

'N ONDERSOEK NA DIE GEDRAG  
VAN DIE OPLOSSING VAN 'N  
WARMTEGELEIDINGSPROBLEEM MET  
VARIËRENDE RANDMEDIUMPARAMETERS

DEUR

PIETA BRAND

voorgelê ter vervulling van 'n deel van die vereistes vir die graad

MSc

IN DIE FAKULTEIT WIS- EN NATUURKUNDE  
VAN DIE  
UNIVERSITEIT VAN PRETORIA  
PRETORIA

OKTOBER 1987

INHOUDSOPGAWE

|  |       |
|--|-------|
| SAMEVATTING  | (i)   |
| SYNOPSIS   | (iii) |
| HOOFSTUK 1: INLEIDING                                      | 1     |
| HOOFSTUK 2: WARMTEGELEIDING                                | 5     |
| 2.1 'n Warmtegeleidingsprobleem in een<br>dimensie         | 5     |
| 2.1.1 Massadigtheid  | 6     |
| 2.1.2 Spesifieke warmte $c$ en warmte-energie              | 8     |
| 2.1.3 Warmtevloed  | 11    |
| 2.2 Bronne   | 11    |
| 2.3 Die warmtevergelyking                                  | 12    |
| 2.4 Die materiaalvergelyking vir warmtevloed               | 14    |
| HOOFSTUK 3: RANDVOORWAARDES                                | 16    |
| 3.1 Inleiding  | 16    |
| 3.2 Die basiese randvoorwaardepostulaat                    | 19    |
| 3.3 Die behoudwet vir warmte-energie                       | 19    |
| 3.3.1 Digtheidsfunksies                                    | 20    |
| 3.4 Materiaalvergelykings                                  | 22    |
| 3.5 Randmodelle  | 23    |
| 3.6 Die dik-randmodel                                      | 23    |
| 3.7 Randvoorwaardes voortvloeiend uit die<br>dik-randmodel | 26    |
| 3.7.1 Materiaalvergelykings van kontak                     | 26    |
| 3.7.2 Moontlike randvoorwaardes met die<br>dik-randmodel   | 27    |
| 3.8 Transformasie van veranderlikes                        | 31    |

|             |   |     |
|-------------|---|-----|
| 3.9         | Eenduidigheid van die oplossings  | 33  |
| HOOFSTUK 4: | WARMTEGELEIDINGSPROBLEME  | 39  |
| 4.1         | Inleiding   | 39  |
| 4.2         | Probleem 1 - 'n warmtegeleidingsprobleem<br>waarin die Dirichlet-randvoorwaarde geld. | 43  |
| 4.3         | Probleem 2 - 'n warmtegeleidingsprobleem<br>waarin die Neumann-randvoorwaarde geld.   | 53  |
| 4.4         | Probleem 3 - 'n warmtegeleidingsprobleem<br>waarin die Dinamiese-randvoorwaarde geld. | 59  |
| 4.4.1       | Probleem A se oplossing   | 61  |
| 4.4.2       | Probleem B word opgelos   | 71  |
| 4.5         | Probleem 4 - Die "moederprobleem"   | 79  |
| 4.5.1       | Vorbereiding om die inverse Laplace-<br>transform te vind.                            | 85  |
| 4.5.2       | Die inverse transform   | 88  |
| 4.5.3       | Die wortels is reeel  | 90  |
| HOOFSTUK 5: | ANALITIESE OPLOSSING VAN DIE PROBLEME   | 97  |
| 5.1         | Die Dirichlet-randvoorwaardeprobleem  | 97  |
| 5.2         | Die Neumann-randvoorwaardeprobleem  | 99  |
| 5.3         | Die Dinamiese-randvoorwaarde-probleem   | 100 |
| 5.4         | Die Moederprobleem  | 107 |
| HOOFSTUK 6: | LIMIETGEVALLE VAN DIE OPLOSSING VAN DIE<br>MOEDERPROBLEEM                             | 109 |
| 6.1         | $K_2 \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty$  | 109 |
| 6.2         | $K_2 \rightarrow 0$   | 113 |
| 6.3         | $K_2 \rightarrow \infty$  | 117 |
| HOOFSTUK 7: | SAMEVATTING   | 121 |

|  |     |
|--|-----|
| BYLAAG A - DIE DIRICHLET-RANDVOORWAARDE<br>PROBLEEM  | 124 |
| BYLAAG B - DIE NEUMANN-RANDVOORWAARDE<br>PROBLEEM  | 127 |
| BYLAAG C - DIE DINAMIESE-RANDVOORWAARDE<br>PROBLEEM  | 130 |
| BYLAAG D - DIE MOEDERPROBLEEM  | 133 |
| BYLAAG E - BEREKENING VAN DIE RESIDUE VAN<br>DIE UITDRUKKING $U_1(x, s)e^{st}$ BY DIE<br>POLE $s = \sigma_n$ | 138 |
| BIBLIOGRAFIE   | 147 |

(i)

'N ONDERSOEK NA DIE GEDRAG VAN DIE OPLOSSING  
VAN 'N  
WARMTEGELEIDINGSPROBLEEM MET  
"VARIERENDE RANDMEDIUMPARAMETERS

deur

PIETA BRAND

LEIER : Dr W J Rossouw  
DEPARTEMENT : Wiskunde en Toegepaste Wiskunde, Universiteit  
van Pretoria  
GRAAD : MSc

SAMEVATTING

Vir 'n goedgeformuleerde probleem word beherende vergelykings en newevoorwaardes benodig.

Beherende vergelykings word herlei uit behoudwette en materiaalverge-lykings. Die behoudwet wat in hierdie verhandeling van toepassing is, is die wet vir die behoud van warmte-energie, geformuleer as 'n parsiele dif-ferensiaalvergelyking, naamlik die warmtevergelyking.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b$$

waar  $u$  die temperatuur is en  $\kappa$  bekend staan as die termiese diffusiwiteit.  $b$  is 'n bronterm van warmte-energie en  $x$  en  $t$  dui onderskeidelik posisie en tyd aan.

Materiaalvergelykings poog om 'n materiaal se fisiese eienskappe wiskun-dig te modelleer.

Newevoorwaardes in hierdie werk bestaan uit randvoorwaardes en 'n beginvoor-waarde.

(ii)

Hoofstuk 1 is 'n inleiding waar die belangrikste terminologie onder ander toegelig word.

In Hoofstuk 2 word die nodige begrippe gedefinieer en die warmtevergelykin afgelei.

In Hoofstuk 3 word drie moontlike randvoorwaardes bespreek wat geld vir die dik-randmodel, naamlik die Neumann-randvoorwaarde, die Dirichlet-randvoorwaarde en die Dinamiese-randvoorwaarde.

In Hoofstuk 4 word 'n analitiese oplossing vir elk van die bogenoemde probleme verkry, asook die oplossing van die sogenaamde "moederprobleem" was twee stawe, elk met sy eie fisiese eienskappe, gekoppel word.

In Hoofstuk 5 word grafieke van die oplossings van die probleme beskou.

In Hoofstuk 6 word parameters van die tweede staaf (of die warmtegeleidings koëffisiënt  $K_2$ , of die lengte  $L$ ) gevarieer in die moederprobleem en die oplossing vergelyk met die oplossings van bogenoemde probleme.

Ten slotte is Hoofstuk 7 'n samevatting van die resultate van die navorsing

(iii)

AN INVESTIGATION INTO THE BEHAVIOUR OF THE  
SOLUTION OF A HEAT CONDUCTION  
PROBLEM WITH VARYING BOUNDARY MEDIUM PARAMETERS

by

PIETA BRAND

LEADER : Dr W J Rossouw  
DEPARTMENT : Mathematics and Applied Mathematics, University  
of Pretoria  
DEGREE : MSc

SYNOPSIS

Governing equations and subsidiary conditions are required for a well-posed problem.

Governing equations are derived from conservation laws and constitutive equations. The applicable conservation law in this dissertation, is the law for the conservation of heat energy, formulated as a partial differential equation known as the heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b$$

In this equation  $u$  is the temperature and  $\kappa$  is the thermal diffusivity.  $b$  is a term that describes a source for heat energy and  $x$  and  $t$  denote position and time respectively.

Constitutive equations are equations that attempt to formulate a mathematical model for the physical properties of a material.

In this paper, subsidiary conditions consist of boundary conditions and an initial condition.

(iv)

Chapter 1 is an introduction where the most important terminology is mentioned.

In Chapter 2, the necessary concepts are defined and the heat equation is derived.

In Chapter 3, three possible boundary conditions that apply to the thin boundary model are discussed, namely the Neumann boundary condition, the Dirichlet boundary condition and the Dynamic boundary condition.

In Chapter 4 an analytical solution is obtained for each of the above-mentioned problems, as well as the solution of the so called "mother problem", where two rods, each with its own physical properties, are connected.

In Chapter 5 the graphs of solutions of the problems are considered.

In Chapter 6 parameters (either the heat conduction coefficient  $K_2$ , or the length  $L$ ) of the second rod are varied in the mother problem and the solution compared with the solutions of the above-mentioned problems.

Finally, Chapter 7 is a synopsis of the results of this research.

## HOOFSTUK 1

### INLEIDING

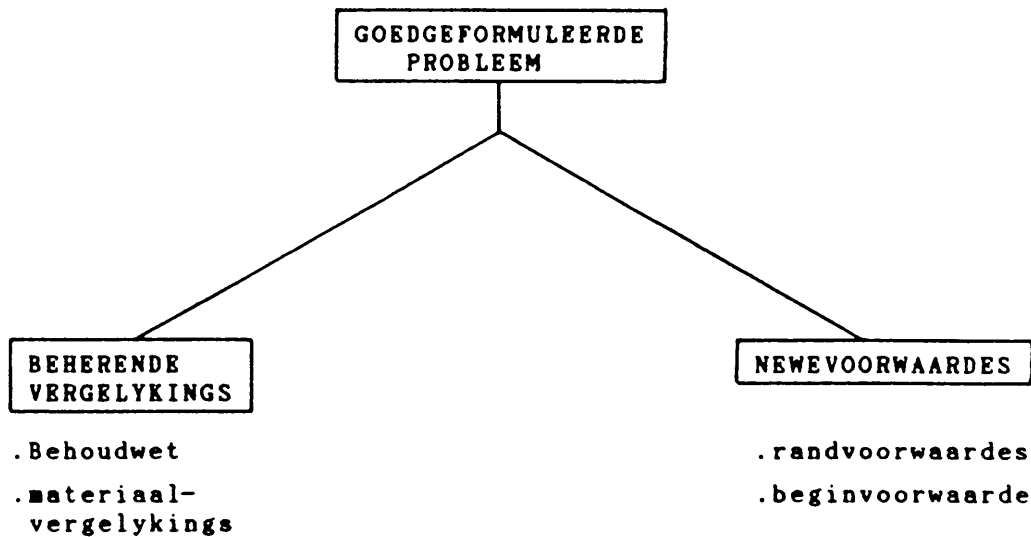
Vir 'n goedgeformuleerde probleem word beherende vergelykings en newevoorwaardes benodig.

Beherende vergelykings word herlei uit behoudwette en materiaalvergelykings (wat in hoofstuk 3 bespreek word).

Die dinamika van die warmtegeleidingsproses wat gemodelleer word, word vasgelê in 'n algemene behoudwet wat geld vir warmte-energie, geformuleer as 'n parsiele differensiaalvergelyking.

In hierdie verhandeling sal die begrip 'materiaalvergelyking' (wat 'n vergelyking is wat poog om 'n materiaal se fisiese eienskappe wiskundig te modelleer), uitgebrei word om ook die vergelykings vir die vorms van die verskillende digtheidsfunksies in te sluit. 'n Tipiese materiaalvergelyking is die vergelyking vir warmte-energiedigtheid wat die vorm van 'n digtheidsfunksie beskryf.

Skematies kan bogenoemde as volg voorgestel word:



In hoofstuk 2 word die nodige begrippe gedefinieer en met behulp van hierdie begrippe en die energie-behoudwet word die warmtevergelyking afgelei.

In hoofstuk 3 word drie moontlike randvoorwaardes bespreek wat geld vir die dik-randmodel onder bespreking in hierdie verhandeling. Die drie randvoorwaardes is naamlik die Neumann-randvoorwaarde, waar die warmtevloed by die randpunt voorgeskryf word, die Dirichlet-randvoorwaarde, waar die temperatuur by die randpunt voorgeskryf word en die Dinamiese-randvoorwaarde waar tyd- en ruimtelike afgeleides van die temperatuur gelyktydig voorkom in die randvoorwaarde wat by die randpunt voorgeskryf word.

In hoofstuk 4 word 'n analitiese oplossing vir elk van die probleme met bogenoemde randvoorwaardes verkry, asook die oplossing van die sogenaamde 'moederprobleem'. In die moederprobleem word twee stawe, elkeen met sy eie fisiese eienskappe, gekoppel. By die koppelpunt word perfekte termiese kontak gemaak.

In hoofstuk 5 word die grafieke van die oplossings van die verskillende probleme beskou en bespreek.

In hoofstuk 6 word die nodige parameters van die tweede staaf (of die warmtegeleidingskoeffisiënt  $K_2$ , of die lengte  $L$ ) verander (vergroet of verklein) om dan die oplossing van die veranderde moederprobleem te ondersoek en te vergelyk met die oplossings van die bogenoemde probleme.

Hoofstuk 7 is 'n kort samevatting van die resultate van hierdie navorsing en 'n paar probleme wat gedurende die navorsing ondervind is.

Hieronder volg 'n lys van simbole, asook hulle betekenis, wat die meeste in hierdie verhandeling voorkom. Die bladsynommers waar die simbole gedefinieer word, word ook aangedui.

| <u>SIMBOOL</u> | <u>BETEKENIS</u>  | <u>BLADSY</u> |
|----------------|---|---------------|
| A              | deursnitoppervlakte van die staaf                             | 5             |
| $B(d,t)$       | tempo waarteen 'n bron by die punt $d$ warmte-energie vrystel | 24            |

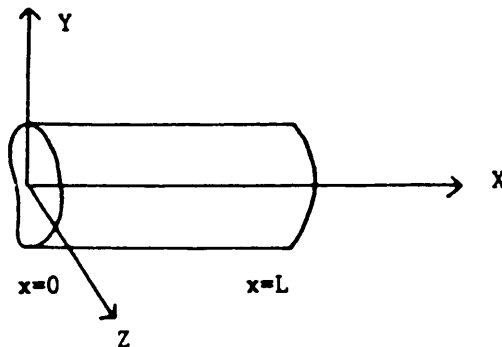
|                |   |    |
|----------------|---|----|
| $b(x, t)$      | bron van warmte-energie vrygestel<br>per eenheidslengte per eenheidstyd<br>by die punt $x$                                | 20 |
| $\bar{b}_2(t)$ | die gemiddelde tempo waarteen bronne<br>warmte-energie op tydstep $t$ in die<br>tweede gebied vrystel per eenheidslengte. | 30 |
| $c$            | spesifieke warmte   | 8  |
| $K$            | warmtegeleidingskoeffisient.  | 14 |
| $u(x, t)$      | temperatuur by posisie $x$ op tydstep $t$   | 10 |
| $v$            | warmte-energiedigtheid  | 20 |
| $\rho$         | massadigtheid   | 6  |
| $\phi(x, t)$   | warmte-energievloed by posisie $x$<br>op tydstep $t$  | 20 |
| $\kappa$       | termiese diffusiwiteit  | 15 |

**HOOFSTUK 2**  
**WARMTEGELEIDING**

In hierdie hoofstuk word die nodige begrippe gedefinieer en met behulp van hierdie begrippe en die behoudwet vir warmte-energie word die hittevergelyking afgelei.

2.1 **'N WARMTEGELEIDINGSPROBLEEM IN EEN DIMENSIE**

Beskou 'n staaf met 'n konstante deursnee-oppervlak  $A$  wat in die rigting van die  $X$ -as lê.



Hierdie driedimensionele probleem kan na 'n eendimensionele probleem gereduseer word deur te aanvaar dat die temperatuur van die staaf,  $u(x,t)$ , onafhanklik is van  $y$  en  $z$ . Die temperatuur is met ander woorde konstant vir elke dwarsdeursnit, maar dit wissel vanaf die een dwarsdeursnit na die volgende.

'n Paar begrippe word eers gedefinieer voordat die warmtevergelyking vir hierdie betrokke staaf afgelei word.

### 2.1.1 Massadigtheid

Beskou 'n homogene materiaal, massa  $m$ , volume  $V$ .

#### Definisie

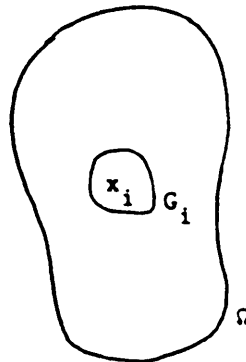
$$(\text{Konstante}) \text{ massadigtheid} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} \left[ = \frac{m}{V} \right]$$

Beskou nou 'n nie-homogene materiaal in  $\Omega$ . Beskou 'n gebied  $G \subset \Omega$  met  $x \in G$ .

#### Definisie

Die gemiddelde digtheid in  $G$ , voorgestel deur  $\bar{\rho}$ , word as volg gedefinieer:

$$\bar{\rho} = \frac{\text{massa in } G}{\text{volume in } G} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$



#### Definisie

Die digtheid by  $x$

$$\rho(x) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \bar{\rho} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \text{met } x \in G.$$

Om die totale massa in  $\Omega$  te vind, verdeel  $\Omega$  in  $n$  deelversamelings  $G_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,n$  sodanig dat

$$\Omega = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_n.$$

Die massa in  $G_i$  is  $\Delta m_i = \bar{\rho}_i \Delta V_i$

Die totale massa in  $\Omega$  is

$$m = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \Delta V_i$$

Laat  $n \rightarrow \infty$  op so 'n manier dat  $\Delta V_i \rightarrow 0$  vir alle  $i$ .

$$\therefore \bar{\rho}_i \rightarrow \rho(x_i)$$

$$\therefore m = \lim_{\substack{\Delta V_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \Delta V_i$$

$$= \int_G \rho(x) dV$$

volgens die definisie van die Riemann-integraal)

Maak die volgende staafaanname: oor 'n dwarsdeursnit bly alles konstant.

Dit impliseer onafhanklikheid van  $y$  en  $z$ .

$$\therefore \int_G dV = \int_a^b A dx$$

∴ Die massa van die staaf in die interval  $(a, b)$  is

$$\int_a^b \rho A dx.$$

### 2.1.2 Spesifieke warmte $c$ en warmte-energie.

Die spesifieke warmte van 'n stof word gedefinieer as die warmte-energie wat aan 'n eenheidsmassa van die stof verskaf moet word om die temperatuur van die stof met 'n eenheid te verhoog. In die algemeen is die spesifieke warmte  $c$  afhanklik van die temperatuur  $u(x, t)$  en ook van die tipe materiaal waaruit die staaf bestaan. As die samestelling van die eendimensionele staaf onder bespreking wissel vanaf die een posisie na die volgende, sal die spesifieke warmte ook afhanklik wees van  $x$ . In die algemeen sal

$$c = c(x, u).$$

Die spesifieke warmte is dus implisiet afhanklik van die tyd as gevolg van die tydafhanklikheid van  $u(x, t)$ . In die meeste probleme wissel die temperatuur nie te veel nie en dikwels is die spesifieke warmte amper onafhanklik van die temperatuur.

Die warmtevloei-probleem word dus geformuleer onder die aanname dat

$$c = c(x).$$

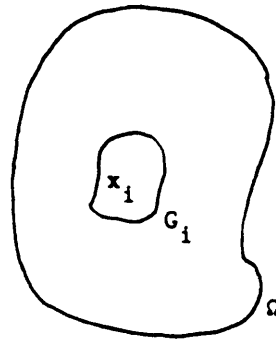
Vir 'n homogene materiaal is  $c$  'n konstante. Om dus die temperatuur van 'n homogene materiaal met massa  $m$  en spesifieke warmte  $c$  met  $T^\circ\text{C}$  te verhoog, word

$$cmT$$

eenhede warmte-energie benodig.

Beskou nou egter 'n nie-homogene materiaal. Laat  $p$  die hoeveelheid warmte-energie benodig wees om die

nie-homogene materiaal in  $G \subset \Omega$ , massa  $m$ , se temperatuur met  $T^\circ\text{C}$  te laat styg. Dan is die gemiddelde spesifieke warmte



$$\bar{c} = \frac{p}{mT} = \frac{p}{\bar{\rho}\Delta VT}$$

Die spesifieke warmte by 'n punt  $x$  is

$$c(x) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \bar{c} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{p}{\bar{\rho}\Delta VT} \quad \text{met } x \in G.$$

Die hoeveelheid warmte-energie benodig om die temperatuur van  $G$  met  $T^\circ$  te verhoog is

$$p = \bar{c}\bar{\rho}T\Delta V$$

Verdeel  $\Omega$  in  $n$  deelyersamings  $G_i$  sodanig dat

$$\Omega = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$$

Die totale warmte-energie in  $\Omega$  is dan

$$q = \sum_{i=1}^n \bar{c}_i \bar{\rho}_i T \Delta V_i$$

Laat  $n \rightarrow \infty$  op so 'n manier dat  $\Delta V_i \rightarrow 0$  vir alle  $i$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{\rho}_i &\rightarrow \rho(x_i) \\ \text{en} \quad \bar{c}_i &\rightarrow c(x_i) \end{aligned}$$

$\therefore$  die totale warmte-energie in  $\Omega$  is

$$q = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{c}_i \bar{\rho}_i u(x, t) \Delta V_i$$

waar  $u(x, t)$  geskryf word in plaas van  $T$ .

$$\therefore q = \int_G c(x) \rho(x) u(x, t) dV$$

$c(x) \rho(x) u(x, t)$  is die digtheidsfunksie vir warmte-energie, omdat vir alle  $G \subset \Omega$  geld dat

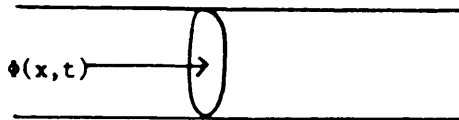
$$\text{warmte-energie in } G = \int_G c \rho u dV$$

Vir enige interval  $(a, b)$  wat 'n gedeelte van die staaf bevat geld

$$\text{warmte-energie} = \int_a^b c(x) \rho(x) u(x, t) A dx \quad \text{-----} (2.1)$$

### 2.1.3 Warmtevloed.

Die warmte-energie in die staaf onder beskouing verander met tyd as gevolg van warmte-energie wat oor die rande vloei en ook as gevolg van energie wat binne-in die staaf opgewek word deur positiewe of negatiewe warmte-energiebronne.



