veranderlike 2 en 3 gelyktydig buite beheer is, toeneem soos wat die korrelasie tussen die twee veranderlikes toeneem.

## 5.4 GEVOLGTREKKINGS

### 5.4.1 BEHEER VAN DIE PROSESGEMIDDELD

Uit die resultate van die simulaties wat vir die  $T^2$ -kaart waargeneem is, kan die gevolgtrekking gemaak word dat die onderskeidingvermoë van die  $T^2$ -kaart verbeter namate die verskuiwing in die prosesgemiddeld, sowel as die steekproefgrootte toeneem. Die  $T^2$ -kaart is instaat om 'n toename van so min as 10% van die variansie van 'n veranderlike, in dié veranderlike se gemiddeld op te tel. (Sien Figure 5.1, 5.2 en 5.3).

Net soos in Hoofstuk 4 is die meervoudige vergelykingsprosedures nie in staat om vir al die meerveranderlike buite-beheer gevalle, dié veranderlike(s) te identifiseer wat vir die buite-beheer toestand verantwoordelik is nie.

Die  $\bar{X}$ -kaart is vir die verskillende kombinasies van steekproefgroottes en veranderlikes elke keer meer buite beheer as die  $T^2$ -kaart van Hotelling. Dié aantal kere wat die  $\bar{X}$ -kaart meer buite beheer is, is direk afhanklik van die aantal veranderlikes wat gelyktydig beheer moet word.

### 5.4.2 BEHEER VAN DIE PROSESPREIDING

Die Det(S)-kaart is die meeste sensitief vir 'n verandering in die prosesverspreiding vir die meerveranderlike benaderings, terwyl die Log|S|-kaart die minste sensitief is. Die simulaties in hierdie hoofstuk bevestig die aanbeveling wat in Hoofstuk 4 gemaak is, dat die Log|S|-kaart, meer geskik is wanneer 'n groot aantal veranderlikes gelyktydig beheer moet word.

Indien dit sou gebeur dat die onderlinge verwantskap van veranderlikes verander in 'n proses, moet gekyk word na die herkonstruksie van die kontrolelimiete van al drie die meerveranderlike benaderings.

Net soos in die geval vir die beheer van die prosesgemiddeld, is die eenveranderlike S-kaart elke keer meer buite beheer as die meerveranderlike benaderings vir 'n verskuiwing in die variansies. Dié tendens neem toe namate die aantal veranderlikes toeneem wat gelyktydig beheer moet word.

## HOOFSTUK 6

### AFWYKINGS VANAF NORMALITEIT

#### 6.1 INLEIDING

Dit gebeur dikwels in die praktyk dat die data wat versamel word vir ontledings, nie uit 'n normaalverdeling afkomstig is nie. Data is uit twee ander verdelings, die reghoekige- en eksponensiaal-verdeling, gegenereer met die doel om ondersoek in te stel na hoe die meerveranderlike kontrolekaarte presteer vir afwykings vanaf normaliteit. Die simulاسies wat gedoen is, is soortgelyk aan dié in Hoofstuk 4. Dit is wanneer veronderstel word dat die proses presies op standaard funksioneer. Die enigste verskil is, dat nie al die kombinasies van verskillende steekproefgroottes en aantal veranderlikes weer gebruik is nie.

#### 6.2 UITLEG VAN DIE SIMULASIES

Die parameters van belang en al die kritieke-waardes soos in Hoofstuk 4 vervat, is gebruik vir die simulاسies.

##### 6.2.1 DIE REGHOEKIGE-VERDELING

Beskou die digtheidsfunksie van die reghoekige-verdeling (uniform),

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

met verwagtingswaarde,

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2}$$

en variانسie,

$$Var(x) = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

Vir  $b = 1$  en  $a = 0$  is

$$E(X) = \frac{1}{2} \text{ en } Var(X) = \frac{1}{12}.$$

Stel  $X^* = \sqrt{12}(X - 1/2)$ .

Dan is  $E(X^*) = 0$  en  $Var(X^*) = 1$ .

Om die data uit 'n reghoekige-verdeling te genereer is dit slegs nodig om 'n klein gedeelte van die SAS-program wat in Bylae A vervat is, te verander. Die tweede *herhaallus (do)* word met die volgende *herhaallus* vervang:

```

Do i = 1 to groep;
  z2 = uniform(J(nv,1,123));
  z = sqrt(12)* (z2-0.5);
  y[i,] = z*T + mu;
end;

```

## 6.2.2 DIE EKSPONENSIAAL-VERDELING

Beskou die digtheidsfunksie van die eksponensiaal-verdeling,

$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0$$

met verwagtingswaarde,

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

en variansie,

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

In gestandaardiseerde vorm is  $Z = \frac{x - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda X - 1$ . (6.1)

Dan volg dat

$$E(Z) = 0 \quad \text{en} \quad Var(Z) = 1.$$

Stel  $U = F(x)$ , die verdelingsfunksie.

Dit is

$$U = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Dan volg dat

$$e^{-\lambda x} = 1 - U, \quad \text{dit wil sê}$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U) \tag{6.2}$$

In die simulasi-prosedure word verder van die volgende resultaat gebruik gemaak:

Indien  $U \sim g(0, 1)$ , dan is  $U^* = 1 - U \sim g(0, 1)$

Om die data uit 'n eksponensiaal-verdeling te genereer is dit slegs nodig om 'n klein gedeelte van die SAS-program wat in Bylae A vervat is, te verander. Die tweede *herhaallus (do)* word met die volgende *herhaallus* vervang:

```

Do i = 1 to groep;
lambda = 1;
const = -1/lambda;
u = uniform(J(nv,1,123));
x = const*log(u);
z = lambda*x - j(nv,1,1);
y[i,] = z*T + mu;
end;

```

Let op dat indien  $x$  in (6.2) die eksponensiaal-verdeling besit,  $z$  in (6.1) nie eksponensiaal verdeel is nie en dat  $z$  onafhanklik van  $\lambda$  is. Vir die simulaties wat gedoen is, is  $\lambda$  (lambda) derhalwe deurgaans as 1 gestel.

## 6.3 RESULTATE VAN DIE SIMULASIESTUDIES

### 6.3.1.1 DIE REGHOEKIGE-VERDELING

#### 6.3.1.1 Beheer van die prosesgemiddeld

a.)  $p = 2$

Tabel 6.1 : Resultate vir die  $T^2$ -kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 114 (5.7)                       |
| 15 | 90 (4.5)                        |
| 25 | 121 (6.1)                       |

Die getalle tussen hakies, dui die persentasie steekproewe aan wat buite beheer was.

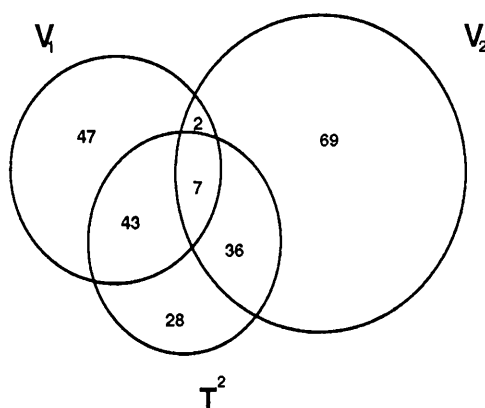
Tabel 6.2 : Resultate van die meervoudige vergelykingsprosedures

|                            | Roy se vereniging-snyding-metode |    |    | Bonferroni-metode |    |    |
|----------------------------|----------------------------------|----|----|-------------------|----|----|
|                            | n                                |    |    | n                 |    |    |
| Veranderlikes buite beheer | 10                               | 15 | 25 | 10                | 15 | 25 |
| 1                          | 36                               | 23 | 44 | 47                | 33 | 51 |
| 2                          | 29                               | 28 | 29 | 43                | 37 | 43 |
| 1,2                        | 1                                | 0  | 0  | 3                 | 0  | 0  |

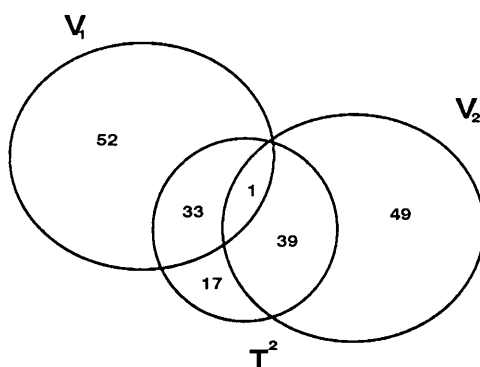
Tabel 6.3 : Resultate vir die  $\bar{X}$ -kaart

| Veranderlikes<br>buite beheer | n          |           |          |
|-------------------------------|------------|-----------|----------|
|                               | 10         | 15        | 25       |
| 1                             | 90         | 85        | 109      |
| 2                             | 105        | 88        | 106      |
| 1,2                           | 9          | 1         | 5        |
| Totaal                        | 204 (10.2) | 174 (8.7) | 220 (11) |

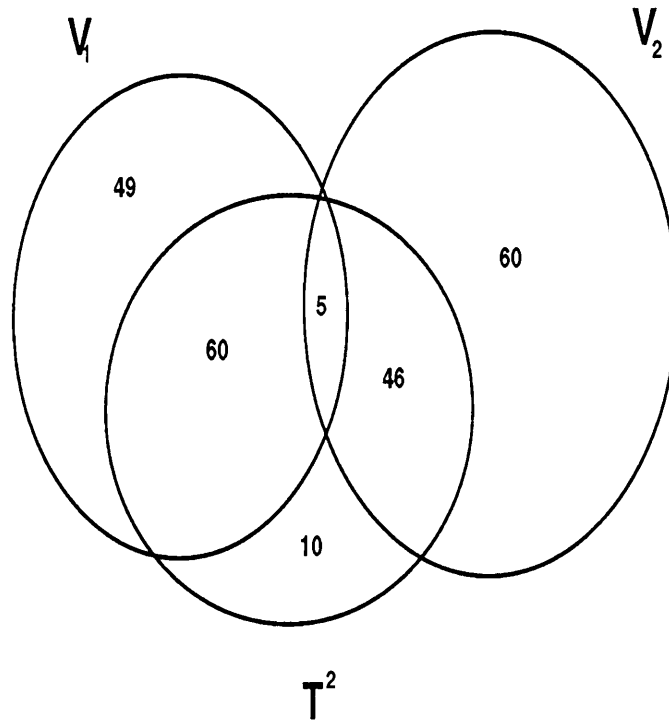
Die resultate in terme van gebeurtenisse, asook 'n vergelyking tussen die een- en meerveranderlike benaderings word grafies in Figure 6.1, 6.2 en 6.3 vir die onderskeie steekproefgroottes voorgestel.



Figuur 6.1 : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 10$   
( $\bar{X}$ -kaart teenoor die  $T^2$ -kaart)



Figuur 6.2 : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 15$   
( $\bar{X}$ -kaart teenoor die  $T^2$ -kaart)



**Figuur 6.3** : Vendiagramvoorstelling van gebeurtenisse vir  $n = 25$   
 ( $\bar{X}$ -kaart teenoor die  $T^2$ -kaart)

Die resultate in die tabelle asook in Figure 6.1, 6.2 en 6.3 is onderling uitsluitende gebeurtenisse waarby

$V_1$  : die gebeurtenis is vir die  $\bar{X}$ -kaart wanneer die eerste veranderlike buite beheer was,

$V_2$  : die gebeurtenis is vir die  $\bar{X}$ -kaart wanneer die tweede veranderlike buite beheer was en

$T^2$  : die gebeurtenis wanneer die proses volgens Hotelling se  $T^2$ -kaart buite beheer was.

b.)  $p=3$

**Tabel 6.4** : Resultate vir die  $T^2$ -kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 141 (7.1)                       |
| 15 | 114 (5.7)                       |
| 25 | 118 (5.9)                       |

Tabel 6.5 : Resultate van die meervoudige vergelykingsprosedures

|                            | Roy se vereniging-snyding-metode |    |    | Bonferroni-metode |    |    |
|----------------------------|----------------------------------|----|----|-------------------|----|----|
|                            | n                                |    |    | n                 |    |    |
| Veranderlikes buite beheer | 10                               | 15 | 25 | 10                | 15 | 25 |
| 1                          | 11                               | 13 | 13 | 22                | 29 | 29 |
| 2                          | 11                               | 11 | 11 | 28                | 27 | 23 |
| 3                          | 12                               | 6  | 12 | 31                | 16 | 28 |
| 1,2                        | 0                                | 0  | 0  | 1                 | 1  | 3  |
| 1,3                        | 0                                | 0  | 0  | 1                 | 0  | 2  |
| 2,3                        | 0                                | 1  | 0  | 1                 | 2  | 2  |
| 1,2,3                      | 0                                | 0  | 0  | 0                 | 0  | 0  |

Tabel 6.6 : Resultate vir die  $\bar{X}$ -kaart

| Veranderlikes buite beheer | n        |            |            |
|----------------------------|----------|------------|------------|
|                            | 10       | 15         | 25         |
| 1                          | 81       | 72         | 91         |
| 2                          | 96       | 88         | 118        |
| 3                          | 86       | 72         | 90         |
| 1,2                        | 4        | 7          | 12         |
| 1,3                        | 5        | 4          | 9          |
| 2,3                        | 8        | 8          | 10         |
| 1,2,3                      | 0        | 0          | 2          |
| Totaal                     | 280 (14) | 251 (12.6) | 332 (16.6) |

c.)  $p=5$

Tabel 6.7 : Resultate vir die  $T^2$ -kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 113 (5.7)                       |
| 15 | 121 (6.1)                       |
| 25 | 106 (5.3)                       |

Die resultate vir beide benaderings, vir die verskillende kombinasies van aantal veranderlikes en steekproefgroottes stem goed ooreen met dit wat in Hoofstuk 4 waargeneem is wanneer die data uit 'n normaalverdeling gegeneer is.

### 6.3.1.2 Beheer van die prosesverspreiding

a.)  $p=2$

Tabel 6.8: Resultate vir die verskillende meerveranderlike S-kaarte

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |           |
|----|---------------------------------|-----------|
|    | Det(S)-kaart                    | S-kaart   |
| 10 | 19 (1)                          | 122 (6.1) |
| 15 | 11 (0.6)                        | 135 (6.8) |
| 25 | 8 (0.4)                         | 133 (6.7) |

Die getalle in hakies, is die persentasie steekproewe wat buite beheer is.