Laat  $\phi(x,t)$  die hoeveelheid warmte-energie wees wat per tydseenheid na regs vloei oor 'n eenheidsoppervlakte by posisie  $x$ .  $\phi(x,t)$  word die warmtevloed by posisie  $x$  op tydstip  $t$  genoem. As  $\phi(x,t) < 0$ , beteken dit dat warmte-energie na links vloei.

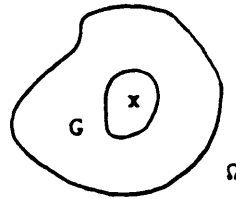
### 2.2 BRONNE

Laat  $b(x,t)$  die digtheidsfunksie wees vir die warmte-energie wat per eenheidsvolume per eenheidstyd vrygestel word by die punt  $x \in \Omega$ .  $b(x,t)$  verteenwoordig bronne van warmte-energie (byvoorbeeld as gevolg van chemiese reaksies of elektriese verhitting.)

Op 'n wyse soortgelyk aan die wat in paragraaf 2.1.1 en 2.1.2 gevolg is volg dat die totale warmte-energie in die gebied  $G$  vrygestel per

eenheidtyd gegee word deur

$$\int_G b(x,t) dV$$



### 2.3 DIE WARMTEVERGELYKING

Die behoudwet vir warmte-energie kan as volg beskryf word:

Tempo van verandering van warmte-energie in 'n gebied

= warmte-energie wat per tydseenheid oor die rande van die gebied vloei

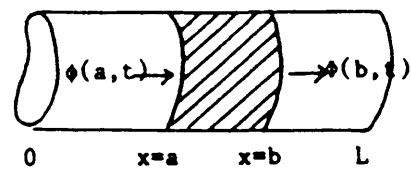
+

warmte-energie binne-in die gebied opgewek per tydseenheid.

(2.2)

Dit is die beginsel van warmte-energiebehoud.

Beskou nou 'n eindige segment van die staaf vanaf  $x=a$  tot by  $x=b$



Die totale hoeveelheid warmte-energie in  $(a,b)$  is volgens vergelyking (2.1)

$$\int_a^b c\rho u A dx$$

Volgens die beginsel van energiebehoud is, (met behulp van vergelykings (2.1) en (2.2) )

$$\frac{d}{dt} \int_a^b c\rho u A dx = A\phi(a,t) - A\phi(b,t) + \int_a^b b A dx$$

Verder is  $\phi(a,t) - \phi(b,t) = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$

en  $\frac{d}{dt} \int_a^b c\rho u dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} (c\rho u) dx$

(mits integrasie en differensiasie mag verwissel word. Dit is die geval as die integraal gelykmatig konvergeer.)

Dan is  $\int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial t} (c\rho u) + \frac{\partial \phi}{\partial x} - b \right] dx = 0$

Dit geld vir willekeurige  $(a,b) \subset (0,L)$ .

Indien die integrand kontinu is, is dit slegs moontlik as die integrand identies nul is.

Gevolglik is

|  |             |
|--|-------------|
| $\frac{\partial}{\partial t} (c\rho u) = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + b$ | _____ (2.3) |
|--|-------------|

## 2.4 DIE MATERIAALVERGELYKING VIR WARMTEVLOED.

Beskou die volgende eienskappe van warmtevloei:

a) As die temperatuur in 'n gebied konstant is, vloei geen warmte-energie nie.

b) As daar temperatuurverskille is, vloei warmte-energie vanaf die warmer gebied na die kouer gebied.

(eerste wet van die termodinamika)

c) Hoe groter die temperatuurverskille (vir dieselfde stof) is, hoe groter is die warmte-energie-vloed.

d) Die warmte-energie-vloed sal wissel vir verskillende stowwe.

Bogenoemde vier eienskappe is deur Fourier opgesom deur die volgende formule:

$$\phi = -K \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ————— (2.4)}$$

Hierdie wet staan bekend as Fourier se warmtegeleidingswet.

K word die warmtegeleidingskoeffisient genoem.

Dit is ook moontlik dat  $K = K(x)$ .

As hierdie vergelyking nou vervang word in die vergelyking vir warmte-energie-behoud, (2.3), ontstaan die volgende parsiele differensiaalvergelyking:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b$$

In die geval van 'n homogene staaf, waar  $c$ ,  $\rho$  en  $K$  konstantes is, word hierdie parsiele differensiaalvergelyking

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \quad \text{-----}(2.5)$$

As daar geen warmtebronne is nie, sodat  $b=0$ , word (2.5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{met } 0 < x < L, \quad t > 0$$

waar  $\kappa = \frac{K}{c\rho}$  bekend staan as die termiese diffusiwiteit.

----- (2.6)

Om die temperatuur te voorspel word een beginvoorwaarde  $u(x,0) = f(x)$  en twee randvoorwaardes vir  $u$ , een by  $x=0$  en een by  $x=L$ , benodig.

### HOOFSTUK 3

#### RANDVOORWAARDES

#### 3.1 INLEIDING

In die partikeldinamika en die starreliggaam-dinamika is dit gebruik om 'n bepaalde partikel (deeltjie) of 'n fisiese liggaam in sy beweging deur die ruimte te volg. Op die manier word dan begrippe soos beweging en baan verkry. Wanneer meer ingewikkelde bewegings beskou word, soos die van 'n vloeistof of elastiese stof waar die invloed van een deel op 'n ander nie meer so eenvoudig is nie, is dit nie meer so maklik om bewegings te beskryf nie. Vir 'n ander beskrywing het Euler die sogenaamde veldteoretiese benadering ontwikkel.

Dit kom daarop neer dat 'n waarnemer by 'n posisie  $x$  in die ruimte geplaas word en dat hy daar op enige gegewe tydstip  $t$  'n hoeveelheid  $u(x,t)$  waarneem.  $u$  word dan 'n veldteoretiese hoeveelheid genoem.

In die studie van veldteoretiese probleme word baie aandag gegee aan die formulering van beherende vergelykings. Benewens die beherende vergelykings van 'n fisiese proses, word ook randvoorwaardes, waaronder randvoorwaardes benodig ten einde te verseker dat die besondere probleem goedgeformuleer is.

'n Algemene teorie vir die sinvolle formulering van randvoorwaardes word gegee deur W J Rossouw [Behoudwetformulerings vir randvoorwaardes]. D

hoofpostulaat van daardie werk veronderstel dat voorwaardes wat op die rand van die gebied geld, die gevolg is van kontak tussen die gebied en 'n randmedium. Randvoorwaardes moet dus die wiskundige formulering wees van die wisselwerking tussen die gebied en die rand. Hierdie formulering behels die implementering van behoudwette en materiaalvergelykings vir die randmedium.

Die beherende vergelykings van die wiskundige model onder bespreking, naamlik die probleem van warmtegeleiding in een dimensie, word dan uit twee soorte vergelykings herlei, naamlik 'n behoudwet en materiaalvergelykings (wat in die volgende paragraaf gedefinieer word). Die dinamika van die warmtevloeiproses wat gemodelleer word, word vasgelê in 'n algemene behoudwet wat geld vir warmte-energie (sien vergelyking (2.2) )

Materiaalvergelykings ('constitutive equations') is volgens die literatuur vergelykings wat poog om 'n materiaal se fisiese eienskappe wiskundig te modelleer en is altyd idealiserings van werklike materiale. Vergelyking (2.4) wat die warmtevloed beskryf

$$\phi = -K \frac{\partial u}{\partial x}$$

is byvoorbeeld 'n materiaalvergelyking.

'n Goedgeformuleerde probleem het die volgende drie eienskappe:  
[Weinberger, 1965, bladsy 6]

a) Vir geskikte data bestaan 'n oplossing.

b) Die oplossing van die probleem is eenduidig vir die geskikte data.

c) Die oplossing van die probleem is kontinu met betrekking tot die geskikte data.

Ten einde die goedgeformuleerdheid van die probleem te ondersoek, word die beherende vergelykings van die probleem altyd ten volle betrek by die analise van die probleem ten opsigte van al drie die eienskappe wat hierbo genoem word. Dit is ook duidelik dat die beherende vergelykings alleen nie 'n goedgeformuleerde probleem verseker nie. By al drie die eienskappe hierbo is daar sprake van 'geskikte data'. Hierdie 'geskikte data' hou verband met die randvoorwaardes van die probleem.

In die praktyk is randeffekte die gevolg van 'n gebied se kontak met sy 'buitewêreld'. Die formulering van randvoorwaardes behels dus die wiskundige modellering van hierdie kontakteffekte. In die lig hiervan word randvoorwaardes vir die eendimensionele warmtegeleidingsprobleem geformuleer deur 'n randmedium met sy eie fisiese eienskappe te postuleer, en die wisselwerking tussen hierdie randmedium en die interne gebied wiskundig te beskryf. Die formulering van randvoorwaardes is gevolglik wesenlik die beskrywing van 'n dinamiese proses met behulp van 'n behoudwet en materiaalvergelykings. Die voorwaardes wat geld op die rand van die gebied wat bestudeer word, kan slegs korrek geformuleer word indien hierdie wisselwerkings behoorlik wiskundig gemodelleer word.

### 3.2 DIE BASIESE RANDVOORWAARDEPOSTULAAT

Die randvoorwaardes vir 'n probleem is goedgeformuleer indien hierdie randvoorwaardes die wiskundige modellering van die wisselwerkings tussen die interne gebied en die randmedium, as medium met sy eie besondere eienskappe, in ag neem. [Rossouw, 1983, bladsy 16]

Wiskundige modellering van die wisselwerkings beteken dat die randmedium werklik as medium erken moet word. Vir die randmedium geld dus wette soortgelyk aan die vir die gebied wat bestudeer moet word. Hierdie wett is naamlik materiaalvergelykings asook 'n behoudwet vir warmte-energie.

### 3.3 DIE BEHOUDWET VIR WARMTE-ENERGIE.

Die behoudwet wat geld vir die proses van warmtevloei is, soos reeds in vergelyking (2.2) aangetoon:

(Die tempo waarteen die totale hoeveelheid warmte energie in 'n gebied verander) =

(Die vloeitempo van warmte-energie oor die rand van die gebied)

(Die tempo waarteen bronne warmte-energie in die gebied vrystel)

---

(3.1)

### 3.3.1 Digtheidsfunksies.

Ten einde vergelyking (3.1) in 'n wiskundige vorm te giet, word 'n aantal digtheidsfunksies benodig.

Die digtheidsfunksies hieronder word gedefinieer vir  $t \in (0, T)$  en vir  $x \in G \subset R$ .  $x$  is 'n ruimtelike koördinaat terwyl  $t$  die tydkoordinaat is.

Die volgende word aanvaar ten opsigte van die eienskappe van die digtheidsfunksies:

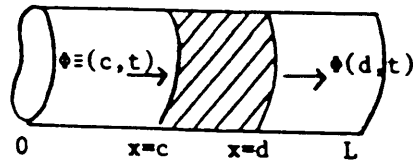
- a) Die digtheidsfunksies bestaan en is eenduidig.
- b) Die digtheidsfunksies is voldoende differensieerbaar.
- c) Die digtheidsfunksies en die nodige afgeleides daarvan is lokaal-integreerbaar.

$v = v(x, t)$  is die digtheidsfunksie vir die warmte-energie waarvoor die behoudwet geld. Die eenhede van  $v$  is J/m.

$b = b(x, t)$  is die digtheidsfunksie wat die tempo beskryf waarteen bronne in die gebied warmte-energie in die gebied vrystel per eenheidslengte van die gebied. Die eenhede van  $b$  is W/m.

$\phi = \phi(x, t)$  is 'n funksie vir die totale warmte-energievloed. Die eenhede van  $\phi$  is J/sek.

In terme van die digtheidsfunksies word die behoudwet (3.1) nou geformuleer vir willekeurige  $(c,d) \subset G$ .



$$\frac{d}{dt} \int_c^d v dx = [\phi(c,t) - \phi(d,t)] + \int_c^d b(x,t) dx$$

$$= - \int_c^d \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) dx + \int_c^d b(x,t) dx \quad (3.2)$$

Indien differensiasie en integrasie aan die linkerkant verwissel mag word, volg dat

$$\int_c^d \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - b \right) dx = 0$$

Aangesien  $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - b$  volgens aanname (c) hierbo lokaal integreerbaar is, volg uit die willekeurigheid van  $(c,d)$  die verdere vorm van die behoudwet

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = b \quad (3.3)$$

### 3.4 MATERIAALVERGELYKINGS.

Die behoudwet (3.3) alleen is onvoldoende om die oplossing van die probleem eenduidig te bepaal. Ten einde die behoudwet te gebruik is dit nodig om materiaalvergelykings te gee vir die digtheidsfunksie  $v$ , die vloedfunksie  $\phi$ , en die bronfunksie  $b$ .

In hoofstuk 2, vergelyking (2.6), volg dat die beheervergelyking vir warmtegeleiding in 'n eendimensionele homogene isotropiese medium sonde hittebronne die volgende is:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

deur te aanvaar dat die warmte-energie-digtheid  $v=c\rho u$ , die warmtevloed  $\phi=-K\frac{\partial u}{\partial x}$  en die bron  $b=0$  is.

Die sukses-al-dan-nie van die wiskundige model vir hierdie fisiese proses van warmtevloei is in 'n groot mate afhanklik van hoe goed hierdie materiaalvergelykings die eienskappe van die proses wiskundig beskryf.

Manipulasie van die fisiese eienskappe van die randmedium (wat neerkom op die manipulasie van die materiaalvergelykings) is nodig vir die daarstelling van verskillende soorte randvoorwaardes.

### 3.5 RANDMODELLE.

Soos reeds gemeld, moet die eienskappe van 'n randmedium deeglik in ag geneem word by die formulering van randvoorwaardes. Een van hierdie eienskappe is die afmetings van die randmedium.

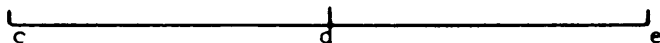
Dit is soms s<sup>o</sup> dat die afmetings van die randmedium van dieselfde orde is as die afmetings van die gebied wat bestudeer word. In s<sup>o</sup> 'n geval word die randmedium 'dik' genoem en word daar 'n 'dik-randmodel' geformuleer.

Soms is die afmetings van die randmedium klein in vergelyking met die afmetings van die medium wat bestudeer word. Vir sulke gevalle word die randmedium 'dun' genoem en word 'n 'dun-randmodel' geformuleer. 'n Dun-randmodel kan soms ook geformuleer word indien die randmedium oor besondere fisiese eienskappe beskik.

In hierdie verhandeling word van die dik-randmodel gebruik gemaak en gevolglik word slegs di<sup>e</sup> model bespreek.

### 3.6 DIE DIK-RANDMODEL.

In hierdie paragraaf word die medium wat bestudeer word, sowel as die randmedium, gemodelleer as eendimensionele kontinue media.



Die interne gebied is  $G_1=(c,d)$ . Die eksterne gebied (randmediumgebied) is  $G_2=(d,e)$ . Die rand van  $G_1$  is  $\partial G_1=\{c,d\}$ . Hier word slegs randvoorwaardes by  $d$  geformuleer. Die randvoorwaardes by  $c$  volg soortgelyk.  $d$  is 'n singuliere punt ten opsigte van onder andere materiaaleienskappe, want by  $d$  het twee verskillende materiale met mekaar kontak. Die bestaan van 'n bron by so 'n punt moet dus in ag geneem word. Indien  $d$  byvoorbeeld 'n punt is waar water besig is om te vries (water links en ys regs van  $d$ ) word latente warmte by  $d$  vrygestel.

$B=B(d,t)$  is die funksie wat die tempo beskryf waarteen die bron by  $d$  warmte-energie vrystel.

Die behoudwet wat vir die gebied  $G_2$  geld, is nog nie 'n randvoorwaarde vir  $G_1$  by  $d$  nie, aangesien koppeling tussen  $G_1$  en sy randgebied  $G_2$  nog nie bewerkstellig is nie. Hierdie koppeling volg deur die warmtebehoudwet vir  $(d-\epsilon_1, d+\epsilon_2)$  te formuleer

Hierdie behoudwet is:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{d-\epsilon_1}^d c_1 \rho_1 u_1 dx + \int_d^{d+\epsilon_2} c_2 \rho_2 u_2 dx \right] = \phi_1(d-\epsilon_1, t) - \phi_2(d+\epsilon_2, t) + \int_{d-\epsilon_1}^d b_1 dx + \int_d^{d+\epsilon_2} b_2 dx + B(d, t) \quad (3.4)$$

Laat  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$

Die bostaande koppelvergelyking word dan vir lokaal integreerbare  $c_1 \rho_1 u_1$ ,  $c_2 \rho_2 u_2$ ,  $b_1$  en  $b_2$ :

$$0 = \phi_1(d, t) - \phi_2(d, t) + B(d, t)$$

Na aanleiding van die randvoorwaardepostulaat vroeër gedefinieer in paragraaf 3.2 is die veralgemeende randvoorwaarde by  $d$  die behoudwet-cum-koppelvergelyking

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_2 \rho_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x}(-K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}) = b_2 \quad t > 0, d < x < e \quad \text{---(3.5a)}$$

$$\phi_1(d, t) = \phi_2(d, t) - B(d, t) \quad t > 0 \quad \text{---(3.5b)}$$

Die veralgemeende randvoorwaarde kan ook as 'n enkele vergelyking geskryf word wat soms geriefliker hanteer as die twee vergelykings (3.5).

Deur in (3.4) te stel dat  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  en  $\epsilon_2 \rightarrow e-d$  volg die randvoorwaarde by  $d$  as die enkele vergelyking

$$\frac{d}{dt} \int_d^e c_2 \rho_2 u_2 dx = \phi_1(d, t) - \phi_2(e, t) + \int_d^e b_2 dx + B(d, t)$$

of

$$\phi_1(d, t) = \frac{d}{dt} \int_d^e c_2 \rho_2 u_2 dx + \phi_2(e, t) - \int_d^e b_2 dx - B(d, t) \quad \text{---(3.6)}$$

Randvoorwaardes by  $d$  word verkry deur die besondere materiaalvergelykings vir die randmedium in die veralgemeende randvoorwaarde (3.5) of (3.6) te vervang.

### 3.7 RANDVOORWAARDES VOORTVLOEIEND UIT DIE DIK-RANDMODEL.

Meer spesifieke randvoorwaardes volg deur die materiaalvergelykings vir die randmedium met die behoudwet te kombineer. Vir verdere toepassing van die werk is dit nodig om die begrip 'materiaalvergelyking van kontak' te definieer. (Sien 'Samestellingsvergelyking van kontak', Rossouw [1983], bladsy 27)

#### 3.7.1 Materiaalvergelykings van kontak.

Funksies word gedefinieer vir twee aanliggende intervalle  $(c,d)$  en  $(d,e)$ . Vir die twee aanliggende intervalle kan limietwaardes vir funksies bepaal word vir die limietpunt  $d$  tussen  $(c,d)$  en  $(d,e)$ .

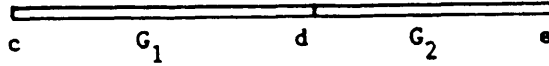
Die volgende definisie word nou gegee:

'n Materiaalvergelyking van kontak is enige vergelyking wat nie alreeds 'n behoudwet is nie en wat verbande gee tussen die limietwaardes van funksies gedefinieer in  $(c,d)$  en  $(d,e)$  by die limietpunt  $d$ .

'n Voorbeeld van so 'n vergelyking is die vergelyking van swak of perfekte termiese kontak, wat in vergelyking (3.7) gebruik word.

### 3.7.2 Moontlike randvoorwaardes met die dik-randmodel.

In hierdie paragraaf word die probleem van warmtegeleiding in die begrensde interne gebied  $G_1$  ontleed.