Tabel 6.9: Resultate vir die meervoudige vergelykingsprosedures toegepas op die Det(S)-kaart

| Veranderlikes buite beheer | Roy se vereniging-snyding-metode |    |    | Bonferroni-metode |    |    |
|----------------------------|----------------------------------|----|----|-------------------|----|----|
|                            | n                                |    |    | n                 |    |    |
|                            | 10                               | 15 | 25 | 10                | 15 | 25 |
| 1                          | 3                                | 3  | 1  | 3                 | 3  | 1  |
| 2                          | 2                                | 3  | 1  | 2                 | 3  | 1  |
| 1 en 2                     | 0                                | 0  | 0  | 0                 | 0  | 0  |

Tabel 6.10 : Resultate vir die meervoudige vergelykingsprosedures toegepas op die S-kaart

| Veranderlikes buite beheer | Roy se vereniging-snyding-metode |    |    | Bonferonni-metode |    |    |
|----------------------------|----------------------------------|----|----|-------------------|----|----|
|                            | n                                |    |    | n                 |    |    |
|                            | 10                               | 15 | 25 | 10                | 15 | 25 |
| 1                          | 2                                | 1  | 0  | 2                 | 1  | 0  |
| 2                          | 0                                | 1  | 1  | 0                 | 1  | 1  |
| 1 en 2                     | 0                                | 0  | 0  | 0                 | 0  | 0  |

Tabel 6.11: Resultate vir die eenveranderlike S-kaart

| Veranderlikes buite beheer | n        |          |        |
|----------------------------|----------|----------|--------|
|                            | 10       | 15       | 25     |
| 1                          | 18       | 6        | 14     |
| 2                          | 10       | 12       | 6      |
| 1 en 2                     | 0        | 0        | 0      |
| Totaal                     | 28 (1.4) | 18 (0.9) | 20 (1) |

Vir beide die Det(S)- en eenveranderlike S-kaart is gevind dat baie min steekproewe buite beheer is. Vir die meerveranderlike S-kaart is in die orde van 6% steekproewe buite beheer wat min of meer dieselfde is as dit in Hoofstuk 4, vir data uit 'n normaalverdeling.

Die resultate van die meervoudige vergelykingsprosedures is egter baie swak. Indien data uit 'n reghoekige-verdeling afkomstig is, wil dit voorkom of dié metodes nie geskik is om te bepaal watter veranderlike(s) vir die buite-beheer toestand verantwoordelik is nie. (Kyk na die resultate vir die meerveranderlike S-kaart).

b.)  $p=3$

Tabel 6.12 : Resultate vir die meerveranderlike S-kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 159 (8)                         |
| 15 | 138 (6.9)                       |
| 25 | 154 (7.7)                       |

Tabel 6.13 : Resultate vir die eenveranderlike S-kaart

| Veranderlikes buite beheer | n        |          |          |
|----------------------------|----------|----------|----------|
|                            | 10       | 15       | 25       |
| 1                          | 12       | 12       | 5        |
| 2                          | 13       | 8        | 8        |
| 3                          | 24       | 32       | 25       |
| 1,2                        | 0        | 0        | 0        |
| 1,3                        | 0        | 1        | 0        |
| 2,3                        | 0        | 0        | 0        |
| 1,2,3                      | 0        | 0        | 0        |
| Totaal                     | 49 (2.5) | 53 (2.7) | 38 (1.9) |

Ongeveer 7% steekproewe is buite beheer volgens die meerveranderlike S-kaart. Dit is effens hoër as die vorige geval vir twee veranderlikes, asook in die geval waar die data afkomstig is uit 'n normaalverdeling soos in Hoofstuk 4 vervat. Vir die eenveranderlike S-kaart, is net soos in die geval vir twee veranderlikes, gevind dat minder steekproewe (<5%) buite beheer is.

Die resultate vir die meervoudige vergelykingsprosedures is *nog swakker* as dié wat verkry is wanneer die data afkomstig is uit 'n normaalverdeling soos in Hoofstuk 4. Om hierdie rede is word die resultate nie eers sigbaar gemaak vir verdere bespreking nie.

c.)  $p=5$

Tabel 6.15 : Resultate vir die meerveranderlike S-kaart

| n  | Aantal steekproewe buite beheer |
|----|---------------------------------|
| 10 | 147 (7.4)                       |
| 15 | 147 (7.4)                       |
| 25 | 158 (7.9)                       |

Volgens die meerveranderlikes S-kaart is benaderd 7% na 8% van die gesimuleerde steekproewe buite beheer. Net soos in die geval vir  $p = 2$  en 3 is dit effens hoër as in die geval waar die data afkomstig is uit 'n normaalverdeling.

**d.) Resultate vir die Log|S|-kaart**

Die resultate wat verkry is vir die Log|S|-kaart vir die verskillende kombinasies van veranderlikes en steekproefgroottes word in Tabel 6.16 saamgevat.

Tabel 6.16 : Resultate vir die Log|S|-kaart

| n  | p         |          |          |
|----|-----------|----------|----------|
|    | 2         | 3        | 5        |
| 10 | 19 (0.95) | 52 (2.6) | 34 (1.7) |
| 15 | 1 (0.05)  | 2 (0.1)  | 32 (1.6) |
| 25 | 0 (0)     | 2 (0.1)  | 77 (3.9) |

Vir die Log|S|-kaart is amper meer onstabiele resultate waargeneem as dié in Hoofstuk 4.

**6.3.2 DIE EKSPONENSIAAL-VERDELING**

Vir die eksponensiaal-verdeling is ondersoek in gestel na slegs 'n paar gevalle. Alhoewel die meervoudige vergelykingsprosedures wel toegepas is op die meerveranderlike uitkoms van 'n steekproef, word die resultate nie in syfers weergegee nie. Dieselfde leemte in dié prosedures wat in vorige hoofstukke waargeneem is, is ook in dié geval waargeneem waar die data uit 'n eksponensiaal-verdeling gegenereer is.

### 6.3.2.1 Beheer van die prosesgemiddeld

Tabel 6.17: Resultate vir die  $T^2$ -kaart ( $n = 10$ )

| p | Buite beheer |
|---|--------------|
| 2 | 249 (12.5)   |
| 3 | 293 (14.7)   |

Vir die  $\bar{X}$ -kaart is gevind dat ongeveer 10.3% steekproewe buite beheer was waar elke gebeurtenis (veranderlike) onderling uitsluitend beskou is.

### 6.3.2.2 Beheer van die prosesverspreiding

Tabel 6.18: Resultate vir die verskillende S-kaarte ( $n = 10$ )

| p | Det(S)   | S        | Log S    |
|---|----------|----------|----------|
| 2 | 426 (21) | 444 (22) | 431 (22) |
| 3 | -        | 479 (24) | 627 (31) |

Soortgelyke resultate is vir die eenveranderlike S-kaart waargeneem as die in bostaande tabel.

## 6.4 GEVOLGTREKKINGS

### 6.4.1 BEHEER VAN DIE PROSESGEMIDDELD

#### Die Reghoekige-verdeling

Die resultate stem goed ooreen met die wat in Hoofstuk 4 verkry is wanneer die data afkomstig is uit 'n normaalverdeling. Indien die meerveranderlike kontrolekaarte toegepas word op data afkomstig uit 'n reghoekige-verdeling in die praktyk, sal min of meer dieselfde resultate verkry word as in die geval wanneer die data afkomstig is uit 'n normaalverdeling.