Die digtheidsfunksies gedefinieer op  $G_i$  ( $i=1,2$ ) is die volgende:

$$\text{warmte-energie digtheid} = v_i = c_i \rho_i u_i$$

$$\text{warmte-energie vloed} = \phi_i = -K_i \frac{\partial u_i}{\partial x}$$

waar  $c_i$  = spesifieke warmte  
 $\rho_i$  = massadigtheid  
 $u_i$  = temperatuur  
 en  $K_i$  = warmtegeleidingsvermoë<sup>n</sup>

Die mees algemene randvoorwaardes by  $d$  is die behoudwette (3.5) en (3.6):

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - K_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = b_2 \quad \text{in } G_2 \quad \text{vir } t > 0$$

$$\phi_1(d, t) = \phi_2(d, t) - B(d, t) \quad \text{vir } t > 0 \quad \text{--- (3.5) '}$$

of

$$\phi_1(d, t) = \frac{d}{dt} \int_d^e c_2 \rho_2 u_2 dx + \phi_2(e, t) - \int_d^e b_2 dx - B(d, t)$$

vir  $t > 0$  —(3.6)'

Behalwe waar anders vermeld, is die materiaalvergelyking van kontak by die vergelyking van perfekte termiese kontak. By  $d$  geld dus

$$u_2 = H(u_1) = u_1 \text{ —————(3.7)}$$

Enkele randvoorwaardes wat kan voortvloei uit die behoudwette (3.5) en (3.6) in kombinasie met die materiaalvergelyking van kontak, word nou afgelei.

Neumann-randvoorwaardes word eerste geformuleer met behulp van (3.5). Aanvaar die randmedium is 'n volkome isolator, dit wil se  $\hat{K}_2 = 0$ . Uit (3.5b) volg die Neumann-randvoorwaarde soos volg:

$$\phi_1(d, t) = \phi_2(d, t) - B(d, t)$$

$$-K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(d, t) = -K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(d, t) - B(d, t)$$

$$\therefore -K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(d, t) = -B(d, t) \quad (\text{want } K_2 = 0)$$

$$\text{of} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(d, t) = \frac{B(d, t)}{K_1} = f \text{ —————(3.8)}$$

wat 'n Neumann-randvoorwaarde is.

Die fisiese implikasie van 'n Neumann-randvoorwaarde is dus hier dat 'n puntbron  $B = K_1 f$  hitte vrystel by die punt  $d$  wat volkome termies geïsoleer is van die eksterne gebied.

'n Dinamiese randvoorwaarde is 'n randvoorwaarde waarin tyd- en ruimtelike afgeleides van die afhanklike veranderlikes gedefinieer in  $G_1 = (c, d)$  gelyktydig voorkom.

'n Dinamiese randvoorwaarde word nou vir die probleem onder bespreking verkry. Aanvaar dat die randmedium 'n supergeleier is, dit wil se  $\hat{K}_2 \rightarrow$

Indien die vloed

$$\phi_2 = -K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

begrens is, moet

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

Dus is

$$u_2(x, t) = U_2(t) \quad \text{in } G_2 \text{-----} (3.9)$$

Met behulp van (3.9) reduceer (3.6) tot

$$\phi_1(d, t) = \ell c_2 \rho_2 U_2(t) + \phi_2(e, t) - \int_d^e b_2 dx - B(d, t)$$

$$(\ell = e - d)$$

Vir perfekte termiese kontak by  $d$  is

$$u_1(d, t) = u_2(d, t) = U_2(t)$$

$$\therefore -K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(d, t) = \phi_1(d, t) = \ell c_2 \rho_2 \frac{\partial u_1}{\partial t}(d, t) + \phi_2(e, t) - \bar{b}_2(t)\ell - B(d, t)$$

Hierin is  $\bar{b}_2(t)$  die gemiddelde tempo waarteen bronne warmte-energie  $c$  tydstip  $t$  in  $(d, e)$  vrystel per eenheidslengte.

$$\therefore \ell c_2 \rho_2 \frac{\partial u_1}{\partial t}(d, t) + K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(d, t) = \ell \bar{b}_2(t) + B(d, t) - \phi_2(e, t) \quad \text{-----}(3.10)$$

Aangesien die behoudwet (3.10) tyd- en ruimtelike afgeleides van die veranderlike  $u_1$  bevat, is dit 'n dinamiese randvoorwaarde.

Dirichlet-randvoorwaardes volg uit die dinamiese randvoorwaardes. Laat in (3.10)  $\ell \rightarrow \infty$  nadat die vergelyking deur  $\ell$  gedeel is:

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ell c_2 \rho_2 \frac{\partial u_1}{\partial t}(d, t)}{\ell} + \frac{K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(d, t)}{\ell} \right] \\ = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ell \bar{b}_2(t)}{\ell} + \frac{B(d, t)}{\ell} - \frac{\phi_2(e, t)}{\ell} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore c_2 \rho_2 \frac{\partial u_1}{\partial t}(d, t) = \bar{b}_2(t) \quad \text{by } d.$$

Integrasie hiervan lewer die tyd-afhanklike Dirichlet-randvoorwaarde

$$u_1(d, t) = \frac{1}{c_2 \rho_2} \int_0^t \bar{b}_2(r) dr + u_2(0) \quad \text{-----}(3.11)$$

Dirichlet-randvoorwaardes behels dus die 'geskiedenis' van alle randmediumbronne van 'n supergeleidende rand van oneindige lengte.

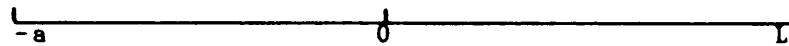
Ander materiaalvergelykings van kontak lewer ander randvoorwaardes. Die vorm van die materiaalvergelyking van kontak

$$u_x = H(u_x) \quad \text{by } x=d \text{ en vir } t>0.$$

kan vir probleme van warmtegeleiding heelwat varieer.

### 3.8 TRANSFORMASIE VAN VERANDERLIKES.

Die doel van hierdie paragraaf is om 'n gebied te verkry met eenheidslengte en om die koëffisiënte in die partiële differensiaalvergelyking (2.6) weg te transformeer.



Die gebiede waarin gewerk word is  $(-a, 0)$  en  $(0, L)$  soos in die figuur

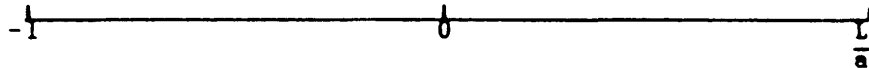
In  $(-a, 0)$ , vir  $t \geq 0$ , geld die hittevergelyking

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - K_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \quad (3.12)$$

Nadat die volgende transformasie uitgevoer is kom die materiaalkonstantes voor in die vergelykings vir die randmedium, wat latere analise makliker maak.

Laat  $x = a\bar{x}$  en  $t = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{K_1} \bar{t}$  [Carslaw en Jaeger, 1959, bladsy 24]

Die twee gebiede transformeer dus na  $(-1,0)$  en  $(0, \frac{L}{a})$



Om die hittevergelyking te transformeer word as volg te werk gegaan:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}$$

sodat 
$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{x}^2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}}$$

Die hittevergelyking word

$$c_1 \rho_1 \frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} - K_1 \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad \text{vir } -1 < \bar{x} < 0$$

en  $\bar{t} > 0$

sodat 
$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad \text{in die gebied } (-1,0) \text{ met } \bar{t} > 0.$$

In hoofstuk 4 word van hierdie transformasie gebruik gemaak. Ten einde verwarring met moeilik hanteerbare simbole uit te skakel, word gebruik gemaak van die bekende simbole  $x$  en  $t$ , in plaas van  $\bar{x}$  en  $\bar{t}$ . Dit is dus belangrik om deurgaans bewus te wees van die feit dat daar met 'n getransformeerde probleem gewerk word.

### 3.9 EENDUIDIGHEID VAN DIE OPLOSSINGS

Beskou die hittegeleidingsprobleem in 'n eindige geslote gebied met voorgeskrewe beginvoorwaarde waarin die Dirichlet-randvoorwaarde geld, as voorbeeld.

Indien moontlik, laat  $u_1$  en  $u_2$  twee onafhanklike oplossings wees van die probleem

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & 0 < x < 1 \\
 u(x, 0) &= 1 & 0 \leq x \leq 1 \\
 u(0, t) &= 0 & t > 0 \\
 u(1, t) &= g(t) & t > 0
 \end{aligned}
 \quad \text{----- (3.13)}$$

Laat  $U = u_1 - u_2$ . Dan bevredig  $U$  die vergelykings

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 0 & 0 < x < 1 \\
 U(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq 1 \\
 U(0, t) &= 0 & t > 0 \\
 U(1, t) &= 0 & t > 0
 \end{aligned}
 \quad \text{----- (3.14)}$$

As vergelykings (3.14) slegs die triviale oplossing  $U \equiv 0$  het, is  $u_1 \equiv u_2$ , dit wil se  $\hat{u}$  die oplossing van (3.13) is eenduidig.

Beskou die integraal

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 U^2 dx \geq 0 \quad \text{-----} (3.15)$$

waar  $U$  die oplossing is van (3.14)

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^1 U \frac{\partial U}{\partial t} dx = \int_0^1 U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx$$

As  $U$  en sy eerste en tweede afgeleides kontinu is, volg met behulp van stuksgewyse integrasie

$$\int_0^1 U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx = U \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

$$\therefore \frac{dJ}{dt} = U \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx$$

Aangesien  $U = 0$  by die rande, volg

$$\frac{dJ}{dt} = - \int_0^1 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx \quad \text{indien } \frac{\partial U}{\partial x} \text{ begrens is op die rande.}$$

Dus is

$$\frac{dJ}{dt} \leq 0 \quad \text{-----} (3.16)$$

$$J(0) = \int_0^1 \frac{1}{2} U^2(x,0) dx = 0 \quad \text{volgens (3.14)}$$

----- (3.17)

$$J(0) = 0 \text{ en } \frac{dJ}{dt} \leq 0 \quad \text{vir } t \geq 0$$

$$\text{impliseer } J(t) \leq 0 \quad \text{as } t > 0 \quad \text{-----} (3.18)$$

As (3.18) geld, moet die volgende aannames in verband met  $U$  gemaak word

(a)  $U \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow 0$

(b)  $\frac{\partial U}{\partial x}$  is begrens.

Van (3.15) en (3.18) volg dit dat  $J = 0$  en omdat  $U$  kontinu is, moet  $U = 0$ , sodat

$$u_1 = u_2$$

Die bewys vir eenduidigheid van die oplossings van die ander probleme volg soortgelyk.

In 'n verdere hoofstuk word die onderstaande gekoppelde probleem analities opgelos. Om te bewys dat die oplossing van die probleem eenduidig is, word as volg te werk gegaan:

$$(a) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \quad -1 < x < 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = b(x, t) \quad 0 < x < \ell$$

$$t > 0 \quad t > 0$$

$$(b) \quad u_1(x, 0) = f_1(x) \quad u_2(x, 0) = f_2(x)$$

$$(c) \quad u_1(-1, t) = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}(\ell, t) = 0$$

$$(d) \quad u_1(0, t) = u_2(0, t)$$

$$(e) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = \gamma \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t)$$

$$\alpha^2 \text{ en } \gamma > 0$$

Aanvaar die oplossing van die probleem is nie-eenduidig. Veronderstel dus daar bestaan ten minste twee stelle oplossings  $(u_1^i, u_2^i)$  en  $(u_1^*, u_2^*)$  vir die probleem.

$$\text{Stel nou } U_1 = u_1^i - u_1^* \quad \text{en} \quad U_2 = u_2^i - u_2^*$$

Dan is

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} &= 0 & \frac{\partial U_2}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} &= 0 \\ U_1(x, 0) &= 0 & U_2(x, 0) &= 0 \\ U_1(-1, t) &= 0 & \frac{\partial U_2}{\partial x}(\ell, t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1(0, t) &= u_1'(0, t) - u_1^*(0, t) \\ &= u_2'(0, t) - u_2^*(0, t) \\ &= U_2(0, t) \text{-----} (f) \end{aligned}$$

Netso  $\frac{\partial U_1}{\partial x}(0, t) = \tau \frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t), \quad \tau > 0 \text{-----} (g)$

Stel nou  $J(t) = \frac{\alpha^2}{\tau} \int_{-1}^0 \frac{1}{2} U_1^2 dx + \int_0^\ell \frac{1}{2} U_2^2 dx \geq 0$  as  $\frac{\alpha^2}{\tau} > 0$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dJ}{dt} &= \frac{\alpha^2}{\tau} \int_{-1}^0 U_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} dx + \int_0^\ell U_2 \frac{\partial U_2}{\partial t} dx \\ &= \frac{\alpha^2}{\tau} \int_{-1}^0 U_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} dx + \alpha^2 \int_0^\ell U_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} dx \\ &= \frac{\alpha^2}{\tau} U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{-1}^0 - \frac{\alpha^2}{\tau} \int_{-1}^0 \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 dx + \alpha^2 U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_0^\ell - \alpha^2 \int_0^\ell \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= \frac{\alpha^2}{\tau} U_1(0, t) \frac{\partial U_1}{\partial x}(0, t) - \frac{\alpha^2}{\tau} U_1(-1, t) \frac{\partial U_1}{\partial x}(-1, t) - \frac{\alpha^2}{\tau} \int_{-1}^0 \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 dx \\ &+ \alpha^2 U_2(\ell, t) \frac{\partial U_2}{\partial x}(\ell, t) - \alpha^2 U_2(0, t) \frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) - \alpha^2 \int_0^\ell \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Beskou } & \frac{\alpha^2}{\gamma} U_1(0, t) \frac{\partial U_1}{\partial x}(0, t) - \alpha^2 U_2(0, t) \frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) \\
 &= \frac{\alpha^2}{\gamma} \left[ U_1(0, t) \frac{\partial U_1}{\partial x}(0, t) - \gamma U_2(0, t) \frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) \right] \\
 &= \frac{\alpha^2}{\gamma} U_1(0, t) \left[ \frac{\partial U_1}{\partial x}(0, t) - \gamma \frac{\partial U_2}{\partial x}(0, t) \right] \text{ volgens (f)} \\
 &= 0 \text{ volgens (g)}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dJ}{dt} = - \frac{\alpha^2}{\gamma} \int_{-1}^0 \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 dx - \alpha^2 \int_0^{\ell} \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 dx \leq 0$$

Op soortgelyke wyse as in die Dirichlet-probleem waar eenduidigheid reeds bewys is, volg dat

$$U_1 = 0 \quad \text{en} \quad U_2 = 0$$

$$\text{sodat } u_1' = u_1^* \quad \text{en} \quad u_2' = u_2^*$$

wat eenduidigheid bewys vir die gekoppelde probleem onder bespreking.

## HOOFSTUK 4

### WARMTEGELEIDINGSPROBLEME

#### 4.1 INLEIDING

In hierdie hoofstuk word vier warmtegeleidingsprobleme ondersoek en opgelos. Die randvoorwaardes wat geld in die eerste drie probleme is die Dirichlet-randvoorwaarde, die Neumann-randvoorwaarde en die Dinamiese randvoorwaarde. In die laaste probleem word 'n algemene geval beskou waarin twee stawe gekoppel word sodanig dat perfekte termiese kontak by die koppelpunt plaasvind.

Die oplossings van hierdie probleme word in hierdie hoofstuk slegs analities bepaal. In hoofstuk 5 word die oplossings in tabelvorm gegee asook die grafieke daarvan.

Voordat die probleme bespreek word, word 'n kort opsomming gegee van ho die afsonderlike randvoorwaardes verkry is na aanleiding van die bespreking van randvoorwaardes in Hoofstuk 3.

Soos reeds gesien in paragraaf 3.7.2, vergelyking (3.11)

$$u_1(d, t) = \frac{1}{c_2 \rho_2} \int_0^t \bar{B}_2(\tau) d\tau + u_2(0)$$

behels Dirichlet-randvoorwaardes die 'geskiedenis' van alle randmediumbronne van 'n supergeleidende rand van oneindige lengte.

$\bar{b}_2(r)$  is die gemiddelde tempo waarteen bronne warmte-energie op tyd  $t$  in die tweede gebied vrystel per eenheidslengte.

In paragraaf 4.2 word die Dirichlet-randvoorwaarde aangegee as

$$u(0, t) = g(t)$$

waar  $u_2(0) = 0$  en  $g(t)$  s $\acute{o}$  gekies is dat die term na die transformasie van die veranderlikes  $x$  en  $t$   $\rho(1 - e^{-t})$  is.

Dit is as volg gedoen:

Uit vergelyking (3.11) volg, met  $u_2(0) = 0$  dat

$$u_1(d, t) = \frac{1}{c_2 \rho_2} \int_0^t \bar{b}_2(r) dr$$

Kies  $\bar{b}_2(r) = e^{-\frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} r}$

$$\begin{aligned} \text{Dan is } u_1(d, t) &= \frac{1}{c_2 \rho_2} \int_0^t e^{-\frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} r} dr \\ &= -\frac{c_1 \rho_1 a^2}{c_2 \rho_2 K_1} \left[ e^{-\frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} r} \right]_0^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{c_1 \rho_1 a^2}{c_2 \rho_2 K_1} \left[ e^{-\frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} t} - 1 \right] \\
 &= \beta \left[ 1 - e^{-\frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} t} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{waar } \beta = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{c_2 \rho_2 K_1}$$

Na die transformasie met  $t = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{K_1} \bar{t}$

$$\text{word } u_1(d, \bar{t}) = \beta \left[ 1 - e^{-\bar{t}} \right]$$

Vergelyking (3.8) gee die Neumann-randvoorwaarde as

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(d, t) = \frac{B(d, t)}{K_1} = f$$

wat beteken dat 'n puntbron  $B=K_1 f$  hitte vrystel by die punt  $d$  wat volkome termies geïsoleer is van die eksterne gebied.

In paragraaf 4.3 word die Neumann-randvoorwaarde aangegee as

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t)$$

waar  $g(t) = 0$  gekies word in die berekeninge, met ander woorde die afwesigheid van 'n puntbron aan die regterkant van die staaf word aanvaar.

Laastens is die Dinamiese randvoorwaarde volgens vergelyking (3.10)

$$\ell c_2 \rho_2 \frac{\partial u_1}{\partial t}(d, t) + K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(d, t) = \ell \bar{b}_2(t) + B(d, t) - \phi_2(e, t)$$

Om die Dinamiese randvoorwaarde te verkry wat gebruik word in paragraaf 4.4, word die staaf in die tweede gebied geïsoleer by die eindpunt (dit wil se  $\hat{\phi}_2(e, t) = 0$ ) en die bron  $B(d, t)$  by die koppelpunt weggeneem.

Dan volg

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(a, t) + \frac{K_1}{L c_2 \rho_2} \frac{\partial u_1}{\partial x}(a, t) = \frac{\bar{b}_2(t)}{c_2 \rho_2} \quad \text{waar } L \text{ in plaas van } \ell \text{ gebruik}$$

word en  $\bar{b}_2(t)$  as volg gekies is:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(a, t) + \frac{K_1}{L c_2 \rho_2} \frac{\partial u_1}{\partial x}(a, t) = \frac{e^{-\frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} t}}{c_2 \rho_2}$$

Na die transformasie  $x = a\bar{x}, \quad t = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{K_1} \bar{t},$

$$\left( \therefore \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} \right)$$

volg dat  $\frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} + \frac{K_1}{L c_2 \rho_2} \frac{1}{a} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} = \frac{e^{-\bar{t}}}{c_2 \rho_2}$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} + \frac{ac_1\rho_1}{Lc_2\rho_2} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} = \frac{a^2c_1\rho_1}{K_1c_2\rho_2} e^{-\bar{t}}$$

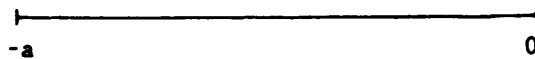
of

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} = \beta e^{-\bar{t}}$$

met  $\alpha = \frac{ac_1\rho_1}{Lc_2\rho_2}$   $\beta = \frac{a^2c_1\rho_1}{K_1c_2\rho_2}$

#### 4.2 PROBLEEM 1 - 'N WARMTEGELEIDINGSPROBLEEM WAARIN DIE DIRICHLET-RANDVOORWAARDE GELD.

Beskou 'n eendimensionele staaf, lengte  $a$ , waarin die hittevergelyking geld.



Die probleem word as volg geformuleer:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & -a < x < 0, & t > 0 \\ u(-a, t) &= 0 & & t > 0 \\ u(0, t) &= g(t) & & t > 0 \\ u(x, 0) &= 1 & -a < x < 0 & \end{aligned}$$

Die keuse vir die beginvoorwaarde, naamlik  $u(x, 0) = 1$ , word gerieflikheidshalwe gedoen omdat hier met 'n toetsprobleem gewerk

word. Hierdie keuse maak die berekening van die Fourier-sinus-koëffisient  $b_n$  in vergelyking (4.2) baie maklik.

As die transformasie  $x = a\bar{x}$ ,  $t = \frac{cpa^2}{k} \bar{t}$  toegepas word, transformeer hierdie probleem as volg na die gebied  $(-1,0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} &= 0 & -1 < \bar{x} < 0, & \bar{t} > 0 \\ u(-1, \bar{t}) &= 0 & & \bar{t} > 0 \\ u(0, \bar{t}) &= g(\bar{t}) & & \bar{t} > 0 \\ u(\bar{x}, 0) &= 1 & -1 < \bar{x} < 0 & \end{aligned}$$

(Soos reeds gemeld in paragraaf 3.8 word die simbole  $x$  en  $t$  in die getransformeerde probleem gebruik in plaas van die moeiliker-hanteerbaar simbole  $\bar{x}$  en  $\bar{t}$ ).