#### Die Eksponensiaal-verdeling

Indien die ingesamelde data van 'n proses afkomstig is uit die eksponensiaal-verdeling, is gevind dat die benaderd 13% van die gesimuleerde steekproewe buite beheer was. In die praktyk sal dit meebring dat 'n proses in meer gevalle foutiewelik gestop sal word indien die data uit 'n eksponensiaal-verdeling afkomstig is, as in die geval wanneer die data uit 'n normaal-verdeling afkomstig is.

## **6.4.2 BEHEER VAN DIE PROSESPREIDING**

### **Die Reghoekige-verdeling**

#### **Beheer van die prosesverspreiding**

Vir data afkomstig uit 'n reghoekige-verdeling wil dit voorkom of die meerveranderlike S-kaart, die mees geskikte kontrolekaart is vir die beheer van die prosesverspreiding, van dié wat in die voorafgaande hoofstukke vervat is. Onbevredigende resultate is egter vir die meervoudige vergelykingsprosedures waargeneem.

### **Die Eksponensiaal-verdeling**

Vir die beheer van die prosesverspreiding is gevind dat die proses ongeveer 25% van die kere foutiewelik buite beheer geklassifiseer is wat effens hoër is as in die geval waar beheer uitgeoefen word oor die prosesgemiddeld. Indien ingesamelde data van 'n proses afkomstig is uit 'n skewe-verdeling, moet die toepassing van kontrolekaarte, veral die meerveranderlike kontrolekaarte, met omsigtigheid plaasvind.

## HOOFSTUK 7

### GEVOLGTREKKINGS EN VOORSTELLE VIR VERDERE STUDIE

Uit ondervinding in die praktyk is die meerveranderlike benadering van statistiese prosesbeheer 'n relatief nuwe begrip in kwaliteitsbeheer. In hierdie studie en volgens vele outeurs in die literatuur, [Montgomery en Wadsworth, 1972, Schall en Chandra, 1987], het die gebruik van meerveranderlike kontrolekaarte in kwaliteitsbeheer wel voordele. Die grootste enkele voordeel wat die kaarte inhou, is dat die getal **onnodige skroot** wat vervaardig word aansienlik minder is as in die geval wanneer die eenveranderlike kontrolekaarte gebruik word. Hierdie voordeel, of verbetering is direk afhanklik van die getal veranderlikes wat gelyktydig beheer word. 'n Nadeel wat die meerveranderlike benaderings inhou, is dat dit meer kompleks is as die relatief eenvoudige eenveranderlike kontrolekaarte wat oor die jare gebruik word.

Met behulp van simulاسie is gevind dat die  $T^2$ -kaart goed presteer onder normale sowel as variërende omstandighede.

Vir die beheer van die prosesverspreiding is drie verskillende meerveranderlike kontrolekaarte, te wete die Det(S), S en die Log|S|-kaart beskou. Met behulp van simulاسies is bevind dat dié kaarte nie altyd ewe goed geskik is vir verskillende situاسies nie. Alhoewel goeie resultate vir die Det(S)-kaart verkry is wanneer twee veranderlikes ter sprake is, word dié kaart glad nie aanbeveel vir meerdere veranderlikes nie. Die benadering verswak namate die aantal veranderlikes toeneem wat beheer word.

Vir die Log|S|-kaart is net die teenoorgestelde waargeneem. Dié kaart (benadering) verbeter namate die getal veranderlikes, asook die steekproefgrootte, toeneem.

Uit die simulاسies wil dit voorkom of Morrison se S-kaart die mees geskikte kaart van die drie is om vir die beheer van die prosesverspreiding te gebruik [Morrison, 1988]. Waar data uit die reghoekige verdeling gegeneer is, het die S-kaart ook die mees konsekwente resultate gelewer.

Die toepassing van die Bonferroni-metode en Roy se vereniging-snyding-metode op die buite-beheer-steekproewe is egter onbevredigend. In te veel gevalle is bogenoemde metodes nie in staat nie om dié veranderlikes te identifiseer wat veroorsaak dat die proses meerveranderlik buite beheer is. Dié tendens is waargeneem vir beide die beheer van die prosegemiddeld en die prosesverspreiding.

In Hoofstuk 6 is met behulp van simulاسies bepaal dat die meerveranderlike kontrolekaarte onbevredigende resultate lewer indien dit toegepas word op data afkomstig uit 'n skewe verdeling. Dit geld vir beide die beheer van die prosegemiddeld en die prosesverspreiding. Vir die gebruik van die meerveranderlike kontrolekaarte word aanbeveel dat vooraf ondersoek ingestel word na die tipe verdeling

waaruit die data afkomstig is en om, indien nodig, die data te transformeer [Box en Jenkins, 1976] na 'n verdeling wat ongeveer normaal-verdeel is. Vir die toetsing van meerveranderlike normaliteit kan die maatstawwe volgens Mardia vir skeefheid en kurtosis gebruik word [Mardia, 1970].

### **VOORSTELLE VIR VERDERE STUDIE**

Dit is nodig om verder ondersoek in te stel na relevante metodes wat gebruik kan word om die moontlike oorsake, die buite-beheer-parameter(s), te identifiseer indien 'n proses meerveranderlik buite beheer is vir beide die prosesgemiddeld en die prosesverspreiding. 'n Moontlike oplossing vir die verbetering van die meervoudige vergelykingsprosedures is om die peil van betekenis groter te maak. Indien toetsing vir die meerveranderlike kaart op 'n 5%-peil van betekenis plaasgevind het, moet bv. 'n 9%-peil van betekenis gebruik word vir die meervoudige vergelykingsprosedures. Dié gewysigde  $\alpha$ -waarde moet bepaal word in oorleg met die aantal veranderlikes wat beheer word. Met behulp van verdere simulaties behoort dit moontlik te wees om so 'n gewysigde  $\alpha$ -waarde te bepaal.

Verdere ondersoek kan ingestel word na die ontwerp en gebruik van gewysigde eenveranderlike kontrolekaarte, indien aanvaar word dat 'n proses presies volgens standaard funksioneer.

In Hoofstuk 6 is slegs aandag gegee aan prosesse met data afkomstig uit die reghoekige en eksponensiaal-verdeling. Ondersoek kan ingestel word na die gedrag van die meerveranderlike kontrolekaarte vir data afkomstig uit ander verdelings.

Vir die Log|S|-kaart bestaan daar nie 'n geskikte metode wat gebruik kan word om dié veranderlikes te identifiseer wat die oorsaak is indien die proses buite beheer is nie. Ondersoek kan ingestel word na die ontwikkeling van so 'n metode, of om 'n aanpassing in die bestaande meervoudige vergelykingsprosedures aan te bring wat vir dié behoefte voorsiening sal maak.

## **Meerveranderlike statistiese kwaliteitsbeheer**

deur

Anton de Villiers

Leier: Professor S.H.C. du Toit

Departement Statistiek

Voorgelê ter vervulling van 'n deel van die vereistes  
vir die graad Magister in Wiskundige Statistiek

### *Samevatting*

Meerveranderlike kontrolekaarte is 'n relatief nuwe benadering in statistiese prosesbeheer. Dié kaarte hou die voordeel in dat 'n proses wat presies volgens standaard funksioneer aansienlik minder foutiewelik gestop word as in die geval waar die eenveranderlike kontrolekaarte gebruik word. Die onderlinge verwantskappe tussen veranderlikes word in ag geneem vir die konstruksie van kontrolelimiete, wat nie die geval is in die eenveranderlike benadering nie.