Laat  $v(x, t) = (1+x)g(t)$  (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) &= (1+x)g'(t) & v(-1, t) &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) &= 0 & v(0, t) &= g(t) \\ & & v(x, 0) &= (1+x)g(0) \end{aligned}$$

As  $w = u - v$ , volg dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -(1+x)g'(t) \\ w(-1, t) &= 0 \\ w(0, t) &= 0 \\ w(x, 0) &= 1 - (1+x)g(0) \end{aligned}$$

Hierdie probleem word geskei in twee probleme A en B met oplossings  $w_1(x, t)$  en  $w_2(x, t)$ :

Probleem A

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0$$

$$w_1(-1, t) = 0$$

$$w_1(0, t) = 0$$

$$w_1(x, 0) = 1 - (1+x)g(0)$$

Probleem B

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} &= -(1+x)g'(t) \\ &= F(x, t) \end{aligned}$$

$$w_2(-1, t) = 0$$

$$w_2(0, t) = 0$$

$$w_2(x, 0) = 0$$

Om die oplossing van probleem A te vind, word die metode van skeiding van veranderlikes gebruik. Probeer om die oplossing te bepaal in die vorm van 'n produk

$$w_1(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

waar  $X(x)$  slegs 'n funksie van  $x$  en  $T(t)$  slegs 'n funksie van  $t$  is.

Probleem A lewer sodoende 'n eiewaardeprobleem vir  $X(x)$  met eiewaardes  $\lambda_n = n^2\pi^2$  en eiefunksies  $X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$

Die oplossing vir die tydgedeelte van die probleem is [Haberman, 1983, bladsy 34]

$$\begin{aligned} T_n(t) &= Ce^{-\lambda_n t} \\ &= Ce^{-n^2\pi^2 t} \end{aligned}$$

Die algemene oplossing van die probleem is

$$w_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \cdot e^{-n^2\pi^2 t} \quad \text{---(4.2)}$$

$$w_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad -1 < x < 0$$

$$[ = 1 - (1+x)g(0) ]$$

Hieruit volg dat die koëffisiënte  $b_n$  die koëffisiënte is van 'n Fourier-sinusreeks

$$b_n = 2 \int_{-1}^0 [1 - (1+x)g(0)] \sin n\pi x \, dx \quad \text{---(4.3)}$$

Om die oplossing van probleem B te vind, word as volg te werk gegaan:

Brei die oplossing (indien een bestaan) vir vaste  $t$  uit in 'n Fourier-sinus-reeks:

$$w_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\pi x$$

Die versameling sinus-koëffisiënte

$$b_n(t) = 2 \int_{-1}^0 w_2(x,t) \sin n\pi x \, dx$$

bepaal  $w_2(x,t)$  eenduidig. Dit word die eindige Fourier-sinustransformasie van  $w_2(x,t)$  genoem. [Weinberger, 1965, bladsy 127]

As  $\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}$  kontinuu is, word sy eindige sinus-transformasie gegee deur

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-1}^0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \sin n\pi x \, dx \\ &= 2 \left[ \frac{\partial w_2}{\partial x} \sin n\pi x \Big|_{-1}^0 - n\pi \int_{-1}^0 \frac{\partial w_2}{\partial x} \cos n\pi x \, dx \right] \\ &= -2n\pi \left[ w_2 \cos n\pi x \Big|_{-1}^0 + n\pi \int_{-1}^0 w_2 \sin n\pi x \, dx \right] \\ &= -2n^2\pi^2 \int_{-1}^0 w_2 \sin n\pi x \, dx \\ &= -n^2\pi^2 b_n(t) \end{aligned}$$

As  $\frac{\partial w_2}{\partial t}$  kontinuu is, kan integrasie en differensiasie omgeruil word om aan te toon dat

$$2 \int_{-1}^0 \frac{\partial w_2}{\partial t} \sin n\pi x \, dx = \frac{db_n(t)}{dt}$$

Neem nou die eindige sinus transformasie van

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = F(x, t)$$

$$\therefore b_n'(t) + n^2 \pi^2 b_n(t) = B_n(t) \text{-----} (4.4 a)$$

waar

$$B_n(t) = \frac{0}{2} \int_{-1}^1 F(x, t) \sin n\pi x \, dx \text{-----} (4.4 b)$$

Die beginvoorwaarde  $w_2(x, 0) = 0$  beteken dat

$$b_n(0) = 0 \text{-----} (4.5)$$

Die gewone differensiaalvergelyking (4.4 a) is 'n eerste-orde lineêre differensiaalvergelyking met beginvoorwaarde (4.5).

Om die gewone differensiaalvergelyking op te los, word gebruik gemaak van die integrasiefaktor  $e^{n^2 \pi^2 t}$ :

$$e^{n^2 \pi^2 t} b_n'(t) + n^2 \pi^2 e^{n^2 \pi^2 t} b_n(t) = e^{n^2 \pi^2 t} B_n(t)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left[ e^{n^2 \pi^2 t} b_n(t) \right] = e^{n^2 \pi^2 t} B_n(t)$$

Integreer vanaf 0 tot t:

$$e^{n^2 \pi^2 t} b_n(t) - b_n(0) = \int_0^t e^{n^2 \pi^2 r} B_n(r) \, dr$$

Met behulp van (4.5) word dit

$$b_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t} \int_0^t e^{n^2\pi^2 r} B_n(r) dr$$

$$b_n(t) = \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-r)} B_n(r) dr$$

∴ Die oplossing van die probleem B, met  $\frac{\partial w_2}{\partial t}$  en  $\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}$  kontinu, is

$$w_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-r)} B_n(r) dr \cdot \sin n\pi x \quad \text{---(4.6)}$$

waar  $B_n(r)$  hierbo gedefinieer is.

Die oplossing van die hittevergelyking waarin die Dirichlet-randvoorwaarde geld, is dus

$$u(x,t) = v(x,t) + w_1(x,t) + w_2(x,t)$$

met  $v$ ,  $w_1$  en  $w_2$  gegee deur (4.1), (4.2) en (4.6) respektiewelik.

Die berekenings om die uitdrukking vir  $u(x,t)$  te bepaal, word as volg gedoen:

met  $g(t) = \beta(1-e^{-t})$  volg dat

$$v(x,t) = (1+x)g(t) \quad (\text{van (4.1)})$$

$$\therefore v(x,t) = \beta(1+x)(1-e^{-t})$$

$$b_n = 2 \int_{-1}^0 [1-(1+x)g(0)] \sin n\pi x \, dx \quad (\text{van (4.3)})$$

$$= 2 \int_{-1}^0 \sin n\pi x \, dx$$

$$= 2 \left[ -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right]_{-1}^0$$

$$= 2 \left[ -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \cos n\pi \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} [\cos n\pi - 1]$$

$$B_n(t) = 2 \int_{-1}^0 F(x,t) \sin n\pi x \, dx, \quad \text{van (4.4b), waar}$$

die uitdrukking vir  $F(x,t)$  in probleem B op bladsy 45 aangegee word.

$$\begin{aligned}
 \therefore B_n(t) &= 2 \int_{-1}^0 -(1+x)g'(t) \sin n\pi x \, dx \\
 &= 2 \int_{-1}^0 -(1+x)\beta e^{-t} \cdot \sin n\pi x \, dx \\
 &= -2\beta e^{-t} \int_{-1}^0 (1+x) \sin n\pi x \, dx \\
 &= -2\beta e^{-t} \left[ (1+x) \left( -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{n\pi} \int_{-1}^0 \cos n\pi x \, dx \right] \\
 &= -2\beta e^{-t} \left[ -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin n\pi x \Big|_{-1}^0 \right] \\
 &= \frac{2\beta e^{-t}}{n\pi}
 \end{aligned}$$

sodat  $B_n(\tau) = \frac{2\beta e^{-\tau}}{n\pi}$

$$\begin{aligned}
 w_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-\tau)} B_n(\tau) d\tau \cdot \sin n\pi x \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-\tau)} \cdot \frac{2\beta e^{-\tau}}{n\pi} d\tau \cdot \sin n\pi x \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta}{n\pi} \int_0^t e^{-n^2\pi^2 t} \cdot e^{\tau(n^2\pi^2-1)} d\tau \cdot \sin n\pi x
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t} \cdot \frac{1}{(n^2\pi^2 - 1)} \cdot e^{r(n^2\pi^2 - 1)} \Big|_0^t \cdot \sin n\pi x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta}{n\pi} \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{(n^2\pi^2 - 1)} \cdot \left[ e^{t(n^2\pi^2 - 1)} - 1 \right] \cdot \sin n\pi x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta}{n\pi(n^2\pi^2 - 1)} \left[ e^{-t} - e^{-n^2\pi^2 t} \right] \cdot \sin n\pi x$$

Dus is  $u(x, t) = v(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t)$

$$u(x, t) = \beta(1+x)(1-e^{-t}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \cdot e^{-n^2\pi^2 t} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta}{n\pi(n^2\pi^2 - 1)} (e^{-t} - e^{-n^2\pi^2 t}) \sin n\pi x$$

met

$$b_n = \frac{2}{n\pi} [\cos n\pi - 1]$$

4.3 PROBLEEM 2 - 'N WARMTEGELEIDINGSPROBLEEM WAARIN DIE NEUMANN-RANDVOORWAARDE GELD.

Beskou weereens 'n staaf, lengte  $a$ , waarin die hittevergelyking geld.

Die probleem waarin die Neumann-randvoorwaarde geld, word as volg geformuleer:

$$\begin{aligned}
 c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & -a < x < 0, & & t > 0 \\
 u(-a, t) &= 0 & & & t > 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= g(t) & & & t > 0 \\
 u(x, 0) &= 1 & -a < x < 0 & & 
 \end{aligned}$$

Met behulp van die transformasie

$$x = a\bar{x} \qquad t = \frac{c\rho a^2}{k} \bar{t}$$

transformeer die probleem, soos in paragraaf 3.8, na

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} &= 0 & -1 < \bar{x} < 0, & & \bar{t} > 0 \\
 u(-1, \bar{t}) &= 0 & & & \bar{t} > 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}(0, \bar{t}) &= g(\bar{t}) & & & \bar{t} > 0 \\
 u(\bar{x}, 0) &= 1 & -1 < \bar{x} < 0 & & 
 \end{aligned}$$

Laat  $v(x, t) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x \cdot g(t)$  \_\_\_\_\_ (4.7)

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x \cdot g'(t) \qquad v(-1, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = -\pi \sin \pi x \cdot g(t) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = g(t)$$

$$v(x, 0) = \frac{g(0)}{\pi} \sin \pi x$$

Laat  $w = u - v$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{\pi} \sin \pi x [g'(t) + \pi^2 g(t)] = F(x, t)$$

$$w(-1, t) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$w(x, 0) = 1 - \frac{g(0)}{\pi} \sin \pi x$$

Soos in probleem 1 word hierdie probleem in die volgende twee probleme geskei:

Probleem A

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0$$

$$w_1(-1, t) = 0$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$w_1(x, 0) = 1 - \frac{g(0)}{\pi} \sin \pi x$$

Probleem B

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = F(x, t)$$

$$w_2(-1, t) = 0$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$w_2(x, 0) = 0$$

Die oplossing van probleem A word verkry met behulp van die metode van skeiding van veranderlikes. Die X-gedeelte van die probleem is

$$X''(x) = -\lambda X(x)$$

$$X'(0) = 0$$

$$X(-1) = 0$$

Die eiewaardes van hierdie probleem is

$$\lambda_n = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

met ooreenstemmende eiefunksies

$$X_n(x) = \cos(n + \frac{1}{2})\pi x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die oplossing van die tyd-gedeelte van die probleem

$$T'(t) = -\lambda T(t)$$

is

$$T(t) = e^{-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sodat die produkoplossing van die probleem gegee word deur

$$w_1(x, t) = \cos(n + \frac{1}{2})\pi x \cdot e^{-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Enige lineêre kombinasie van hierdie oplossings sal ook 'n oplossing wees, dit wil sê

$$w_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \cdot e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t} \quad \text{--- (4.8)}$$

is 'n oplossing mits

$$1 - \frac{g(0)}{\pi} \sin \pi x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x$$

sodat

$$b_n = 2 \int_{-1}^0 \left[1 - \frac{g(0)}{\pi} \sin \pi x\right] \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \, dx \quad \text{--- (4.9)}$$

Die oplossing van probleem B word, soortgelyk aan probleem B op bladsy 45 van paragraaf 4.2 verkry deur gebruik te maak van die eindige Fourier-cosinus-transformasie, sodat die oplossing gegee word deur

$$w_2(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 (t-\tau)} B_n(\tau) \, d\tau \cdot \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \quad \text{--- (4.10)}$$

met

$$B_n(t) = 2 \int_{-1}^0 F(x, t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \, dx \quad \text{--- (4.11)}$$

Die oplossing van die hittegeleidingsprobleem waarin die Neumann-randvoorwaarde geld, is dus

$$u(x,t) = v(x,t) + w_1(x,t) + w_2(x,t)$$

met  $v, w_1$  en  $w_2$  gegee deur die uitdrukkings in (4.7), (4.8) en (4.10).

In die numeriese berekening van die oplossing van hierdie probleem gaan die puntbron  $g(t)$  aan die regterkant van die staaf weggenem word, dit wil se,  $\hat{g}(t)=0$ .

Die oplossing word dan as volg verkry:

$$v(x,t) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x \cdot g(t) \quad (\text{van (4.7)})$$

$$\therefore v(x,t) = 0$$

$$w_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n+\frac{1}{2})\pi x \cdot e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2 t} \quad (\text{van (4.8)})$$

$$\text{met } b_n = 2 \int_{-1}^0 \left[1 - \frac{g(0)}{\pi} \sin \pi x\right] \cos(n+\frac{1}{2})\pi x \, dx \quad (\text{van (4.9)})$$

$$\therefore b_n = 2 \int_{-1}^0 \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x \, dx$$

$$w_2(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2 (t-\tau)} B_n(\tau) \, d\tau \cdot \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

(van (4.10))

$$\text{waar } B_n(t) = 2 \int_{-1}^0 F(x, t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x \, dx \quad (\text{van (4.11)})$$

$$\text{en } F(x, t) = -\frac{1}{\pi} \sin \pi x [g'(t) + \pi^2 g(t)] = 0$$

$$\text{sodat } B_n(t) = 0$$

$$\therefore w_2(x, t) = 0$$

Die oplossing van die probleem is dus

$$u(x, t) = v(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x \cdot e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2 t}$$

waar

$$b_n = 2 \int_{-1}^0 \cos(n+\frac{1}{2})\pi x \, dx$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi} \sin(n+\frac{1}{2})\pi$$

#### 4.4 PROBLEEM 3 - 'N WARMTEGELEIDINGSPROBLEEM WAARIN DIE DINAMIESE RANDVOORWAARDE GELD.

Beskou 'n staaf, lengte  $a$ , waarin die hittevergelyking geld. Aan die regterkant van die staaf geld die dinamiese randvoorwaarde, met ander woorde die tyd- en ruimtelike afgeleides kom gelyktydig voor.

Die probleem word as volg wiskundig geformuleer:

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - K_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < a, \quad t > 0$$

$$u_1(0, t) = 0 \quad t > 0$$

$$u_1(x, 0) = 1 \quad 0 < x < a$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(a, t) + \frac{K_1}{L c_2 \rho_2} \frac{\partial u_1}{\partial x}(a, t) = \frac{e^{-\frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} t}}{c_2 \rho_2} \quad t > 0$$

Met behulp van die transformasie

$$x = a\bar{x}$$

$$t = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{K_1} \bar{t}$$

transformeer die probleem na die volgende op die gebied  $(0,1)$ :

(Verwys na bladsy 42 en 43)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= 0 & 0 < x < 1, & \quad t > 0 \\ u_1(0, t) &= 0 & & \quad t > 0 \\ u_1(x, 0) &= 1 & 0 < x < 1 & \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(1, t) + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x}(1, t) &= \beta e^{-t} & & \quad t > 0 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{c_1 \rho_1 a}{c_2 \rho_2 L} \qquad \beta = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{c_2 \rho_2 K_1}$$

Die getransformeerde randvoorwaarde is as volg verkry:

Uit die transformasie geld dat

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}}$$

sodat die Dinamiese randvoorwaarde as volg transformeer:

$$\frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} + \frac{K_1}{L c_2 \rho_2} \frac{1}{a} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} = \frac{e^{-\frac{-K_1}{c_1 \rho_1 a^2} \cdot \frac{c_1 \rho_1 a^2}{K_1} \cdot \bar{t}}}{c_2 \rho_2}$$

Skei hierdie probleem in twee probleme

Probleem A

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{_____ (4.12a)}$$

$$w_1(0, t) = 0 \quad \text{_____ (4.12b)}$$

$$w_1(x, 0) = 1 \quad \text{_____ (4.12c)}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}(1, t) + \alpha \frac{\partial w_1}{\partial x}(1, t) = 0 \quad \text{_____ (4.12d)}$$

Probleem B

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0$$

$$w_2(0, t) = 0$$

$$w_2(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t}(1, t) + \alpha \frac{\partial w_2}{\partial x}(1, t) = \beta e^{-t}$$

4.4.1 Probleem A se oplossing word verkry deur gebruik te maak van die metode van skeiding van veranderlikes. [Haberman, 1983, bladsy 465 tot 471]

$$w_1(x, t) = X(x)T(t)$$

Die randvoorwaarde is dan  $X(1)T'(t) + \alpha X'(1)T(t) = 0$

$$\therefore X(1)(-AT(t)) + \alpha X'(1)T(t) = 0$$

$$\therefore X'(1) - \frac{\lambda}{\alpha} X(1) = 0$$

Die X-gedeelte van die probleem lyk dan as volg:

$$\begin{aligned}X''(x) &= -\lambda X(x) \\X(0) &= 0 \\X'(1) - \frac{\lambda}{\alpha} X(1) &= 0\end{aligned}$$

Beskou drie moontlike gevalle vir  $\lambda$ :

$\lambda=0$

As  $\lambda=0$  is die oplossing van die differensiaal-  
vergelyking

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Die homogene randvoorwaardes lewer die volgende:

$$X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$\therefore X(x) = C_2 x$$

$$\therefore X'(x) = C_2$$

$$X'(1) - \frac{\lambda}{\alpha} X(1) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (\lambda=0)$$

$\therefore X(x) \equiv 0$  wat die triviale oplossing is, sodat  $\lambda=0$   
nie 'n eiewaarde is nie.

$\lambda < 0$

As  $\lambda < 0$  is die oplossing van die differensiaal-  
 vergelyking

$$X(x) = C_1 \cosh \sqrt{s}x + C_2 \sinh \sqrt{s}x \quad \text{waar } \lambda = -s, s > 0$$

Deur weereens die randvoorwaardes toe te pas word  
 die volgende verkry:

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$\therefore X(x) = C_2 \sinh \sqrt{s}x$$

$$\therefore X'(x) = C_2 \sqrt{s} \cosh \sqrt{s}x$$

$$X'(1) - \frac{\lambda}{\alpha} X(1) = C_2 \sqrt{s} \cosh \sqrt{s} + \frac{s}{\alpha} C_2 \sinh \sqrt{s} = 0$$

$$\therefore C_2 (\sqrt{s} \cosh \sqrt{s} + \frac{s}{\alpha} \sinh \sqrt{s}) = 0$$

Die gedeelte in hakies is positief ( $\therefore \neq 0$ )

$$\therefore C_2 = 0$$

sodat die triviale oplossing weereens verkry word.

Daar is dus geen negatiewe eiewaardes nie.

Beskou dus slegs die geval  $\lambda > 0$ .

Die algemene oplossing van die probleem is dan

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$\therefore X(x) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

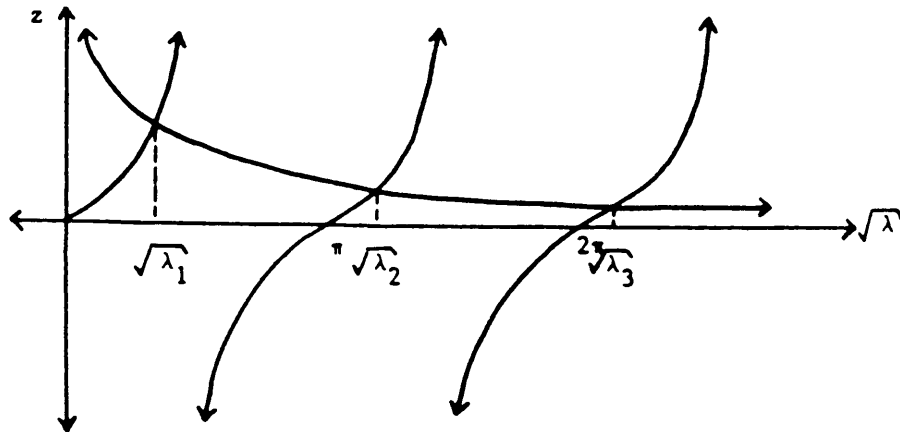
$$X'(x) = C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x$$

$$X'(1) - \frac{\lambda}{\alpha} X(1) = C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \frac{\lambda}{\alpha} C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0 \quad \text{--- (4.13)}$$

$$\text{sodat} \quad \sqrt{\lambda} \tan \sqrt{\lambda} = \alpha$$

Om die eiewaardes te verkry word hierdie vergelyking grafies opgelos en 'n numeriese metode gebruik om die wortels akkuraat te bepaal

$$\text{Laat } z = \tan \sqrt{\lambda} = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$$



Daar is 'n oneindige hoeveelheid sny punte (eiewaardes, aangedui as  $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots$  en as  $n \rightarrow \infty$  sal

$$\sqrt{\lambda_n} \approx (n-1)\pi$$

Die oplossing van die tydgedeelte van die probleem is

$$T(t) = C_n e^{-\lambda_n t}$$

sodat die algemene oplossing die volgende is:

$$w_1(x, t) = \sum_1^{\infty} b_n e^{-\lambda_n t} \sin \sqrt{\lambda_n} x \quad \text{—————(4.14)}$$

Die eiewaardeprobleem vir  $X$  is ongewoon in die sin dat die eiewaarde  $\lambda$  ook in die randvoorwaarde voorkom:

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\lambda X(x) \\ X(0) &= 0 \\ X'(1) - \frac{\lambda}{\alpha} X(1) &= 0 \end{aligned} \quad \text{—————(4.15)}$$

Om aan te toon dat die eiefunksies wat ooreenstem met die verskillende eiewaardes nie ortogonaal is nie, word gebruik gemaak van die standaardbewys deur Green se formule. [Haberman, 1983, bladsy 470]

Beskou naamlik twee verskillende eiefunksies  $X_1$  en  $X_2$  met eiewaardes  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  respektiewelik.