Bogenoemde voordele is met simulasiestudies bevestig. Die robuustheid van een- en meerveranderlike kontrolekaarte is ondersoek met betrekking tot 'n proses wat onder normale en variërende omstandighede funksioneer. Verskuiwings is in die prosesgemiddeld en die kovariansiematriks bewerkstellig.

Ondersoek is ingestel na die robuustheid van die verskillende benaderings vir afwykings van die teoretiese aanname van normaliteit. Vir dié doel is data uit die reghoekige en die eksponensiaal-verdeling gegenereer.

Aanbevelings word gemaak vir die gebruik van verskillende meerveranderlike kontrolekaarte in verskillende omstandighede.

# **Multivariate statistical quality control**

by

Anton de Villiers

Supervisor: Professor S.H.C. du Toit

Statistics Department

Submitted in fulfilment of part of the requirements

for the Master of Mathematical Statistics degree

## *Summary*

Multivariate control charts are a relatively new approach in statistical process control. These charts have the advantage that a process functioning precisely to standard will be stopped less often mistakenly than in the case where univariate charts are used. The mutual relationships between variables are taken into account in the construction of the control limits, which is not the case with the univariate approach.

The above-mentioned advantages have been confirmed by simulation studies. The robustness of univariate and multivariate control charts was investigated in respect of a process functioning under normal and varying circumstances. Changes were brought about in the process mean and the covariance matrix.

The robustness of the different approaches for deviations from the theoretical assumption of normality was investigated. For this purpose data were generated from the rectangular and the exponential distributions.

Recommendations are made for the use of different multivariate control charts under different circumstances.

## LITERATUURVERWYSINGS

- ALLOWAY, J.A. and RAGHAVACHARI, M. (1990). Multivariate Control Charts based on Trimmed Means. *Trans. of ASQC Congress, May 1990, San Fransisco, pp. 449-453.*
- ANDERSON, T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. 2nd ed. Wiley, New York.
- ALT, F.B. (1985). Multivariate Quality Control, *In Encyclopedia of Statistical Sciences*. S. Kotz and N. Johnson, eds. Wiley, New York.
- ALT, F.B and BEDEWI, G.E. (1986). SPC of dispersion for multivariate data. *ASQC Quality Congress Transaction - Anaheim.*
- BARTLETT, M.S. (1954). A note on multiplying factors for various chi-squared approximations. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 16, pp. 296-298.*
- BEZUIDENHOUT, D (1984). *Kwaliteitskursus B*. Krygkor, ISA 84-7.
- BLANK, L. (1980). *Statistical procedures for engineering, management and science*. McGraw-Hill, New York.
- BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M. (1976). Time Series Analysis forecasting and control. *Revised Edition, Holden Day.*
- BURR, I.W. (1976). *Statistical Quality Methods*. Marcel Dekker, Inc.
- BUTLER, J.J. (1983). Statistical quality control with cusum charts. *Chemical Engineering. Vol. 90, pp. 73-77.*
- GRANT, E.L. and LEAVENWORTH, R.S. (1980). *Statistical Quality Control*, New York: McGraw-Hill Book Company.
- CROSIER, R.B. (1988). Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes. *Technometrics, Vol. 30, No. 3.*
- CROSIER, R.B. and LUCAS, J.M. (1982). Fast Initial Response for Cusum Quality Control Schemes: Give Your Cusum A Head Start. *Technometrics, Vol. 24, No. 3.*

- DUNCAN, A.J. (1974). *Quality Control and Industrial Statistics*. 4th ed. Richard D. Irwin, Homewood, IL.
- DU TOIT, S.H.C., STEYN, A.G.W. and STUMPF, R.H. (1986). *Graphical Exploratory Data Analysis*. Springer-Verlag.
- GNANADESIKAN, M. and GUPTA, S.S. (1970). A Selection Procedure for Multivariate Normal Distributions in Terms of the Generalized Variances. *Technometrics*, Vol. 12, No. 1. pp?
- HEALY, J.D. (1987). A Note on Multivariate CUSUM Procedures. *Technometrics*, Vol. 29, No. 4.
- HOTELLING, H. (1947). Multivariate quality control. *Techniques of Statistical Analysis*, pp. 111-184.
- JACKSON, J.E. (1956). Quality Control Methods for two Related Variables. *Industrial Quality Control*. 1957. U.S.A.
- JACKSON, J.E. (1959). Quality Control Methods for Several Related Variables. *Technometrics*, Vol. 1, No. 4.
- KOLARIK, W.J. and JAISINGH, L.R. (1987). Development of a Multinomial Based Attributes Control Chart and OC Surface. *Trans Ky Sci*, Vol. 48, No. 3-4. pp?
- LUCAS, J.M. (1982). Combined Shewhart-Cusum Quality Control Schemes. *Journal of Quality Technology*, Vol. 14, No. 2.
- MARDIA, K.V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*, Vol. 57, pp. 519-530.
- MARDIA, K.V. (1974). Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis in testing normality and robustness studies. *Sankhya B36*, pp 115-128.
- MONTGOMERY, C.G. and WADSWORTH, H.M. (1972). Some Techniques For Multivariate Quality Control Applications. *Technical Conference Transactions*.
- MORRISON, D.F. (1988). *Multivariate Statistical Methods*. McGraw-Hill, New York, 2nd ed.
- MUDOCH, J. (1979). *Control Charts*. London: Macmillian Press.
- MURPHY, B.J. (1987). Selecting out of control variables with the  $T^2$  multivariate quality control procedure. *The Statistician*, Vol 36, pp. 571-583.
- PEARSON, E.S. and HARTLEY, H.O. (1972). *Biometrika tables for statisticians*. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press.

PIGNATIELLO, J.J. and RUNGER G.C. (1990). Comparisons of Multivariate Cusum Charts. *Journal of Quality Technology* Vol. 22, No. 3.

REYNOLDS, M.R. and AMIN, R.W. (1988).  $\bar{X}$  Charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, Vol. 30, No. 2.

SAS/IML (1985). *User's Guide for Personal Computers, Version 6 Edition*. Cary, NC: SAS Institute Inc.

SCHALL S. and CHANDRA J. (1987). Multivariate quality control using principal components. *International Journal of Prod. research* Vol. 25, No. 4.

STEEN, F.H. (1982). *Elements of Probability and Mathematical Statistics*. Duxbury Press.

STRIVASTAVA, M.S. and CARTER, E.M. (1983). *E.M. An Introduction To Multivariate Statistics*. Elsevier Science Publishers.

WALDMANN, W.H. (1986). Bounds for the Distribution of the Run Length of One-Sided and Two-Sided Cusum Quality Control Schemes. *Technometrics* Vol. 28, No. 1.

WOODALL, W.H. (1983). The Distribution of the Run Length of One-Sided CUSUM Procedures for Continuous Random Variables. *Technometrics* Vol. 25.

WOODALL, W.H. and NCUBE, M.M. (1985). Multivariate CUSUM Quality Control Procedures. *Technometrics* Vol. 27, No. 3.

WOODALL, W.H. (1986). The Design of Cusum Quality Control Charts. *Journal of Quality Technology* Vol. 18, No. 2.

YASHCHIN, E. (1985). On the analysis and design of Cusum-Shewhart control schemes. *IBM Journal of Research Development*, Vol. 29, No. 4.

## BYLAE A

### REKENAARPROGRAM

In hierdie bylae is die basiese SAS/IML-program vervat wat gebruik is om die simulاسies te doen. Die program maak voorsiening vir twee veranderlikes wat maklik uitgebrei kan word na meerdere veranderlikes. In die geheel gesien is dit moontlik om die program meer effektief en gebruikersvriendelik te skryf. Vir die doel van die verhandeling is dit egter nie nodig nie.

```
LIBNAME SIM 'A';  
PROC IML ;
```

*IN DIE VOLGENDE PARAGRAAF WORD DIE BELANGRIJKSTE PARAMETERS GEDEFINIEER WAT GEBRUIK WORD OM DIE DATA TE GENEREER, ASOOK IN SEKERE GEVALLE INSETWAARDES VIR KONTROLELI-MIETE.*

*WAAR 'N VERSKUIWING VAN EEN OF ANDER AARD BEWERKSTELLIG IS, IS DIE PARAMETERS, MU1 EN SIGMA1 GEBRUIK. SIGMA1 IS DAN OOREENKOMSTIG IN DIE FUNKSIE T VERVANG, EN MU1 IN DIE TWEDE HERHAALLUS (DO).*

*DIE WAARDES YLGEM EN YLSTD IS DIE BERAMERS VIR DIE OPSTELLING VAN DIE LIMIETE VIR DIE LOG(S)-KAART.*

*NV : AANTAL VERANDERLIKES*

*GROEP : STEEKPROEFGROOTTE*

*NSIM : DIE AANTAL SIMULASIES*

*f : TABELWAARDE VIR DIE OPSTELLING VAN DIE LIMIET VIR DIE T<sup>2</sup>-KAART*

*BONT : WAARDE VIR DIE BONFERRONI-INTERVAL*

*XXO EN XXB : CHI-KWADRAAT WAARDES VIR DIE OPSTELLING VAN DIE LIMIETE VIR DIE DET(S)-KAART*

*U EN L : WAARDES VIR ROY SE VERENIGING-SNYDING-METODE WANNEER BEHEER UITGEOEFEN WORD OOR DIE PROSESVERSPREIDING.*

```
MU = { 11.58 6.55};  
SIGMA = { 1.185 0.033, 0.033 0.093};  
MU1 = { 11.58 6.55};  
SIGMA1 = { 1.185 0.033, 0.033 0.093};  
IA = {1 0, 0 1};  
YLGEM = {-1.096};  
YLSTD = {0.29};  
NV={2};  
GROEP={10};  
NSIM={2000};  
T = HALF(SIGMA)
```

f = 4.46;  
BONT=2.68571;  
xxo = 0.383;  
xxb = 1.6025;  
U= 21.06 ; L=1.93 ;

*IN DIE VOLGENDE PARAGRAAF WORD VERDERE PARAMETERS, SKIKKINGS EN MATRIKSE GEDEFINIEER WAT LATER IN DIE PROGRAM GEBRUIK WORD*

D0 = DIAG(SIGMA);  
Y = J(GROEP,NV,{0});  
Y1=0; Y2=0;  
X1=0; X2=2;  
K1=0; K2=0;  
X = J(NSIM,NV,{0});  
FREK = J(7,1,0);  
SFREK = FREK;  
MFREK = FREK;  
VIERB = J(1,2,0);  
VIERR = VIERB;  
KB = J(NV,NV,{0});  
OTB = J({1},NV,{0});  
BTB = OTB;ODR=BTB;BDR=BTB;  
OTR = OTB;  
BTR = OTB;  
HVB = J(NV,1,0);  
HVR = HVB;  
HB = J(3,1,0); HR=HB;  
DFR = J(3,1,0);DFB=DFR;DFE=DFR;MFR=DFR; MFB=DFR;  
DR = J(2,1,0);DB=DR;DE=DR;CH=DR;  
MR = DR; MB = DR;  
ODR = J(NV,1,0); BDR = ODR; OSR=ODR; BSR = ODR;  
CHI=HVB;CHIM=CHI;CHIB=CHI;  
SOM = J(7,NV,0);  
SSOM = J(2,NV,0);  
GEM = SOM;  
SGEM=SSOM;  
MSOM = SSOM;  
MGEM = SGEM;  
SSOM3 = J(NV,NV,0); SGEM3 = SSOM3;  
SSOM4 = J(NV,NV,0); SGEM4 = SSOM4;

```

SSOM5 = J(NV,NV,0); SGEM5 = SSOM5;
SSOM6 = J(NV,NV,0); SGEM6 = SSOM6;
SSOM7 = J(NV,NV,0); SGEM7 = SSOM7;
MSOM3 = J(NV,NV,0); MGEM3 = MSOM3;
MSOM4 = J(NV,NV,0); MGEM4 = MSOM4;
MSOM5 = J(NV,NV,0); MGEM5 = MSOM5;
MSOM6 = J(NV,NV,0); MGEM6 = MSOM6;
MSOM7 = J(NV,NV,0); MGEM7 = MSOM7;
HT=0; DF=0; LM=0; LMF=0;YLF=0;

```

*IN DIE EERSTE HERHAALLUS (DO) WORD NSIM STEEKPROEWE VAN GROOTTE GROEP GEGENEREER. IN DIE TWEDE HERHAALLUS (DO) WORD DIE DATA UIT 'N BEPAALDE VERDELING GEGENEREER. DIT IS DIE GEDEELTE WAT VERANDER SOOS BESKRYF IN HOOFSTUK 6 WANNEER DATA UIT 'N ANDER VERDELING GEGENEREER WORD. NA DIE TWEDE HERHAALLUS (DO) VOLG VERDERE DEFINIERINGS VAN PARAMETERS EN DIE BEREKENINGE VAN DIE VERSKILLENDE TOETSGROOTHEDE.*

**DO k = {1} TO NSIM;**

*DO l = {1} TO groep;*

*Z = NORMAL(J(NV,{1},{0}));*

*Y[l,] = Z' \*T + MU;*

*END;*

V1=0;V2=0;H=0;HVB[1,1] = 0; HVB[2,1] = 0;

HVR[1,1] = 0; HVR[2,1] = 0;

MOR=0;YL=MOR;S=MOR;

DR[1,1] = 0;

DR[2,1] = 0;

DB[1,1] = 0;

DB[2,1] = 0;

DE[1,1] = 0;

DE[2,1] = 0;

MR[1,1] = 0;

MR[2,1] = 0;

MB[1,1] = 0;

MB[2,1] = 0;

SD=0;

N = NROW(Y);

SUM = Y[+,,];

MEAN = SUM/N;

XPX = Y' \*Y - SUM' \*SUM/N;

S =diag(1/SQRT(vecDIAG(XPX)));

CORR = S\*XPX\*S;

sscp=y'\*y;

```

csscp=sscp-n*(mean*mean);
kov=csscp/(n-1);
DD = DIAG(KOV);
ylog = log10(det(kov));
TT = N*(MEAN - MU)*INV(KOV)*(MEAN - MU)';
SS = SQRT( DET(kov));
kons_t = nv*(n-1)/(n-nv);
t_tabel=kons_t*f;
DS = SQRT(DET(SIGMA));
BSS = DS*XXB;
OSS = DS*XXO;
LM = (GROEP-1)*(LOG(DET(SIGMA))-LOG(DET(KOV))
+ TRACE(KOV*INV(SIGMA))-NV);
LMOR = (1-(1/(6*(GROEP-1))))*(2*NV + 1 - 2/(NV+1))*LM;
LBKL = YLGEM + 1.96*YLSTD;
LOKL = YLGEM - 1.96*YLSTD;