(4.15) impliseer:

$$X_1''(x) = -\lambda_1 X_1(x)$$

$$X_1(0) = 0$$

$$X_1'(1) - \frac{\lambda_1}{\alpha} X_1(1) = 0$$

$$X_2''(x) = -\lambda_2 X_2(x)$$

$$X_2(0) = 0$$

$$X_2'(1) - \frac{\lambda_2}{\alpha} X_2(1) = 0$$

Green se formule

$$\int_0^1 (X_1 \frac{d^2 X_2}{dx^2} - X_2 \frac{d^2 X_1}{dx^2}) dx = X_1 \frac{dX_2}{dx} - X_2 \frac{dX_1}{dx} \Big|_0^1$$

lewer nou die volgende:

$$\int_0^1 [X_1(-\lambda_2 X_2) - X_2(-\lambda_1 X_1)] dx = X_1 X_2'(x) - X_2 X_1'(x) \Big|_0^1$$

$$\therefore \int_0^1 [-\lambda_2 X_1 X_2 + \lambda_1 X_1 X_2] dx = X_1(1) \frac{\lambda_2}{\alpha} X_2(1) - X_2(1) \frac{\lambda_1}{\alpha} X_1(1)$$

$$\therefore \int_0^1 X_1 X_2 (\lambda_1 - \lambda_2) dx = \frac{1}{\alpha} X_1(1) X_2(1) [\lambda_2 - \lambda_1]$$

$$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 X_1 X_2 dx = \frac{1}{\alpha} (\lambda_2 - \lambda_1) X_1(1) X_2(1)$$

Omdat die regterkant nie verdwyn nie, kan nie tot die gevolgtrekking gekom word dat

$$\int_0^1 X_1 X_2 dx = 0 \text{ as } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

soos gewoonlik die geval is met ortogonaliteitsbewyse.

Let egter op dat

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 X_1 X_2 dx - \frac{1}{\alpha} (\lambda_2 - \lambda_1) X_1(1) X_2(1) = 0$$

$$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 X_1 X_2 dx + \frac{1}{\alpha} (\lambda_1 - \lambda_2) X_1(1) X_2(1) = 0$$

$$\therefore (\lambda_1 - \lambda_2) \left[ \int_0^1 X_1 X_2 dx + \frac{1}{\alpha} X_1(1) X_2(1) \right] = 0$$

Hieruit kan 'n ander tipe ortogonaliteit afgelei word:

As  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , dan is

$$\int_0^1 X_1 X_2 dx + \frac{1}{\alpha} X_1(1) X_2(1) = 0$$

Die eiefunksies wat ooreenstem met die eiewaardes is ortogonaal in hierdie sin.

Die ortogonaliteit kan uitgedruk word deur gebruik te maak van 'n gewigsfunksie  $\sigma$  wat die Dirac-deltafunksie bevat.

$$\int_0^1 X_1 X_2 \sigma dx = 0 \quad \text{waar} \quad \sigma = 1 + \frac{1}{\alpha} \delta(x-1)$$

Dink aan hierdie Dirac-deltafunksie as 'n digtheidsfunksie wat die warmte-eienskappe van 'n randpartikel beskryf.

Die eiefunksie-uitbreiding van enige funksie  $f(x)$  (byvoorbeeld die funksie wat die beginvoorwaarde beskryf) is

$$w_1(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x), \text{ of in die geval waar } f(x) = 1 \text{ vir } (0,1)$$

(sien vergelyking (4.12c))

Die koëffisiënt  $b_n$  kan nou bepaal word deur hierdie nuwe soort ortogonaliteit te benut:

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 w_1(x,0) X_m(x) \sigma(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^1 X_n(x) X_m(x) \sigma(x) dx \\ &= 0 \text{ behalwe as } m=n \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^1 w_1(x,0) X_n(x) \sigma(x) dx = b_n \int_0^1 X_n^2(x) \sigma(x) dx$$

$$\text{sodat } b_n = \frac{\int_0^1 w_1(x,0) X_n(x) \sigma(x) dx}{\int_0^1 X_n^2(x) \sigma(x) dx}$$

Gebruik  $\sigma(x) = 1 + \frac{1}{\alpha} \delta(x - 1)$ , dan volg

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{\int_0^1 w_1(x, 0) X_n(x) \left[1 + \frac{1}{\alpha} \delta(x - 1)\right] dx}{\int_0^1 X_n^2(x) \left[1 + \frac{1}{\alpha} \delta(x - 1)\right] dx} \\
 &= \frac{\int_0^1 1 \cdot X_n(x) dx + \frac{1}{\alpha} w_1(1, 0) X_n(1)}{\int_0^1 X_n^2(x) dx + \frac{1}{\alpha} X_n^2(1)}
 \end{aligned}$$

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

$$\text{en } \int_0^1 \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x dx = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \left[ \sqrt{\lambda_n} - \sin \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} \right]$$

(verkry vanaf dubbelhoeke)

Gebruik die eiewaardeverband in vergelyking (4.13) naamlik

$$\cos \sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \sin \sqrt{\lambda}$$

Dan is

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x dx &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \left[ \sqrt{\lambda_n} - \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\alpha} \sin^2 \sqrt{\lambda_n} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\alpha} \sin^2 \sqrt{\lambda_n} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Omdat } \sin^2 \sqrt{\lambda_n} + \cos^2 \sqrt{\lambda_n} = 1$$

$$\rightarrow \sin^2 \sqrt{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\alpha^2} \sin^2 \sqrt{\lambda_n} = 1$$

$$\rightarrow \sin^2 \sqrt{\lambda_n} \left( 1 + \frac{\lambda_n}{\alpha^2} \right) = 1$$

$$\sin^2 \sqrt{\lambda_n} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \lambda_n}$$

$$\therefore \int_0^1 \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \lambda_n} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_n} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha^2 + \lambda_n - \alpha}{\alpha^2 + \lambda_n} \right]$$

$$\therefore b_n = \frac{\frac{1}{\alpha} w_1(1,0) \sin \sqrt{\lambda_n} + \int_0^1 \sin \sqrt{\lambda_n} x dx}{\frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_n} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha^2 + \lambda_n - \alpha}{\alpha^2 + \lambda_n} \right]}$$

$$= \frac{\frac{1}{\alpha} w_1(1,0) \sin \sqrt{\lambda_n} + \int_0^1 \sin \sqrt{\lambda_n} x dx}{\frac{\alpha^2 + \lambda_n + \alpha}{2(\alpha^2 + \lambda_n)}}$$

$$b_n = \frac{2(\alpha^2 + \lambda_n) \left[ \frac{1}{\alpha} w_1(1,0) \sin \sqrt{\lambda_n} + \int_0^1 \sin \sqrt{\lambda_n} x dx \right]}{\alpha^2 + \lambda_n + \alpha}$$

$$b_n = \frac{2(\alpha^2 + \lambda_n) \left[ \frac{1}{\alpha} w_1(1,0) \sin \sqrt{\lambda_n} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} (1 - \cos \sqrt{\lambda_n}) \right]}{\alpha^2 + \lambda_n + \alpha} \quad (4.16)$$

4.4.2 Probleem B word opgelos deur gebruik te maak van die Laplace-transform.

Probleem B:

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0$$

$$w_2(0, t) = 0$$

$$w_2(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t}(1, t) + \alpha \frac{\partial w_2}{\partial x}(1, t) = \beta e^{-t}$$

$$\text{Stel } U(x, s) = L\{w_2(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} w_2(x, t) dt$$

$$L\left\{\frac{\partial w_2}{\partial t}(x, t)\right\} = sU(x, s) - w_2(x, 0) = sU(x, s)$$

$$G(s) = L\{\beta e^{-t}\} = \frac{\beta}{1+s}$$

Die getransformeerde van probleem B word dus

$$U'' - sU = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$U(0, s) = 0 \quad \text{----- (a)}$$

$$sU(1, s) - w_2(1, 0) + \alpha U'(1, s) = G(s) \quad \text{----- (b)}$$

Die algemene oplossing van die differensiaalvergelyking is

$$U(x, s) = A \cosh \sqrt{s} x + B \sinh \sqrt{s} x$$

Uit a volg:  $U(0, s) = A = 0$

$$\therefore U(x, s) = B \sinh \sqrt{s} x \quad U'(x, s) = B\sqrt{s} \cosh \sqrt{s} x$$

Uit b volg:  $sB \sinh \sqrt{s} - w_2(1, 0) + \alpha B\sqrt{s} \cosh \sqrt{s} = G(s)$

$$\therefore B = \frac{G(s) + w_2(1, 0)}{s \sinh \sqrt{s} + \alpha \sqrt{s} \cosh \sqrt{s}}$$

$$\therefore U(x, s) = \frac{\sinh \sqrt{s} x [G(s) + w_2(1, 0)]}{\alpha \sqrt{s} \cosh \sqrt{s} + s \sinh \sqrt{s}}$$

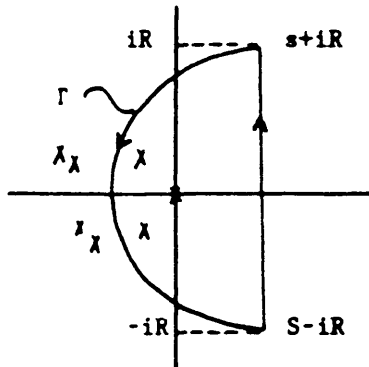
Vervang nou hierin die reële veranderlike  $s$  met die komplekse veranderlike  $\sigma$ .

Volgens die Laplace inversestelling is

$$w_2(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{\sigma t} \sinh \sqrt{\sigma} x [G(\sigma) + w_2(1, 0)]}{\alpha \sqrt{\sigma} \cosh \sqrt{\sigma} + \sigma \sinh \sqrt{\sigma}} d\sigma \quad \text{----- (c)}$$

$$w_2(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} I(\sigma) d\sigma$$

Hierin is  $I(\sigma)$  die integrand. Laat  $\sigma_n$  die pole (singuliere punte) van die integrand wees. Beskou  $\int I(\sigma) d\sigma$  langs die kontoer soos geskets:



Volgens die residustelling is

$$\int I(\sigma) d\sigma = 2\pi i \sum_i^{\infty} \text{Res}[I(\sigma_n)] \quad \text{--- (d)}$$

$$\text{maar } \int_{s-iR}^{s+iR} I(\sigma) d\sigma = \int_{s-iR}^{s+iR} I(\sigma) d\sigma + \int_{\Gamma} I(\sigma) d\sigma$$

Dit kan bewys word dat  $\int_{\Gamma} I(\sigma) d\sigma = 0$  [Carslaw en Jaeger, 1959, bl 303]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} I(\sigma) d\sigma = \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} I(\sigma) d\sigma = 2\pi i w_2(x, t) \quad \text{van (c)}$$

$$= 2\pi i \sum_1^{\infty} \text{Res}[I(\sigma_n)] \quad \text{van (d)}$$

$$\therefore w_2(x, t) = \sum \text{Res}[I(\sigma_n)]$$

met

$$I(\sigma) = \frac{e^{\sigma t} \sinh \sqrt{\sigma} x [G(\sigma) + w_2(1, 0)]}{\sigma \left[ \frac{a}{\sqrt{\sigma}} \cosh \sqrt{\sigma} + \sinh \sqrt{\sigma} \right]}$$

Om die residue te bereken moet die pole van

$$\frac{e^{\sigma t} \sinh \sqrt{\sigma} x [G(\sigma) + w_2(1, 0)]}{\sigma \left[ \frac{a}{\sqrt{\sigma}} \cosh \sqrt{\sigma} + \sinh \sqrt{\sigma} \right]}$$

gevind word.

$$\text{Stel } P(\sigma) = \frac{a}{\sqrt{\sigma}} \cosh \sqrt{\sigma} + \sinh \sqrt{\sigma} = 0$$

$$\text{Probeer } \sigma = -\beta^2 \quad \sqrt{\sigma} = \pm i\beta$$

(Die rede hiervoor lê in die terme  $e^{\sigma t} \sinh \sqrt{\sigma} x$  van die oplossing.

$\sigma = -\beta^2$ , word hierdie term

$$\begin{aligned} & e^{-\beta^2 t} \sinh i\beta x \\ &= i e^{-\beta^2 t} \sin \beta x \end{aligned}$$

wat die standaarduitdrukking is vir warmteprobleme wat tot nou toe opgelos is.)

$$\therefore P = \frac{\alpha}{i\beta} \cos \beta + i \sin \beta = 0$$

$$\cos \beta - \frac{\beta}{\alpha} \sin \beta = 0$$

$$\cos \beta = \frac{\beta}{\alpha} \sin \beta \text{-----(4.17)}$$

Die pole word dus gegee deur die reële getalle  $\beta$  wat sodanig is dat

$$\beta \tan \beta = \alpha$$

Daar bestaan aftelbaar veel reële waardes wat hierdie vergelyking bevredig. Pole van die integrand  $I(\sigma)$  is dus die waardes

$$\sigma_n = -\beta_n^2$$

Hierdie pole is almal reël en lê op die negatiewe as.

[Haberman R, 1983, bl 469]

Skryf nou

$$I(\sigma) = \frac{e^{\sigma t} \sinh \sqrt{\sigma} x [G(\sigma) + w_2(1,0)] / \sigma}{\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} \cosh \sqrt{\sigma} + \sinh \sqrt{\sigma}} = \frac{J(\sigma)}{K(\sigma)}$$

Volgens 'n stelling uit die teorie van residurekene is

$$\text{Res}[I(\sigma_n)] = \frac{J(\sigma_n)}{K'(\sigma_n)} \quad [\text{Weinberger HF, 1965, bl 274}]$$

$$\begin{aligned}
 K'(\sigma) &= \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} \cosh \sqrt{\sigma} + \sinh \sqrt{\sigma} \right] \\
 &= \frac{-\alpha}{2\sigma^{\frac{3}{2}}} \cosh \sqrt{\sigma} + \frac{\alpha}{2\sigma} \sinh \sqrt{\sigma} + \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} \cosh \sqrt{\sigma}
 \end{aligned}$$

met  $\sigma = -\beta^2$  is  $\sqrt{\sigma} = i\beta$  en

$$\therefore \sigma^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{\sigma})^3 = (i\beta)^3 = -i\beta^3$$

Aangesien  $\cosh ix = \cos x$  en  $\sinh ix = i \sin x$ , volg

$$\begin{aligned}
 K'(\sigma_n(\beta_n)) &= \frac{\alpha \cos \beta_n}{2i\beta_n^3} - \frac{\alpha i \sin \beta_n}{2\beta_n^2} + \frac{\cos \beta_n}{2i\beta_n} \\
 &= \frac{1}{2i\beta_n} \left[ \alpha \left[ \frac{\cos \beta_n}{\beta_n^2} + \frac{\sin \beta_n}{\beta_n} \right] + \cos \beta_n \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Verder is } J(\sigma_n(\beta_n)) = \frac{i e^{-\beta_n^2 t} \sin \beta_n x \left[ G(-\beta_n^2) + w_2(1,0) \right]}{-\beta_n^2}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{Res}[I(\sigma_n(\beta_n))] &= \frac{i e^{-\beta_n^2 t} \sin \beta_n x \left[ G(-\beta_n^2) + w_2(1,0) \right] \cdot 2i\beta_n}{-\beta_n^2 \left[ \alpha \left[ \frac{\cos \beta_n}{\beta_n^2} + \frac{\sin \beta_n}{\beta_n} \right] + \cos \beta_n \right]} \\
 &= \frac{2\beta_n e^{-\beta_n^2 t} \sin \beta_n x \left[ G(-\beta_n^2) + w_2(1,0) \right]}{\alpha (\cos \beta_n + \beta_n \sin \beta_n) + \beta_n^2 \cos \beta_n}
 \end{aligned}$$

By die pole  $\beta_n$  geld volgens vergelyking (4.17)

$$\beta_n \sin \beta_n = a \cos \beta_n$$

$$\therefore \text{Res}[I(\beta_n)] = \frac{2\beta_n e^{-\beta_n^2 t} \sin \beta_n x [G(-\beta_n^2) + w_2(1,0)]}{a(a \cos \beta_n + \cos \beta_n) + \beta_n^2 \cos \beta_n}$$

$$\therefore \text{Res}[I(\beta_n)] = \frac{2\beta_n e^{-\beta_n^2 t} \sin \beta_n x [G(-\beta_n^2) + w_2(1,0)]}{(a^2 + a + \beta_n^2) \cos \beta_n}$$

(4.18)

Daar is ook 'n pool waar  $\sigma = -1$ . [  $G(\sigma) = \frac{\beta}{1+\sigma}$  ]

Skryf

$$I(\sigma) = \frac{e^{\sigma t} \sinh \sqrt{\sigma} x \cdot \beta + (1+\sigma) e^{\sigma t} \sinh \sqrt{\sigma} x \cdot w_2(1,0)}{(1+\sigma) \sigma \left[ \frac{a}{\sqrt{\sigma}} \cosh \sqrt{\sigma} + \sinh \sqrt{\sigma} \right]}$$

$$= \frac{J(\sigma)}{K(\sigma)} \quad \text{waar} \quad K(\sigma) = 1+\sigma$$

$$K'(\sigma) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Res}\{I(\sigma)\}_{\sigma=-1} &= \frac{e^{-t} \sinh ix \cdot \beta}{-\left[ \frac{a}{i} \cosh i + \sinh i \right]} \\ &= \frac{i e^{-t} \sin x \cdot \beta}{-\left[ \frac{a}{i} \cos 1 + i \sin 1 \right]} \end{aligned}$$

$$= \frac{-\beta e^{-t} \sin x}{-[\alpha \cos l - \sin l]}$$

$$\therefore \text{Res}[I(\sigma)]_{\sigma=-1} = \frac{\beta e^{-t} \sin x}{\alpha \cos l - \sin l} \quad \text{---(4.19)}$$

$$\therefore w_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}[I(\beta_n)] + \text{Res}[I(\sigma)]_{\sigma=-1} \quad \text{---(4.20)}$$

en

$$u(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t)$$

waar die uitdrukkings vir  $w_1(x, t)$  en  $w_2(x, t)$  gegee word deur vergelykings (4.14) en (4.20).

Vir berekeningsdoeleindes later, sal die uitdrukking vir  $u(x, t)$  dan as volg lyk:

$$u(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n t} \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}[I(\beta_n)] + \text{Res}[I(\sigma)]_{\sigma=-1}$$

(van (4.14) en (4.20))

$$\text{met } b_n = \frac{2(\alpha^2 + \lambda_n) \left[ \frac{1}{\alpha} w_1(1, 0) \sin \sqrt{\lambda_n} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} (1 - \cos \sqrt{\lambda_n}) \right]}{\alpha^2 + \lambda_n + \alpha}$$

(van (4.16))

$$\text{Res}[I(\beta_n)] = \frac{2\beta_n e^{-\beta_n^2 t} \sin \beta_n x [G(-\beta_n^2) + w_2(1, 0)]}{(\alpha^2 + \alpha + \beta_n^2) \cos \beta_n}$$

(van (4.18))

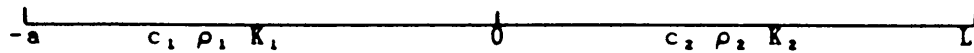
$$\text{en } \text{Res}[I(\sigma)]_{\sigma=-1} = \frac{\beta e^{-t} \sin x}{\alpha \cos 1 - \sin 1}$$

(van (4.19))

#### 4.5 PROBLEEM 4 - DIE "MOEDERPROBLEEM".

Beskou 'n eindige staaf, lengte  $L$ , wat aan 'n staaf, lengte  $a$  gekoppel word.

Die probleem lyk as volg:



Die warmtevergelykings vir die twee gebiede is

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - K_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{en} \quad c_2 \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - K_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = b_2(x, t)$$

Stel  $x = a\bar{x}$   $t = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{K_1} \bar{t}$  (Verwys na bladsy 31 tot 33)

Die vergelykings transformeer na

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} = \frac{K_1}{c_1 \rho_1 a^2} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}^2} \quad \text{en} \quad \frac{c_2 \rho_2 K_1}{c_1 \rho_1 a^2} \frac{\partial u_2}{\partial \bar{t}} - \frac{K_2}{a^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \bar{x}^2} = b_2(\bar{x}, \bar{t})$$

'n Ander vorm vir die vergelykings is

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{x}^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u_2}{\partial \bar{t}} - \frac{K_2 c_1 \rho_1}{K_1 c_2 \rho_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \bar{x}^2} = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{c_2 \rho_2 K_1} b_2(\bar{x}, \bar{t})$$

Stel  $\alpha^2 = \frac{K_2 c_1 \rho_1}{K_1 c_2 \rho_2}$  en  $\beta = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{c_2 \rho_2 K_1}$ .

Dan volg

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial \bar{t}} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \bar{x}^2} = \beta e^{-\bar{t}} \quad (\text{Verwys na bladsy 40 en 41})$$

$$u_1(x, 0) = 1 \quad u_2(x, 0) = 0$$

$$u_1(-1, t) = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}}(\ell, t) = 0 \quad \ell = \frac{L}{a}$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}(0, t) = \gamma \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}}(0, t) \quad \text{waar} \quad \gamma = \frac{K_2}{K_1}$$

Let daarop dat die simbole  $\bar{x}$  en  $\bar{t}$  vervang is met  $x$  en  $t$ .

Verder is die bron in die tweede gebied weereens sò gekies dat dit na die transformasie die faktor  $e^{-t}$  bevat. By die punt  $x=0$  word aanvaar dat daar geen puntbron is nie, Dit wil sê  $B=0$  in vergelyking (3.5) op bladsy 25.

Neem die Laplace transform met betrekking tot  $t$ :

Probleem A

$$sU_1 - 1 - U_1'' = 0$$

$$U_1(-1, s) = 0$$

$$U_1(0, s) = U_2(0, s)$$

$$U_1'(0, s) = \gamma U_2'(0, s)$$

Probleem B

$$sU_2 - \alpha^2 U_2'' = \frac{\beta}{1+s}$$

$$U_2'(\ell, s) = 0$$

Vir probleem A:

Stel 'n partikuliere oplossing is

$$U_{1p} = K$$

$$\therefore sK = 1$$

$$\therefore K = \frac{1}{s}$$

Die oplossing van die homogene probleem A is

$$U_1(x, s) = A \cosh \sqrt{s} x + B \sinh \sqrt{s} x$$

Die algemene oplossing van probleem A is dus

$$U_1(x, s) = A \cosh \sqrt{s} x + B \sinh \sqrt{s} x + \frac{1}{s}$$

$$U_1(-1, s) = A \cosh \sqrt{s} - B \sinh \sqrt{s} + \frac{1}{s} = 0 \quad \text{---(4.21)}$$

$$U_1(0, s) = A + \frac{1}{s}$$

$$U_1'(x, s) = A \sqrt{s} \sinh \sqrt{s} x + B \sqrt{s} \cosh \sqrt{s} x$$

$$U_1'(0, s) = B \sqrt{s}$$

Vir probleem B:

probeer 'n partikuliere integraal

$$\begin{aligned} U_{2p} &= L \\ sL &= \frac{\beta}{1+s} \\ L &= \frac{\beta}{s(1+s)} \end{aligned}$$

Die algemene oplossing van probleem B is

$$U_2(x, s) = C \cosh \frac{\sqrt{s}}{a} x + D \sinh \frac{\sqrt{s}}{a} x + \frac{\beta}{s(1+s)}$$

$$U_2(0, s) = C + \frac{\beta}{s(1+s)}$$

$$U_2'(x, s) = \frac{C \sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}}{a} x + \frac{D \sqrt{s}}{a} \cosh \frac{\sqrt{s}}{a} x$$

$$U_2'(\ell, s) = \frac{C \sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}}{a} \ell + \frac{D \sqrt{s}}{a} \cosh \frac{\sqrt{s}}{a} \ell \quad \text{---(4.22)}$$

$$U_2'(0, s) = \frac{D \sqrt{s}}{a}$$

Die randvoorwaarde  $U_1(0, s) = U_2(0, s)$  lewer:

$$A + \frac{1}{s} = C + \frac{\beta}{s(1+s)}$$

$$C = A + \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s(1+s)} \quad \text{-----} \quad (4.23)$$

Die randvoorwaarde  $U_1'(0, s) = \gamma U_2'(0, s)$  lewer:

$$B \sqrt{s} = \frac{\gamma D \sqrt{s}}{\alpha}$$

$$D = \frac{\alpha}{\gamma} B \quad \text{-----} \quad (4.24)$$

Vanaf (4.22), (4.23) en (4.24):

$$\left[ A + \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s(1+s)} \right] \frac{\sqrt{s}}{\alpha} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} B \frac{\sqrt{s}}{\alpha} \cosh \frac{\sqrt{s} \ell}{\alpha} = 0 \quad \text{-----} \quad (4.25)$$

(4.25)  $\times \cosh \sqrt{s}$ :

$$\left[ A + \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s(1+s)} \right] \frac{\sqrt{s}}{\alpha} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{\alpha} \cosh \sqrt{s} + \frac{B \sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s} \ell}{\alpha} \cosh \sqrt{s} = 0 \quad \text{-----} \quad (4.26)$$

(4.21)  $\times \frac{\sqrt{s}}{\alpha} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{\alpha}$ :

$$A \frac{\sqrt{s}}{\alpha} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{\alpha} \cosh \sqrt{s} - B \frac{\sqrt{s}}{\alpha} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{\alpha} \sinh \sqrt{s} + \frac{1}{\alpha \sqrt{s}} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{\alpha} = 0 \quad \text{-----} \quad (4.27)$$

(4.26) - (4.27):

$$\left[ \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s(s+1)} \right] \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \cosh \sqrt{s} +$$

$$B \left[ \frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s} \right]$$

$$- \frac{1}{a\sqrt{s}} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} = 0$$

$$B = \frac{\frac{\sinh \frac{\sqrt{s}l}{a}}{a\sqrt{s}} - \left[ \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s(1+s)} \right] \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \cosh \sqrt{s}}{\frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s}} \quad (4.28)$$

(4.21)  $\times \frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a}$ :

$$A \frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} \cosh \sqrt{s} - B \frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s}$$

$$+ \frac{1}{\gamma\sqrt{s}} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} = 0 \quad (4.29)$$

(4.25)  $\times \sinh \sqrt{s}$ :

$$\left[ A + \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s(1+s)} \right] \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s}$$

$$+ \frac{\sqrt{s}}{\gamma} B \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s} = 0 \quad (4.30)$$

(4.29) + (4.30):

$$A \left[ \frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s} \right]$$

$$+ \frac{1}{\gamma\sqrt{s}} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} + \left[ \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s(1+s)} \right] \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s} = 0$$

sodat

$$A = \frac{- \left[ \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s(1+s)} \right] \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s} - \frac{\cosh \frac{\sqrt{s}l}{a}}{\gamma\sqrt{s}}}{\frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s}} \quad \text{---(4.31)}$$

Die oplossing van probleem A is

$$U_1(x,s) = A \cosh \sqrt{s}x + B \sinh \sqrt{s}x + \frac{1}{s}$$

met A en B soos gegee deur vergelykings (4.31) en (4.28).

#### 4.5.1 VOORBEREIDING OM DIE INVERSE LAPLACE TRANSFORM TE VIND:

A  $\cosh \sqrt{s}x$

$$= \frac{- \frac{1}{\gamma sa} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s} \cosh \sqrt{s}x}{\frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s}l}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}l}{a} \sinh \sqrt{s}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\frac{\beta}{\sqrt{s(1+s)a}} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \sinh \sqrt{s} \cosh \sqrt{s} x}{\frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \sinh \sqrt{s}} \\
 & - \frac{\frac{1}{\gamma \sqrt{s}} \cosh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \cosh \sqrt{s} x}{\frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \sinh \sqrt{s}} \\
 & = A_1 + A_2 + A_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 & = \frac{-\frac{1}{\sqrt{s} a} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \sinh \sqrt{s} \cosh \sqrt{s} x}{\frac{\sqrt{s}}{\gamma} \cosh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\sqrt{s}}{a} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \sinh \sqrt{s}} \\
 & = \frac{-\gamma \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \sinh \sqrt{s} \cosh \sqrt{s} x}{a s \left[ \cosh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\gamma}{a} \sinh \frac{\sqrt{s} \ell}{a} \sinh \sqrt{s} \right]}
 \end{aligned}$$

Stel nou  $s = -\theta^2$  sodat  $\sqrt{s} = \pm i\theta$

$$\therefore A_1 = \frac{\gamma \sin \frac{\theta \ell}{a} \sin \theta \cos \theta x}{-a\theta^2 \left[ \cos \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta - \frac{\gamma}{a} \sin \frac{\theta \ell}{a} \sin \theta \right]}$$

— (4.32)

Soortgelyk volg dat

$$A_2 = \frac{-\beta\gamma \sin \frac{\theta \ell}{a} \sin \theta \cos \theta x}{-\theta^2(-\theta^2+1)\alpha \left[ \cos \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta - \frac{\gamma}{a} \sin \frac{\theta \ell}{a} \sin \theta \right]} \quad (4.33)$$

en

$$A_3 = \frac{\cos \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta x}{\theta^2 \left[ \cos \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta - \frac{\gamma}{a} \sin \frac{\theta \ell}{a} \sin \theta \right]} \quad (4.34)$$

Netso volg

$$\begin{aligned} B \sinh \sqrt{s}x &= \frac{-\gamma \sinh \frac{\sqrt{s}\ell}{a} \cosh \sqrt{s} \sinh \sqrt{s}x}{\alpha s \left[ \cosh \frac{\sqrt{s}\ell}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\gamma}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}\ell}{a} \sinh \sqrt{s} \right]} \\ &+ \frac{\beta\gamma \sinh \frac{\sqrt{s}\ell}{a} \cosh \sqrt{s} \sinh \sqrt{s}x}{s(1+s)\alpha \left[ \cosh \frac{\sqrt{s}\ell}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\gamma}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}\ell}{a} \sinh \sqrt{s} \right]} \\ &+ \frac{\gamma \sinh \frac{\sqrt{s}\ell}{a} \sinh \sqrt{s}x}{\alpha s \left[ \cosh \frac{\sqrt{s}\ell}{a} \cosh \sqrt{s} + \frac{\gamma}{a} \sinh \frac{\sqrt{s}\ell}{a} \sinh \sqrt{s} \right]} \\ &= B_1 + B_2 + B_3 \end{aligned}$$

Soortgelyk as vir  $A_1$ ,  $A_2$  en  $A_3$  volg

$$B_1 = \frac{\gamma \sin \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta \sin \theta x}{-\alpha \theta^2 \left[ \cos \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta - \frac{\gamma}{a} \sin \frac{\theta \ell}{a} \sin \theta \right]} \quad (4.35)$$

$$B_2 = \frac{\beta \gamma \sin \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta \sin \theta x}{\theta^2 (1 - \theta^2) \alpha \left[ \cos \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta - \frac{\gamma}{a} \sin \frac{\theta \ell}{a} \sin \theta \right]} \quad (4.36)$$

$$B_3 = \frac{\gamma \sin \frac{\theta \ell}{a} \sin \theta x}{\alpha \theta^2 \left[ \cos \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta - \frac{\gamma}{a} \sin \frac{\theta \ell}{a} \sin \theta \right]} \quad (4.37)$$

#### 4.5.2 DIE INVERSE TRANSFORM.

$$U_1(x, s) = A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 + \frac{1}{s}$$

waar die uitdrukkings van  $A_1$  tot  $B_3$  gegee word deur vergelykings (4.32 tot (4.37)).

Die inverse van  $U_1(x,s)$  word bepaal met behulp van die inversiestelling

$$u_1(x,t) = \sum_n \text{Res}[U_1(x,s)e^{st}]_{s=\sigma_n} \quad (\text{Verwys Bylaag E op bladsy 138})$$

waar  $\sigma_n$  die pole van  $U_1(x,s)$  is.

Die inverse van die term  $\frac{1}{s}$  is 1.

Dit is verder nodig om die pole van  $A_1$  tot  $A_3$  en  $B_1$  tot  $B_3$  te ondersoek.

$A_1$ ,  $A_2$  en  $A_3$  asook  $B_1$ ,  $B_2$  en  $B_3$  het almal pole waar

$$\cos \frac{\theta \ell}{\alpha} \cos \theta - \frac{\gamma}{\alpha} \sin \frac{\theta \ell}{\alpha} \sin \theta = 0$$

Met behulp van L'Hospital se reël kan dit bewys word dat die volgende limiete bestaan:

$$\lim_{s \rightarrow 0} A_1, \quad \lim_{s \rightarrow 0} A_2, \quad \lim_{s \rightarrow 0} B_1, \quad \lim_{s \rightarrow 0} B_2 \quad \text{en} \quad \lim_{s \rightarrow 0} B_3.$$

$A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  en  $B_3$  het dus nie pole by  $s=0$  nie.

$A_2$  het 'n pool by  $s=-1$

$A_3$  het 'n pool by  $s=0$

$B_2$  het 'n pool by  $s=-1$

Vervolgens word bewys dat die wortels van die vergelyking

$$\cos \frac{\theta \ell}{\alpha} \cos \theta - \frac{\gamma}{\alpha} \sin \frac{\theta \ell}{\alpha} \sin \theta = 0$$

op die reële as  $\hat{l}$  en simmetries ten opsigte van die oorsprong, sodat in die finale berekenings slegs pole op die negatiewe reële as in berekening gebring hoef te word.

#### 4.5.3 DIE WORTELS IS REEEL [Carslaw en Jaeger, 1959, bladsy 325]

Beskou die vergelyking

$$\cos \theta \cos \frac{\theta \ell}{\alpha} - r \sin \theta \sin \frac{\theta \ell}{\alpha} = 0 \quad \text{-----} (4.38)$$

$$\text{waar } r = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Aanvaar dat 'n suiwer imaginere wortel

$$\theta = i\zeta$$

moontlik is.

$$\therefore \cos i\zeta \cos \frac{i\zeta \ell}{\alpha} - r \sin i\zeta \sin \frac{i\zeta \ell}{\alpha} = 0$$

$$\cosh \zeta \cosh \frac{\zeta \ell}{\alpha} + r \sinh \zeta \sinh \frac{\zeta \ell}{\alpha} = 0$$

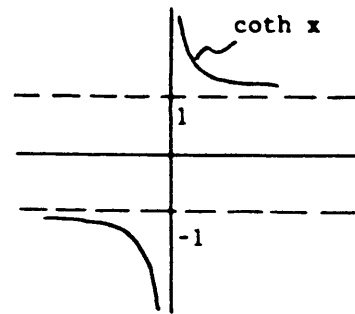
$$\coth \zeta \coth \frac{\zeta \ell}{\alpha} + r = 0 \quad \text{-----} (4.39)$$

Aangesien  $\coth \zeta$  en  $\coth \frac{\zeta \ell}{a}$

altyd dieselfde teken het, is

(4.39) onmoontlik, aangesien  $r = \frac{\gamma}{a} > 0$

$\theta = i\zeta$  is dus onaanvaarbaar.



Om aan te toon dat die wortels van (4.38) ook nie van die vorm

$\theta = \zeta + i\eta$  kan wees nie, word as volg te werk gegaan.

Laat  $\theta$  enige wortel van (4.38) wees.

Stel nou  $U_1(x) = \sin [\theta(1+x)] \quad -1 < x < 0$

$$U_1'(x) = \theta \cos [\theta(1+x)]$$

$$U_1''(x) = -\theta^2 \sin [\theta(1+x)]$$

$$\therefore U_1'' + \theta^2 U_1 = 0 \quad \text{----- (4.40)}$$

$$U_1(-1) = 0 \quad \text{----- (4.41)}$$

Stel  $U_2(x) = \frac{\sin \theta \cos \frac{\theta}{a} (\ell - x)}{\cos \frac{\theta \ell}{a}} \quad 0 < x < \ell$

$$U_2'(x) = \frac{\frac{\theta}{a} \sin \theta \sin \frac{\theta}{a} (\ell - x)}{\cos \frac{\theta \ell}{a}}$$

$$U_2''(x) = \frac{-\left(\frac{\theta}{a}\right)^2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{a} (\ell - x)}{\cos \frac{\theta \ell}{a}}$$

$$\therefore U_2'' + \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^2 U_2 = 0 \quad \text{-----} (4.42)$$

$$U_2'(\ell) = 0$$

$$U_1(0) = U_2(0) = \sin \theta$$

$$K_1 U_1'(0) - K_2 U_2'(0) = K_1 \theta \cos \theta - \frac{K_2 \frac{\theta}{\alpha} \sin \theta \sin \frac{\theta \ell}{\alpha}}{\cos \frac{\theta \ell}{\alpha}}$$

Aangesien  $\frac{K_2}{K_1} = \gamma$ , volg

$$\begin{aligned} K_1 U_1'(0) - K_2 U_2'(0) &= \frac{\theta K_1}{\cos \frac{\theta \ell}{\alpha}} \left[ \cos \frac{\theta \ell}{\alpha} \cos \theta - \frac{\gamma}{\alpha} \sin \theta \sin \frac{\theta \ell}{\alpha} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore K_1 U_1'(0) = K_2 U_2'(0) \quad \text{-----} (4.43)$$

Laat  $\phi$  'n ander wortel van (4.38) wees en definieer vir  $\phi$  twee funksies  $V_1$  en  $V_2$  soortgelyk aan  $U_1$  en  $U_2$  hierbo.

Die eweknie van

$$U_1'' + \theta^2 U_1 = 0 \quad \text{is} \quad V_1'' + \phi^2 V_1 = 0$$

$$\int_{-1}^0 [V_1 U_1'' + \theta^2 V_1 U_1] dx$$

$$= \int_{-1}^0 [v_1(-\theta^2 U_1) + \theta^2 v_1 U_1] dx = 0$$

$$\text{sodat} \quad \int_{-1}^0 [v_1 U_1'' + \theta^2 U_1 v_1] dx = 0 \quad \text{en} \quad \text{-----} (4.44)$$

$$\int_{-1}^0 [U_1 v_1'' + \phi^2 U_1 v_1] dx = 0$$

Die eweknie van

$$U_2'' + \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^2 U_2 = 0 \quad \text{is} \quad v_2'' + \left(\frac{\phi}{\alpha}\right)^2 v_2 = 0$$

$$\therefore \int_0^l [v_2 U_2'' + \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^2 v_2 U_2] dx = 0 \quad \text{-----} (4.45)$$

$$\text{en} \quad \int_0^l [U_2 v_2'' + \left(\frac{\phi}{\alpha}\right)^2 U_2 v_2] dx = 0$$

Uit (4.44):

$$\int_{-1}^0 v_1 U_1'' dx + \int_{-1}^0 \theta^2 v_1 U_1 dx - \int_{-1}^0 U_1 v_1'' dx - \int_{-1}^0 \phi^2 U_1 v_1 dx = 0$$

$$\therefore K_1 (\theta^2 - \phi^2) \int_{-1}^0 v_1 U_1 dx + K_1 \int_{-1}^0 (v_1 U_1'' - U_1 v_1'') dx = 0 \quad \text{-----} (4.46)$$

Uit (4.45):

$$\frac{K_2}{\alpha^2}(\theta^2 - \phi^2) \int_0^{\ell} U_2 V_2 dx + K_2 \int_0^{\ell} [V_2 U_2'' - U_2 V_2''] dx = 0 \quad \text{-----(4.47)}$$

Uit (4.46) en (4.47):

$$\begin{aligned} & (\theta^2 - \phi^2) \left[ K_1 \int_{-1}^0 V_1 U_1 dx + \frac{K_2}{\alpha^2} \int_0^{\ell} U_2 V_2 dx \right] \\ &= K_1 \int_{-1}^0 [V_1'' U_1 - V_1 U_1''] dx + K_2 \int_0^{\ell} [U_2 V_2'' - V_2 U_2''] dx \\ &= K_1 [V_1' U_1 - V_1 U_1']_{-1}^0 - K_1 \int_{-1}^0 [V_1' U_1' - U_1' V_1'] dx \\ &+ K_2 [U_2 V_2' - V_2 U_2']_0^{\ell} - K_2 \int_0^{\ell} [U_2' V_2' - V_2' U_2'] dx \\ &= K_1 [V_1'(0)U_1(0) - V_1(0)U_1'(0) - V_1'(-1)U_1(-1) + V_1(-1)U_1'(-1)] \\ &+ K_2 [U_2(\ell)V_2'(\ell) - V_2(\ell)U_2'(\ell) - U_2(0)V_2'(0) + V_2(0)U_2'(0)] \\ &= U_1(0)[K_1 V_1'(0) - K_2 V_2'(0)] \\ &- V_1(0)[K_1 U_1'(0) - K_2 U_2'(0)] = 0 \quad (\text{volgens (4.43)}) \\ &\therefore (\theta^2 - \phi^2) \left[ K_1 \int_{-1}^0 U_1 V_1 dx + \frac{K_2}{\alpha^2} \int_0^{\ell} U_2 V_2 dx \right] = 0 \quad \text{-----(4.48)} \end{aligned}$$

Veronderstel  $\theta$  en  $\phi$  is twee komplekse toegevoegdes

$$\theta = \zeta + i\xi \qquad \phi = \zeta - i\xi$$

Dan is  $U_1, V_1$  en  $U_2, V_2$  komplekse toegevoegde pare

[Haberman R, 1983, bl 163]

$$U_1 = R_1 + iS_1 \qquad U_2 = R_2 + iS_2$$

$$V_1 = R_1 - iS_1 \qquad V_2 = R_2 - iS_2$$

Uit (4.48)

$$(\theta^2 - \phi^2) \left[ K_1 \int_{-1}^0 U_1 V_1 dx + \frac{K_2}{\alpha^2} \int_0^{\ell} U_2 V_2 dx \right] = 0$$

volg

$$(\theta^2 - \phi^2) \left[ K_1 \int_{-1}^0 (R_1^2 + S_1^2) dx + \frac{K_2}{\alpha^2} \int_0^{\ell} (R_2^2 + S_2^2) dx \right] = 0$$

Die gedeelte in [ ] is streng groter as 0

$$\theta^2 = \phi^2$$

Dit is slegs moontlik as die wortels van (4.38) reëel is en nie kompleks nie.