```

*IN DIE VOLGENDE PARAGRAAF WORD HOTELLING SE T<sup>2</sup>-KAART TOEGEPAS WAARNA DIE MEERVOUDIGE VERGELYKINGSPROSEDURES TOEGEPAS WORD.*

```

if tt > t_tabel then do;
  H=1;
  HT=HT+1;
  DO W = {1} TO NV;
    A = IA[W,];
    VIERR[1,W] = ROOT(((T_TABEL)*(A*KOV*A))/GROEP);
    OTR[1,W] = (A*MEAN') - VIERR[1,W];
    BTR[1,W] = (A*MEAN') + VIERR[1,W];
    VIERB[1,W] = BONT*ROOT(((A*KOV*A))/GROEP);
    OTB[1,W] = (A*MEAN') - VIERB[1,W];
    BTB[1,W] = (A*MEAN') + VIERB[1,W];
    IF MU[W] > BTB[1,W] | MU[W] < OTB[1,W] THEN DO;
      HVB[W,1]=1;
      HB[W,1] = HB[W,1] + 1;
    END;
    IF MU[W] > BTR[1,W] | MU[W] < OTR[1,W] THEN DO;
      HVR[W,1]=1;
      HR[W,1] = HR[W,1] + 1;
    END;
  END;
END;
IF HVB[1,1] = 1 & HVB[2,1] = 1 THEN DO;
  HB[3,1] = HB[3,1] + 1;
END;

```

```

        IF HVR[1,1] = 1 & HVR[2,1] = 1 THEN DO;
            HR[3,1] = HR[3,1] + 1;
        END;
    END;

IF MEAN[,1] > 12.22 | MEAN[,1] < 10.87 THEN DO;
    V1=1;
END;
IF MEAN[,2] > 6.73 | MEAN[,2] < 6.36 THEN DO;
    V2=1;
END;
IF V1=1 & V2=0 & H=0 THEN DO;
    FREK[1,1] = FREK[1,1] + 1;
    SOM[1,1] = SOM[1,1] + ABS(MEAN[1,1] - MU[1,1]);
    GEM[1,1] = SOM[1,1]/FREK[1,1];
END;
IF V1=0 & V2=1 & H=0 THEN DO;
    FREK[2,1] = FREK[2,1] + 1;
    SOM[2,2] = SOM[2,2] + ABS(MEAN[1,2] - MU[1,2]);
    GEM[2,2] = SOM[2,2]/FREK[2,1];
END;
IF V1=0 & V2=0 & H=1 THEN DO;
    FREK[3,1] = FREK[3,1] + 1;
    SOM[3,] = SOM[3,] + ABS(MEAN - MU);
    GEM[3,] = SOM[3,]/FREK[3,1];
END;
IF V1=1 & V2=1 & H=0 THEN DO;
    FREK[4,1] = FREK[4,1] + 1;
    SOM[4,] = SOM[4,] + ABS(MEAN - MU);
    GEM[4,] = SOM[4,]/FREK[4,1];
END;
IF V1=1 & V2=0 & H=1 THEN DO;
    FREK[5,1] = FREK[5,1] + 1;
    SOM[5,] = SOM[5,] + ABS(MEAN - MU);
    GEM[5,] = SOM[5,]/FREK[5,1];
END;
IF V1=0 & V2=1 & H=1 THEN DO;
    FREK[6,1] = FREK[6,1] + 1;
    SOM[6,] = SOM[6,] + ABS(MEAN - MU);
    GEM[6,] = SOM[6,]/FREK[6,1];
END;
IF V1=1 & V2=1 & H=1 THEN DO;
    FREK[7,1] = FREK[7,1] + 1;

```

```

SOM[7,] = SOM[7,] + ABS(MEAN - MU);
GEM[7,] = SOM[7,]/FREK[7,1];
END;

```

*DIE DET(S)-KAART WORD NOU TOEGEPAS WAARNA DIE MEERVOUDIGE VERGELYKINGSPROSEDURES TOEGEPAS WORD.*

```

IF SS > BSS | SS < OSS THEN DO;
  SD=1;
  DF = DF + 1;
  DO R = {1} TO NV;
    A = IA[R,];
    ODR[R,1] = (N-1)*(A*KOV*A')/U;
    BDR[R,1] = (N-1)*(A*KOV*A')/L;
    IF SIGMA[R,R] > BDR[R,1] | SIGMA[R,R] < ODR[R,1] THEN DO;
      DR[R,1] = 1;
      DFR[R,1] = DFR[R,1] + 1;
    END;
    CHIB = ((N-1)*(A*KOV*A'))/(A*SIGMA*A');
    IF CHIB > 22.16 | CHIB < 1.989 THEN DO;
      DB[R,1] = 1;
      DFB[R,1] = DFB[R,1] + 1;
    END;
  END;
END;
IF DR[1,1] = 1 & DR[2,1] = 1 THEN DO;
  DFR[3,1] = DFR[3,1] + 1;
END;
END;
IF DB[1,1] = 1 & DB[2,1] = 1 THEN DO;
  DFB[3,1] = DFB[3,1] + 1;
END;

```

*DIE MEERVERANDERLIKE S-KAART VOLGENS MORRISON WORD NOU TOEGEPAS WAARNA DIE MEERVOUDIGE VERGELYKINGSPROSEDURES TOEGEPAS WORD.*

```

IF LMOR > 9.349 | LMOR < 0.216 THEN DO;
  MOR=1;
  LMF = LMF + 1;
  DO M = {1} TO NV;
    A = IA[M,];
    OSR[M,1] = (N-1)*(A*KOV*A')/U;
    BSR[M,1] = (N-1)*(A*KOV*A')/L;
  END;
END;

```

```

IF (A*SIGMA*A') > BSR[M,1] | (A*SIGMA*A') < OSR[M,1] THEN DO;
  MR[M,1] = 1;
  MFR[M,1] = MFR[M,1] + 1;
END;

  CHIM = ((N-1)*(A*KOV*A'))/(A*SIGMA*A');
IF CHIM > 22.16 | CHIM < 1.98 THEN DO;
  MB[M,1] = 1;
  MFB[M,1] = MFB[M,1] + 1;
END;
END;
IF MR[1,1] = 1 & MR[2,1] = 1 THEN DO;
  MFR[3,1] = MFR[3,1] + 1;
END;
IF MB[1,1] = 1 & MB[2,1] = 1 THEN DO;
  MFB[3,1] = MFB[3,1] + 1;
END;
END;

```

*DIE LOG|S|-KAART WORD NOU TOEGEPAS.*

```

IF YLOG > LBKL | YLOG < LOKL THEN DO;
  YL=1;
  YLF = YLF + 1;
END;

```

*DIE EENVERANDERLIKE S-KAART WORD NOU OP DIE GEGENEREEDE STEEKPROEFDATA TOEGEPAS.*

```

DO E = 1 TO NV;
  A = IA[E,];
  CH[E,] = ((N-1)*(A*KOV*A'))/(A*SIGMA*A');
IF CH[E,] > 19.023 | CH[E,] < 2.7 THEN DO;
  DE[E,1] = 1;
  DFE[E,1] = DFE[E,1] + 1;
END;
END;
IF DE[1,1] = 1 & DE[2,1] = 1 THEN DO;
  DFE[3,1] = DFE[3,1] + 1;
END;

```

*'N FREKWENSIEVERDELING VIR DIE DET(S)-KAART TEENoor DIE EENVERANDERLIKE S-KAART WORD IN DIE VOLGENDE PARAGRAAF GEDOEN.*

```
IF DE[1,1]=1 & DE[2,1]=0 & SD=0 THEN DO;
  SFREK[1,1] = SFREK[1,1] + 1;
  SSOM[1,1] = SSOM[1,1] + ABS(KOV[1,1] - SIGMA[1,1]);
  SGEM[1,1] = SSOM[1,1]/SFREK[1,1];
END;
IF DE[1,1]=0 & DE[2,1]=1 & SD=0 THEN DO;
  SFREK[2,1] = SFREK[2,1] + 1;
  SSOM[2,2] = SSOM[2,2] + ABS(KOV[2,2] - SIGMA[2,2]);
  SGEM[2,2] = SSOM[2,2]/SFREK[2,1];
END;
IF DE[1,1]=0 & DE[2,1]=0 & SD=1 THEN DO;
  SFREK[3,1] = SFREK[3,1] + 1;
  SSOM3 = SSOM3 + ABS(DD - D0);
  SGEM3 = SSOM3/SFREK[3,1];
END;
IF DE[1,1]=1 & DE[2,1]=1 & SD=0 THEN DO;
  SFREK[4,1] = SFREK[4,1] + 1;
  SSOM4 = SSOM4 + ABS(DD - D0);
  SGEM4 = SSOM4/SFREK[4,1];
END;
IF DE[1,1]=1 & DE[2,1]=0 & SD=1 THEN DO;
  SFREK[5,1] = SFREK[5,1] + 1;
  SSOM5 = SSOM5 + ABS(DD - D0);
  SGEM5 = SSOM5/SFREK[5,1];
END;
IF DE[1,1]=0 & DE[2,1]=1 & SD=1 THEN DO;
  SFREK[6,1] = SFREK[6,1] + 1;
  SSOM6 = SSOM6 + ABS(DD - D0);
  SGEM6 = SSOM6/SFREK[6,1];
END;
IF DE[1,1]=1 & DE[2,1]=1 & SD=1 THEN DO;
  SFREK[7,1] = SFREK[7,1] + 1;
  SSOM7 = SSOM7 + ABS(DD - D0);
  SGEM7 = SSOM7/SFREK[7,1];
END;
```

*'N FREKWENSIEVERDELING VIR DIE MEERVERANDERLIKE S-KAART TEENoor DIE EENVERANDERLIKE S-KAART WORD IN DIE VOLGENDE PARAGRAAF GEDOEN.*

```

IF DE[1,1]=1 & DE[2,1]=0 & MOR=0 THEN DO;
  MFREK[1,1] = MFREK[1,1] + 1;
  MSOM[1,1] = MSOM[1,1] + ABS(KOV[1,1] - SIGMA[1,1]);
  MGEM[1,1] = MSOM[1,1]/MFREK[1,1];
END;
IF DE[1,1]=0 & DE[2,1]=1 & MOR=0 THEN DO;
  MFREK[2,1] = MFREK[2,1] + 1;
  MSOM[2,2] = MSOM[2,2] + ABS(KOV[2,2] - SIGMA[2,2]);
  MGEM[2,2] = MSOM[2,2]/MFREK[2,1];
END;
IF DE[1,1]=0 & DE[2,1]=0 & MOR=1 THEN DO;
  MFREK[3,1] = MFREK[3,1] + 1;
  MSOM3 = MSOM3 + ABS(DD - D0);
  MGEM3 = MSOM3/MFREK[3,1];
END;
IF DE[1,1]=1 & DE[2,1]=1 & MOR=0 THEN DO;
  MFREK[4,1] = MFREK[4,1] + 1;
  MSOM4 = MSOM4 + ABS(DD - D0);
  MGEM4 = MSOM4/MFREK[4,1];
END;
IF DE[1,1]=1 & DE[2,1]=0 & MOR=1 THEN DO;
  MFREK[5,1] = MFREK[5,1] + 1;
  MSOM5 = MSOM5 + ABS(DD - D0);
  MGEM5 = MSOM5/MFREK[5,1];
END;
IF DE[1,1]=0 & DE[2,1]=1 & MOR=1 THEN DO;
  MFREK[6,1] = MFREK[6,1] + 1;
  MSOM6 = MSOM6 + ABS(DD - D0);
  MGEM6 = MSOM6/MFREK[6,1];
END;
IF DE[1,1]=1 & DE[2,1]=1 & MOR=1 THEN DO;
  MFREK[7,1] = MFREK[7,1] + 1;
  MSOM7 = MSOM7 + ABS(DD - D0);
  MGEM7 = MSOM7/MFREK[7,1];
END;

```

IN DIE VOLGENDE PARAGRAAF WORD DIE VERSKILLENDE UITVOERE VAN BELANG GEDRUK, WAARBY  
HT - AANTAL STEEKPROEWE BUIE BEHEER VIR DIE  $T^2$ -KAART  
HB - BONFERRONI-METODE TOEGEPAS OP DIE  $T^2$ -KAART  
HR - ROY SE VERENIGING-SNYDING-METODE TOEGEPAS OP DIE  $T^2$ -KAART  
FREK - FREKWENSIE-VERDELING VIR DIE VENDIAGRAMVOORSTELLINGS VIR DIE BEHEER VAN DIE  
PROSESGEMIDDELD  
GEM - DIE GEMIDDELDE AFWYKINGS VIR DIE VERSKILLENDE GEBEURTENISSE  
DFE - FREKWENSIE-VERDELING VIR DIE EENVERANDERLIKE  $\bar{X}$ -KAART  
DF - DIE DET(S)-KAART  
DFB - BONFERRONI-METODE TOEGEPAS OP DIE DET(S)-KAART  
DFB - ROY SE VERENIGING-SNYDING-METODE TOEGEPAS OP DIE DET(S)-KAART  
SFREK - FREKWENSIE VERDELING VIR DIE VENDIAGRAMME VIR DIE VERSKILLENDE GEBEURTENISSE -  
BEHEER VAN DIE PROSESVERSPREIDING  
SGEM:7 -DIE GEMIDDELDE AFWYKINGS VIR DIE VERSKILLENDE GEBEURTENISSE - BEHEER VAN DIE  
PROSESVERSPREIDING  
DIE PARAMETERS MET 'N M VOORAAN, IS NET 'N HERHALING VIR DIE MEERVERANDERLIKE S-KAART

PRINT FREK GEM HT HB HR;  
PRINT DFE;  
PRINT YLF;  
PRINT DF DFR DFB SFREK SGEM;  
PRINT SGEM3 SGEM4 SGEM5 SGEM6 SGEM7;  
PRINT MFREK;  
PRINT MGEM3 MGEM4 MGEM5 MGEM6 MGEM7 MFR MFB LMF;  
  
**END;**  
**QUIT;**