#### DIE WORTELS LE SIMMETRIES TEN OPSIGTE VAN DIE OORSPRONG.

Beskou steeds die uitdrukking

$$\cos \theta \cos \frac{\theta \ell}{\alpha} - r \sin \theta \sin \frac{\theta \ell}{\alpha} = 0$$

$$\cot \theta = r \tan \frac{\theta \ell}{a}$$

Analities word as volg aangetoon dat die wortels simmetries ten opsigte van die oorsprong is:

As  $\theta$  'n wortel is, is

$$\cos \theta \cos \frac{\theta \ell}{a} - r \sin \theta \sin \frac{\theta \ell}{a} = 0$$

Stel nou  $\phi = -\theta$

$$\therefore \cos \phi \cos \frac{\phi \ell}{a} - r \sin \phi \sin \frac{\phi \ell}{a} = 0$$

$\therefore \phi$  is ook 'n wortel.

Die pole van  $A_1$  tot  $A_3$  en  $B_1$  tot  $B_3$  lê dus by die punte  $s = -\theta^2$  op die negatiewe reële as waar  $\theta$  reële waardes is wat oplossing is van die vergelyking

$$\cot \theta = r \tan \frac{\theta \ell}{a} \quad \text{mits} \quad \sin \theta \sin \frac{\theta \ell}{a} \neq 0$$

## HOOFSTUK 5

### ANALITIESE OPLOSSINGS VAN DIE PROBLEME

In hierdie hoofstuk word 'n kort opsomming van die probleme wat in Hoofstuk 4 behandel is gegee, tesame met die analitiese oplossings en grafieke van die oplossings. 'n Pyltjie dui telkens die betrokke tipe randvoorwaarde aan. Die rekenaarprogramme en tabelle van die oplossing is in die bylae ná Hoofstuk 6 saamgevat.

#### 5.1 DIE DIRICHLET-RANDVOORWAARDE PROBLEEM

Die getransformeerde probleem wat in paragraaf 4.2 behandel is, is

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & -1 < x < 0, \quad t > 0 \\
 u(-1, t) &= 0 & t > 0 \\
 u(0, t) &= \rho(1 - e^{-t}) = g(t) & t > 0 \\
 u(x, 0) &= 1 = f(x) & -1 \leq x \leq 0
 \end{aligned}$$

Die Dirichlet-randvoorwaarde is verkry deur die tweede gebied termies massief te maak, dit wil se

$$K_2 \rightarrow \infty \quad \text{en} \quad L \rightarrow \infty$$

(Verwys na paragraaf 3.7.2)

Die analitiese oplossing van die probleem word aan die einde van paragraaf 4.2 gegee as

$$u(x,t) = \rho(1+x)(1-e^{-t}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \cdot e^{-n^2\pi^2 t} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\rho}{n\pi(n^2\pi^2-1)} (e^{-t} - e^{-n^2\pi^2 t}) \sin n\pi x$$

$$\text{met } b_n = \frac{2}{n\pi} [\cos n\pi - 1]$$

Die grafiek van die oplossing is op bladsy 104.

Beskou die Dirichlet-randvoorwaarde

$$u(0,t) = \rho(1-e^{-t}) = 0$$

$$\text{As } t=0 \text{ is } \rho(1-e^{-t})=0$$

$$\text{As } t=\infty \text{ is } \rho(1-e^{-t})=\rho=0.58$$

$$\rho = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{c_2 \rho_2 k_1} \quad \text{waar} \quad c_1 = \frac{0,136 \times 10^3}{4,184}$$

$$\rho_1 = 7,4 \times 10^3$$

$$a = 1$$

$$c_2 \rho_2 = \frac{0,6 \times 10^6}{4,184}$$

$$k_1 = \frac{0,12 \times 10^2}{4,184}$$

Dit blyk dat die invloed van die bron aan die regterkant van die staaf 'n temperatuurstyging tot gevolg sal hê wat duidelik sigbaar is in die grafiek van die oplossing.

## 5.2 DIE NEUMANN-RANDVOORWAARDEPROBLEEM

Die getransformeerde probleem is, volgens paragraaf 4.3,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & -1 < x < 0, \quad t > 0 \\
 u(-1, t) &= 0 & t > 0 \\
 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0 & t > 0 \\
 u(x, 0) &= 1 & -1 \leq x \leq 0
 \end{aligned}$$

waar  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t) = 0$  gekies word, met ander woorde, daar bestaan geen puntbron aan die regterkant van die staaf nie.

Die Neumann-randvoorwaarde is verkry deur die tweede gebied 'n isolator te maak, dit wil sê

$$K_2 \rightarrow 0$$

(Verwys na paragraaf 3.7.2)

Die analitiese oplossing van die probleem word aan die einde van paragraaf 4.3 gegee as

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \cdot e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t}$$

$$\text{met } b_n = 2 \int_{-1}^0 \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x \, dx = \frac{2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Die grafiek van die oplossing van die probleem volg op bladsy 105

Beskou die Neumann-randvoorwaarde

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

Aan die regterkant van die staaf is daar geen warmte-energiebron nie en mens verwag dan 'n daling in die temperatuur wat duidelik blyk uit die grafiek. Verder is die helling van die grafiek aan die regterkant altyd nul.

### 5.3 DIE DINAMIESE RANDVOORWAARDEPROBLEEM

Die getransformeerde probleem is, volgens paragraaf 4.4

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0, t) &= 0 & t > 0 \\ \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(1, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= \rho e^{-t} & t > 0 \\ u(x, 0) &= 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{met } a = \frac{c_1 \rho_1 a}{c_2 \rho_2 L} \quad \beta = \frac{c_1 \rho_1 a^2}{c_2 \rho_2 K_1}$$

Vir berekenings is die volgende waardes gebruik:

$$c_1 = \frac{0,136 \times 10^3}{4,184}$$

$$\rho_1 = 7,4 \times 10^3$$

$$a = 1$$

$$c_2 \rho_2 = \frac{0,6 \times 10^6}{4,184}$$

$$K_1 = \frac{0,12 \times 10^2}{4,184}$$

$$L = 1$$

Die Dinamiese randvoorwaarde is verkry deur die tweede gebied 'n supergeleier te maak, dit wil sê

$$K_2 \rightarrow \infty$$

(Verwys na paragraaf 3.7.2)

Die analitiese oplossing word aan die einde van paragraaf 4.4 gegee as

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n t} \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sum_{n=1}^{\infty} [\text{Res}(I(\beta_n)) + \text{Res}(I(\alpha))]_{\sigma=-1} \quad (5.1)$$

$$b_n = \frac{2(\alpha^2 + \lambda_n) \left[ \frac{1}{\alpha} w_1(1,0) \sin \sqrt{\lambda_n} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} (1 - \cos \sqrt{\lambda_n}) \right]}{\alpha^2 + \lambda_n + \alpha}$$

$$\text{Res}[I(\beta_n)] = \frac{2\beta_n e^{-\beta_n^2 t} \sin \beta_n x [G(-\beta_n^2) + w_2(1,0)]}{(\alpha^2 + \alpha + \beta_n^2) \cos \beta_n}$$

$$\text{Res}[I(\sigma)]_{\sigma=-1} = \frac{\beta e^{-t} \sin x}{\alpha \cos 1 - \sin 1}$$

Die eerste reeks in (5.1) bevat die terme

$$w_1(1,0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\alpha^2 + \lambda_n) \sin \sqrt{\lambda_n} x}{\alpha(\alpha^2 + \lambda_n + \alpha)} e^{-\lambda_n t} \sin \sqrt{\lambda_n} x \quad (5.2)$$

Die tweede reeks in (5.1) bevat die terme

$$w_2(1,0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta_n e^{-\beta_n^2 t} \sin \beta_n x}{(\alpha^2 + \alpha + \beta_n^2) \cos \beta_n} \quad (5.3)$$

Deur gebruik te maak van  $\lambda_n = \beta_n^2$  en die eiewaardeverband

$$\sqrt{\lambda_n} \tan \sqrt{\lambda_n} = \alpha$$

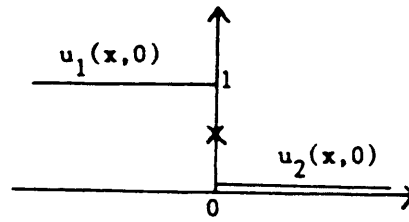
kan maklik aangetoon word dat die twee reekse in (5.2) en (5.3) identies is.

Die uitdrukking vir  $u(x,t)$  in (5.1) bevat dus 'n term

$$[w_1(1,0) + w_2(1,0)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta_n e^{-\beta_n^2 t} \sin \beta_n x}{(\alpha^2 + \alpha + \beta_n^2) \cos \beta_n}$$

Hierin is  $w_1(1,0) + w_2(1,0) = u(1,0)$

In die moederprobleem was die begintoestand soos aangedui in die grafiek hier langsaan.



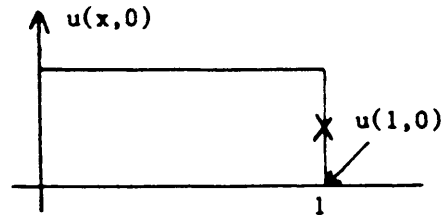
Volgens 'n konvergensie stelling vir Fourier-reekse [Haberman, 1983, bladsy 75]

sal die reekse vir die moederprobleem konvergeer na  $\frac{1}{2}$  by die diskontinuiteit.

Om te verseker dat die dinamiese randvoorwaardeprobleem dieselfde gedrag toon, postuleer ons

$u(1,0) = 0$ . Hierdie postulaat

word ondersteun deur die numeriese resultate.



Die grafiek van die oplossing is op bladsy 106

Beskou die Dinamiese randvoorwaarde

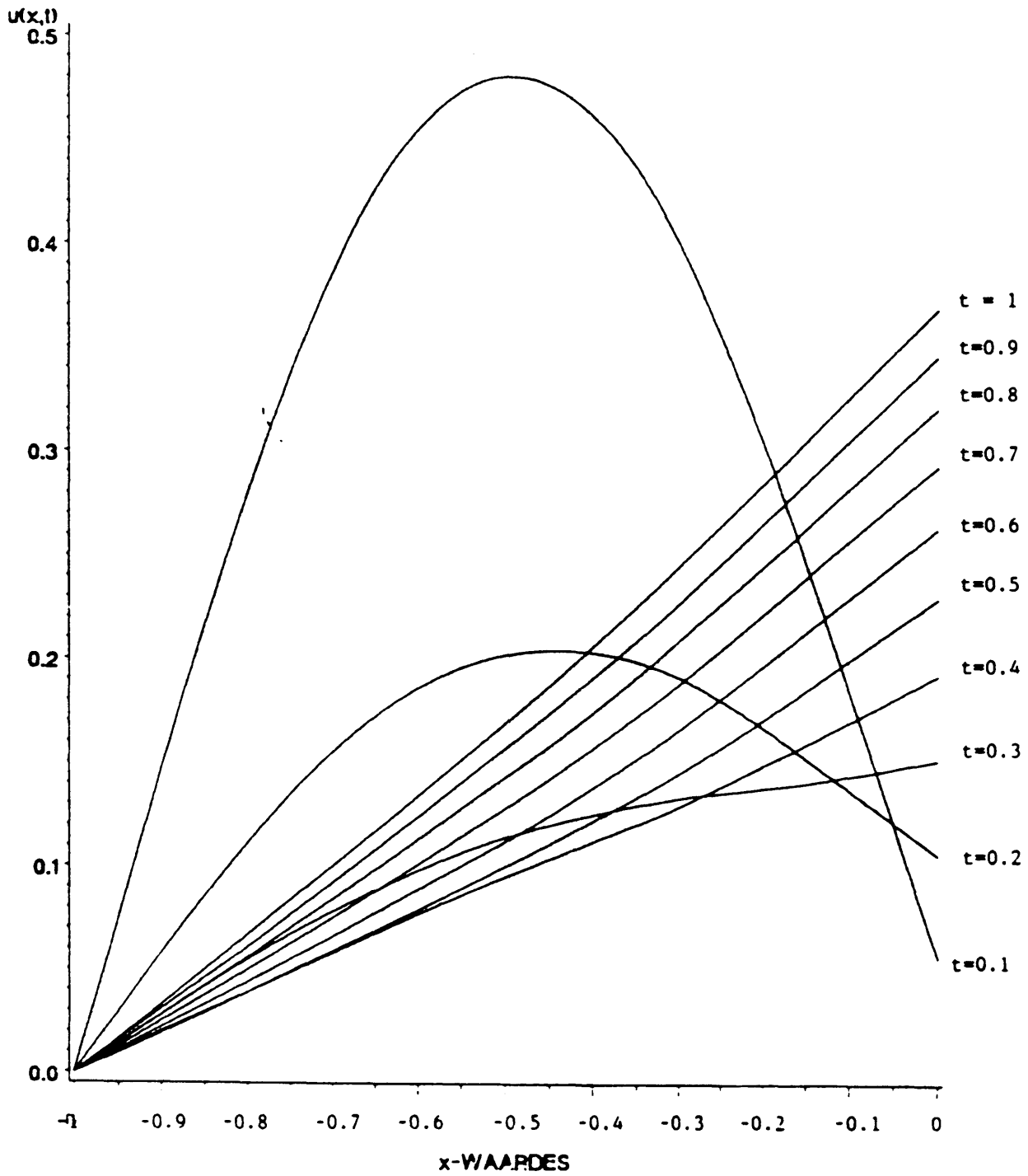
$$\frac{\partial u}{\partial t}(1,t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \beta e^{-t}$$

As  $t=0$  is  $\beta e^{-t} = \beta$

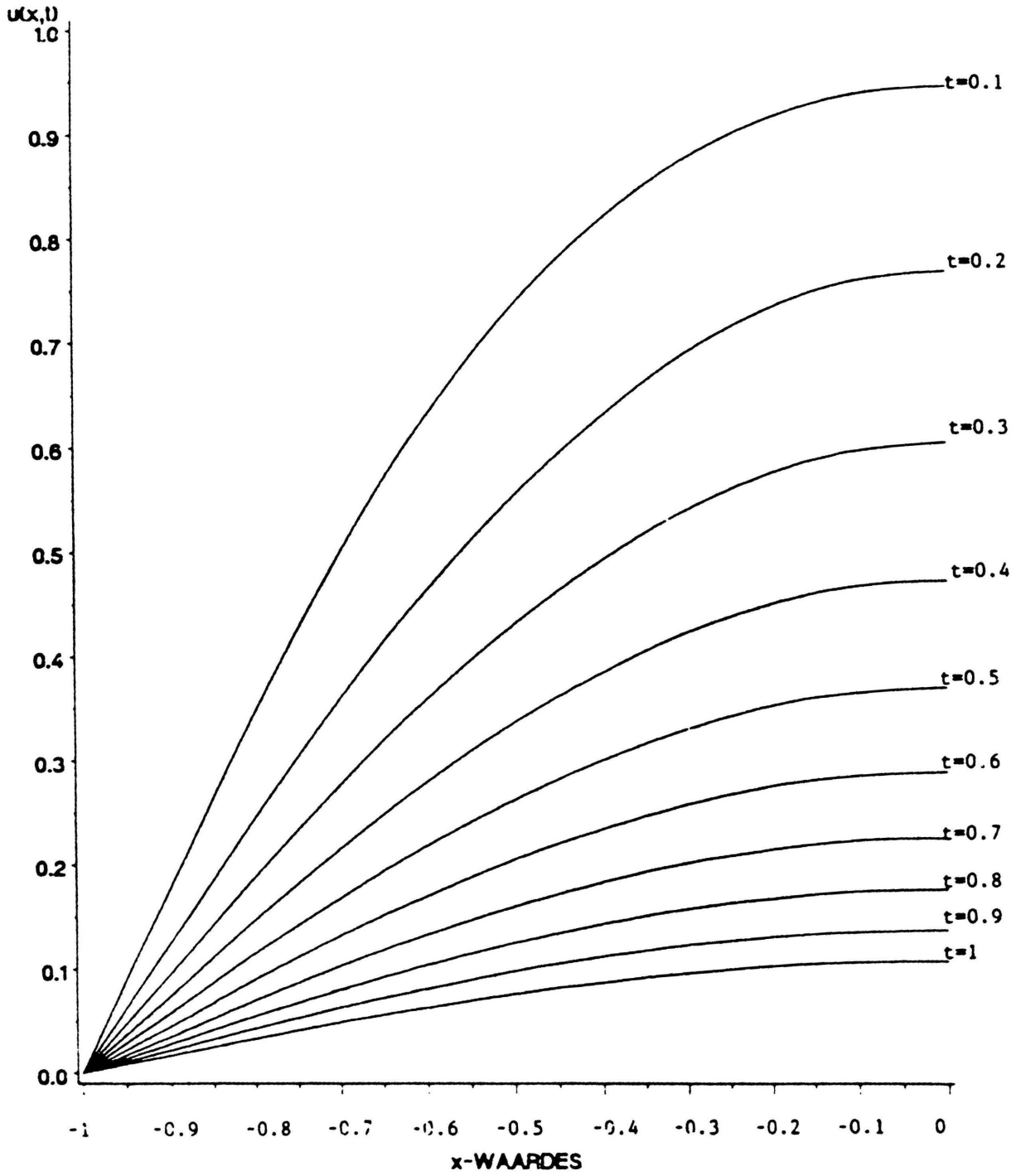
As  $t=\infty$  is  $\beta e^{-t} = 0$

Die verwagting is dus dat die invloed van die bronterm uiteindelik 'n temperatuurdaling tot gevolg sal hê wat inderdaad die geval is soos blyk uit die grafieke.

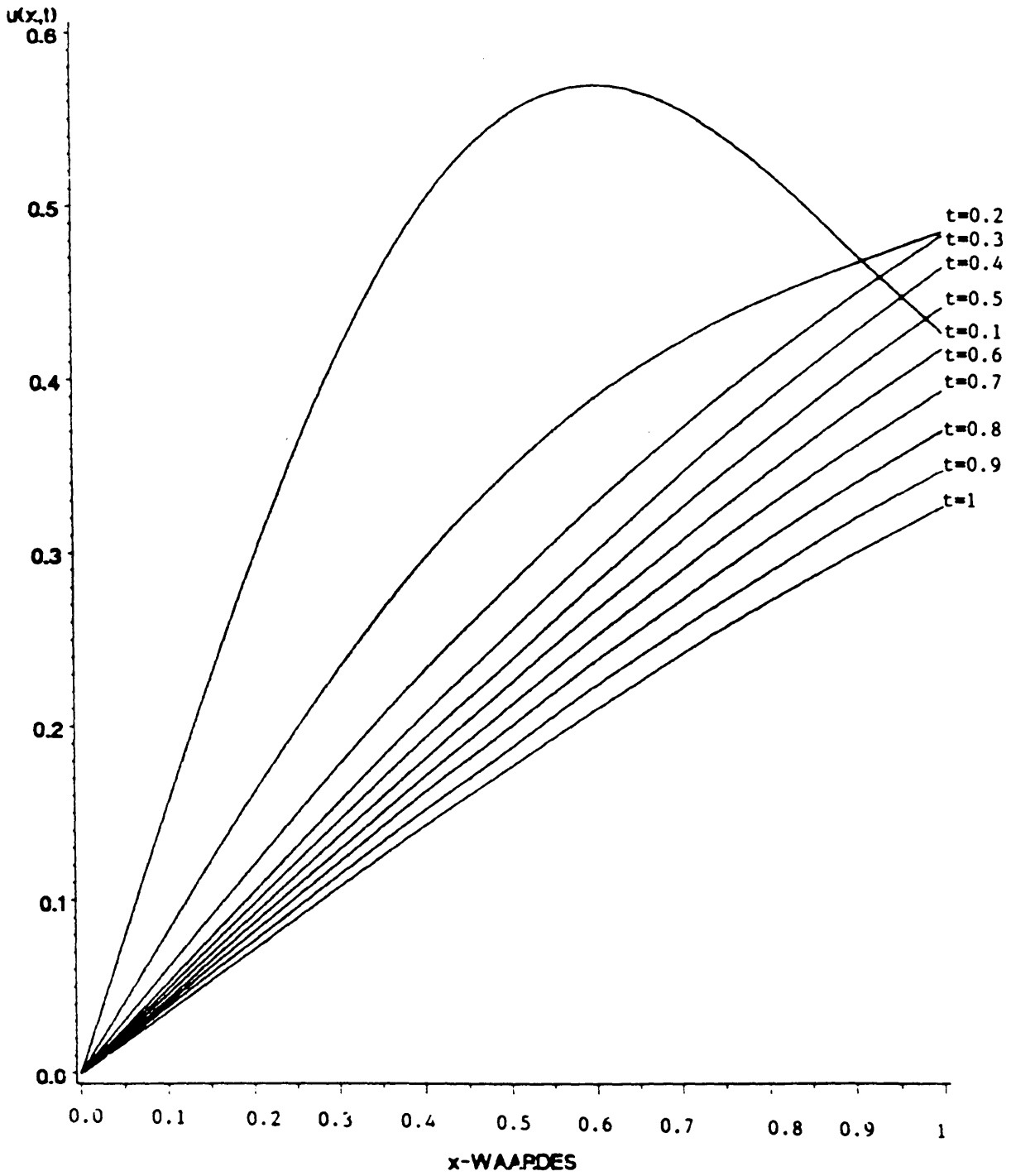
# DIRICHLET



# NEUMANN



# DYNAMICS



#### 5.4 DIE MOEDERPROBLEEM

Die getransformeerde probleem is, volgens paragraaf 4.5

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= 0 & \frac{\partial u_2}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} &= \beta e^{-t} & \alpha^2 &= \frac{K_2 c_1 \rho_1}{K_1 c_2 \rho_2} \\
 u_1(x, 0) &= 1 & u_2(x, 0) &= 0 \\
 u_1(-l, t) &= 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x}(\ell, t) &= 0 & \beta &= \frac{c_1 \rho_1 a^2}{c_2 \rho_2 K_1} \\
 & & & & \ell &= \frac{L}{a} \\
 u_1(0, t) &= u_2(0, t) \\
 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) &= \gamma \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) & \gamma &= \frac{K_2}{K_1}
 \end{aligned}$$

met analitiese oplossing

$$u_1(x, t) = \sum_n \text{Res}[U_1(x, s) e^{st}]_{s=\sigma_n} + 1$$

gegee in paragraaf 4.5.2 waar  $\sigma_n$  die pole is van  $U_1(x, s)$  met

$$\begin{aligned}
 U_1(x, s) &= A \cosh \sqrt{s} x + B \sinh \sqrt{s} x \\
 &= A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3
 \end{aligned}$$

Die uitdrukkings vir  $A_1$  tot  $A_3$  en  $B_1$  tot  $B_3$  word gegee deur vergelykings (4.32) tot (4.37).

Die doel met die moederprobleem is om die volgende te bepaal:

- a) As  $K_2 \rightarrow \infty$  en  $L_2 \rightarrow \infty$  (met ander woorde die tweede staaf is termies massief) in die moederprobleem, sal die oplossing ooreenstem met die oplossing van die Dirichlet-randvoorwaarde-probleem?
- b) As  $K_2 \rightarrow 0$  in die moederprobleem (met ander woorde die tweede staaf is 'n isolator), sal die oplossing ooreenstem met die oplossing van die Neumann-randvoorwaarde-probleem?
- c) As  $K_2 \rightarrow \infty$  in die moederprobleem (met ander woorde die tweede staaf is 'n supergeleier), sal die oplossing ooreenstem met die oplossing van die Dinamiese-randvoorwaarde-probleem?

Parameters is geleidelik groter en kleiner gemaak (afhangende van wat getoets is volgens a), b) en c) hierbo) en die resultate word saamgevat in hoofstuk 6.

## HOOFSTUK 6

### LIMIETGEVALLE VAN DIE OPLOSSING VAN DIE MOEDERPROBLEEM

Soos reeds gemeld in hoofstuk 5 word die parameters  $K_2$  en  $L$  vergroot of verklein en die gedrag van die oplossing ondersoek.

#### 6.1 $K_2 \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty$

Die tweede staaf word termies massief gemaak.

Die volgende waardes vir  $K_2$  en  $L$  is gebruik

| $K_2$      | $L$ |
|------------|-----|
| 200/4.184  | 20  |
| 500/4.184  | 50  |
| 1000/4.184 | 100 |
| 3000/4.184 | 200 |

Die oplossings in tabelvorm vir elke geval is op bladsy 110. Die twee grafieke op bladsye 111 en 112 toon die oplossings, tesame met die oplossing van die Dirichlet-randvoorwaarde-probleem, vir tye  $t=0.5$  en  $t=1$ . Dit is duidelik dat vir groot  $K_2$  en  $L$  die oplossing die van die Dirichlet-randvoorwaardeprobleem benader.

OPLOSSINGS VAN DIE MOEDERPROBLEEM VIR STYGENDE  $K_2$  EN L

$K_2 = 200/4,184 \quad L = 20$

| X → |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| T   | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| +   | 0.000 | 0.153 | 0.294 | 0.410 | 0.495 | 0.541 | 0.548 | 0.517 | 0.455 | 0.370 | 0.273 |
|     | 0.000 | 0.074 | 0.143 | 0.204 | 0.252 | 0.287 | 0.306 | 0.311 | 0.304 | 0.288 | 0.267 |
|     | 0.000 | 0.044 | 0.087 | 0.126 | 0.161 | 0.190 | 0.214 | 0.232 | 0.246 | 0.256 | 0.265 |
|     | 0.000 | 0.033 | 0.066 | 0.097 | 0.127 | 0.154 | 0.180 | 0.204 | 0.226 | 0.248 | 0.269 |
|     | 0.000 | 0.029 | 0.058 | 0.087 | 0.115 | 0.143 | 0.170 | 0.197 | 0.223 | 0.250 | 0.278 |
|     | 0.000 | 0.028 | 0.057 | 0.085 | 0.113 | 0.141 | 0.170 | 0.199 | 0.228 | 0.258 | 0.288 |
|     | 0.000 | 0.029 | 0.057 | 0.086 | 0.115 | 0.144 | 0.174 | 0.204 | 0.235 | 0.267 | 0.300 |
|     | 0.000 | 0.029 | 0.059 | 0.089 | 0.119 | 0.149 | 0.180 | 0.211 | 0.244 | 0.277 | 0.311 |
|     | 0.000 | 0.030 | 0.061 | 0.092 | 0.123 | 0.154 | 0.186 | 0.219 | 0.252 | 0.286 | 0.321 |
|     | 0.000 | 0.031 | 0.063 | 0.095 | 0.127 | 0.159 | 0.192 | 0.226 | 0.260 | 0.295 | 0.331 |

$K_2 = 500/4,184 \quad L = 50$

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.000 | 0.151 | 0.289 | 0.403 | 0.482 | 0.522 | 0.521 | 0.482 | 0.409 | 0.314 | 0.207 | 0.207 |
| 0.000 | 0.069 | 0.133 | 0.189 | 0.232 | 0.261 | 0.275 | 0.275 | 0.262 | 0.242 | 0.218 | 0.218 |
| 0.000 | 0.039 | 0.077 | 0.112 | 0.142 | 0.167 | 0.187 | 0.202 | 0.213 | 0.222 | 0.230 | 0.230 |
| 0.000 | 0.029 | 0.058 | 0.085 | 0.111 | 0.136 | 0.159 | 0.181 | 0.203 | 0.224 | 0.246 | 0.246 |
| 0.000 | 0.026 | 0.052 | 0.078 | 0.104 | 0.130 | 0.156 | 0.181 | 0.208 | 0.235 | 0.264 | 0.264 |
| 0.000 | 0.026 | 0.053 | 0.079 | 0.106 | 0.133 | 0.161 | 0.189 | 0.219 | 0.250 | 0.282 | 0.282 |
| 0.000 | 0.027 | 0.055 | 0.083 | 0.111 | 0.140 | 0.170 | 0.200 | 0.232 | 0.265 | 0.300 | 0.300 |
| 0.000 | 0.029 | 0.058 | 0.087 | 0.117 | 0.148 | 0.179 | 0.212 | 0.245 | 0.280 | 0.316 | 0.316 |
| 0.000 | 0.031 | 0.061 | 0.092 | 0.124 | 0.156 | 0.189 | 0.223 | 0.257 | 0.293 | 0.331 | 0.331 |
| 0.000 | 0.032 | 0.064 | 0.097 | 0.130 | 0.163 | 0.198 | 0.233 | 0.269 | 0.306 | 0.344 | 0.344 |

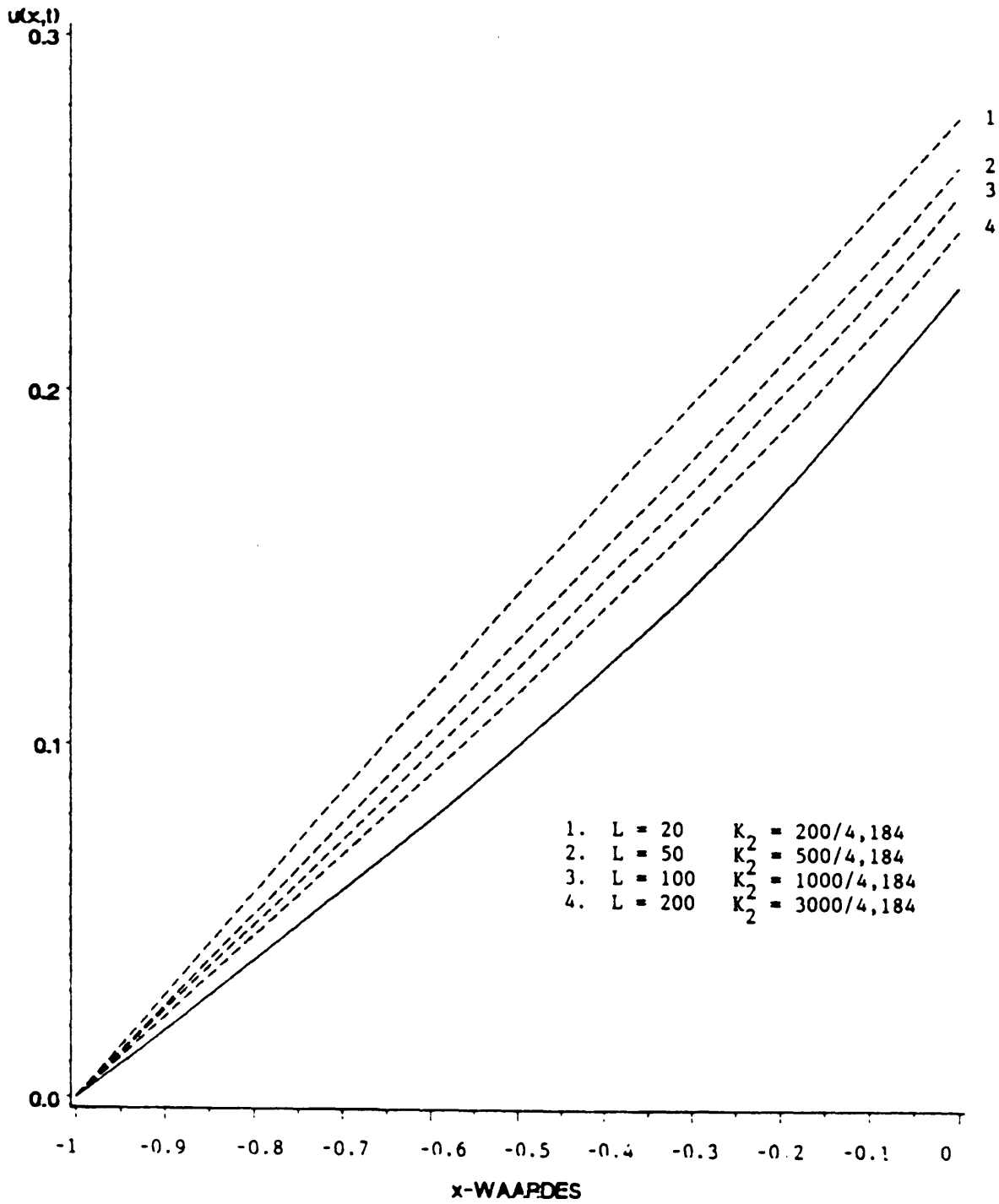
$K_2 = 1000/4,184 \quad L = 100$

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.000 | 0.151 | 0.286 | 0.397 | 0.473 | 0.510 | 0.505 | 0.461 | 0.384 | 0.284 | 0.172 | 0.172 |
| 0.000 | 0.067 | 0.128 | 0.181 | 0.221 | 0.246 | 0.257 | 0.254 | 0.239 | 0.216 | 0.190 | 0.190 |
| 0.000 | 0.037 | 0.072 | 0.104 | 0.131 | 0.154 | 0.171 | 0.185 | 0.194 | 0.202 | 0.210 | 0.210 |
| 0.000 | 0.027 | 0.053 | 0.079 | 0.103 | 0.126 | 0.147 | 0.168 | 0.189 | 0.210 | 0.233 | 0.233 |
| 0.000 | 0.025 | 0.049 | 0.073 | 0.098 | 0.122 | 0.147 | 0.172 | 0.199 | 0.226 | 0.256 | 0.256 |
| 0.000 | 0.025 | 0.050 | 0.076 | 0.102 | 0.128 | 0.156 | 0.184 | 0.214 | 0.245 | 0.278 | 0.278 |
| 0.000 | 0.027 | 0.054 | 0.081 | 0.109 | 0.137 | 0.167 | 0.198 | 0.230 | 0.263 | 0.299 | 0.299 |
| 0.000 | 0.029 | 0.057 | 0.087 | 0.116 | 0.147 | 0.179 | 0.211 | 0.245 | 0.281 | 0.318 | 0.318 |
| 0.000 | 0.031 | 0.061 | 0.092 | 0.124 | 0.157 | 0.190 | 0.224 | 0.260 | 0.297 | 0.336 | 0.336 |
| 0.000 | 0.032 | 0.065 | 0.098 | 0.131 | 0.165 | 0.200 | 0.236 | 0.273 | 0.312 | 0.352 | 0.352 |

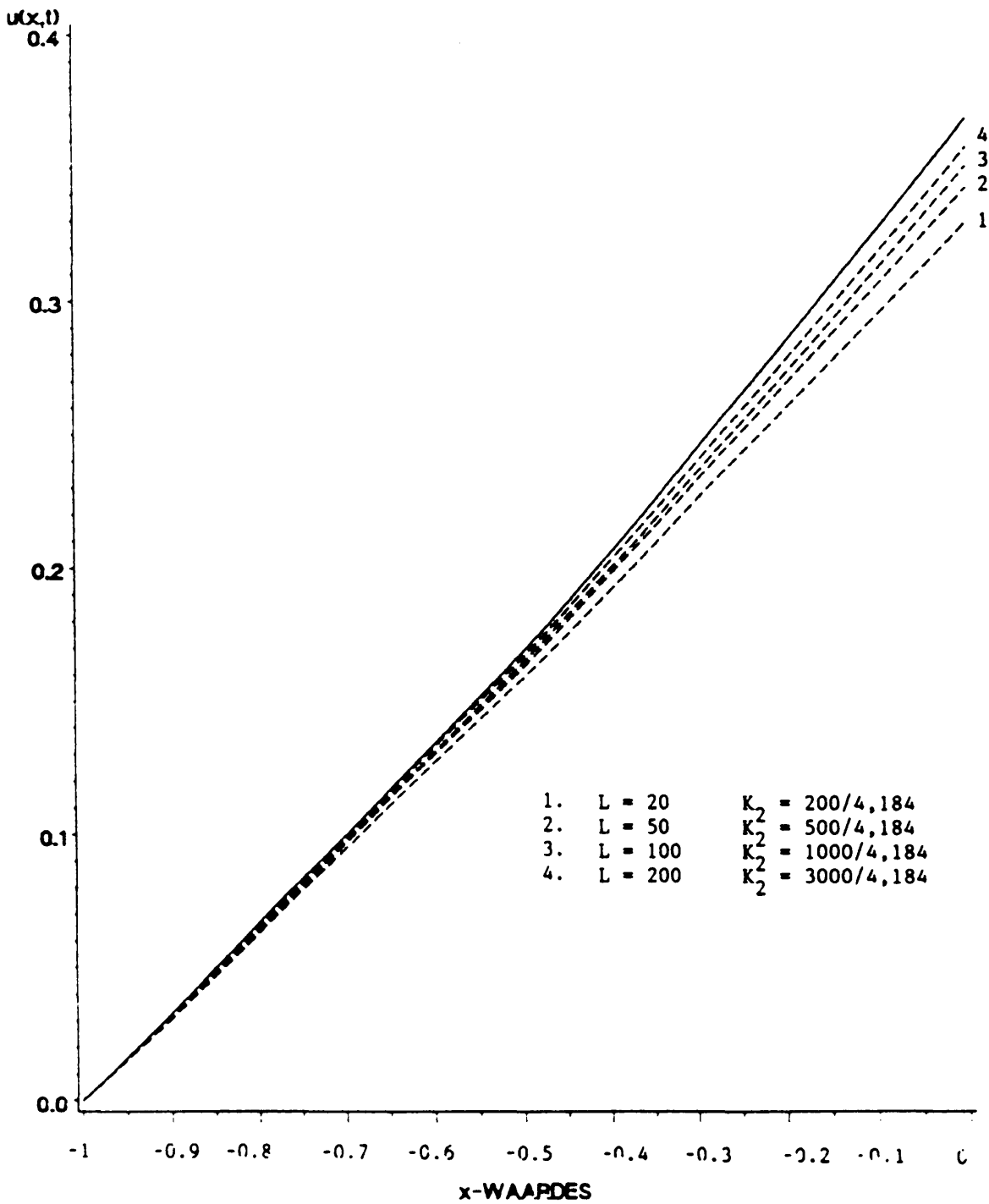
$K_2 = 3000/4,184 \quad L = 200$

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.000 | 0.172 | 0.316 | 0.432 | 0.509 | 0.541 | 0.527 | 0.469 | 0.376 | 0.257 | 0.126 | 0.126 |
| 0.000 | 0.073 | 0.135 | 0.187 | 0.226 | 0.248 | 0.253 | 0.244 | 0.221 | 0.191 | 0.158 | 0.158 |
| 0.000 | 0.037 | 0.071 | 0.101 | 0.126 | 0.146 | 0.161 | 0.171 | 0.177 | 0.182 | 0.188 | 0.188 |
| 0.000 | 0.026 | 0.050 | 0.074 | 0.096 | 0.117 | 0.137 | 0.156 | 0.175 | 0.196 | 0.217 | 0.217 |
| 0.000 | 0.023 | 0.046 | 0.069 | 0.092 | 0.115 | 0.139 | 0.163 | 0.189 | 0.216 | 0.246 | 0.246 |
| 0.000 | 0.024 | 0.048 | 0.072 | 0.097 | 0.123 | 0.150 | 0.178 | 0.207 | 0.239 | 0.273 | 0.273 |
| 0.000 | 0.026 | 0.052 | 0.079 | 0.106 | 0.134 | 0.164 | 0.194 | 0.227 | 0.261 | 0.298 | 0.298 |
| 0.000 | 0.028 | 0.057 | 0.086 | 0.115 | 0.146 | 0.178 | 0.211 | 0.245 | 0.282 | 0.320 | 0.320 |
| 0.000 | 0.031 | 0.061 | 0.092 | 0.124 | 0.157 | 0.191 | 0.226 | 0.262 | 0.301 | 0.341 | 0.341 |
| 0.000 | 0.033 | 0.066 | 0.099 | 0.133 | 0.167 | 0.203 | 0.240 | 0.278 | 0.318 | 0.359 | 0.359 |

# DIE DIRICHLET PROBLEEM ( $t=0.5$ )



# DIE DIRICHLET PROBLEEM (t=1.0)



## 6.2 $K_2 \rightarrow 0$

Die tweede staaf word 'n isolator.

Die volgende waardes vir  $K_2$  is gebruik:

| <u><math>K_2</math></u> |
|-------------------------|
| 10/4.184                |
| 2/4.184                 |
| 0.2/4.184               |
| 0.02/4.184              |

Die oplossings in tabelvorm is op bladsy 114. Die twee grafieke op bladsye 115 en 116 toon hoe die oplossings vir tye  $t=0.5$  en  $t=1$ , die oplossing van die Neumann-randvoorwaardeprobleem benader.

OPLOSSINGS VAN DIE MOEDERPROBLEEM VIR DALENDE  $K_2$ 

$K_2 = 10/4,184$

X →

|   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| T | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| + | 0.000 | 0.162 | 0.313 | 0.446 | 0.552 | 0.628 | 0.671 | 0.684 | 0.670 | 0.635 | 0.585 |
|   | 0.000 | 0.097 | 0.189 | 0.274 | 0.347 | 0.408 | 0.454 | 0.485 | 0.502 | 0.505 | 0.498 |
|   | 0.000 | 0.068 | 0.133 | 0.195 | 0.251 | 0.300 | 0.341 | 0.374 | 0.398 | 0.414 | 0.423 |
|   | 0.000 | 0.052 | 0.103 | 0.152 | 0.197 | 0.238 | 0.275 | 0.306 | 0.332 | 0.353 | 0.369 |
|   | 0.000 | 0.043 | 0.085 | 0.126 | 0.164 | 0.200 | 0.233 | 0.263 | 0.289 | 0.312 | 0.331 |
|   | 0.000 | 0.037 | 0.073 | 0.109 | 0.143 | 0.175 | 0.206 | 0.234 | 0.260 | 0.283 | 0.304 |
|   | 0.000 | 0.033 | 0.066 | 0.098 | 0.129 | 0.158 | 0.187 | 0.214 | 0.239 | 0.263 | 0.285 |
|   | 0.000 | 0.030 | 0.060 | 0.090 | 0.119 | 0.147 | 0.174 | 0.200 | 0.225 | 0.248 | 0.271 |
|   | 0.000 | 0.028 | 0.056 | 0.084 | 0.112 | 0.138 | 0.164 | 0.190 | 0.214 | 0.238 | 0.260 |
|   | 0.000 | 0.027 | 0.054 | 0.080 | 0.107 | 0.132 | 0.158 | 0.182 | 0.206 | 0.230 | 0.252 |

$K_2 = 2/4,184$

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.000 | 0.152 | 0.297 | 0.431 | 0.548 | 0.644 | 0.717 | 0.766 | 0.791 | 0.793 | 0.774 |
| 0.000 | 0.106 | 0.208 | 0.304 | 0.391 | 0.465 | 0.526 | 0.572 | 0.602 | 0.618 | 0.618 |
| 0.000 | 0.079 | 0.156 | 0.228 | 0.295 | 0.354 | 0.404 | 0.444 | 0.474 | 0.493 | 0.502 |
| 0.000 | 0.061 | 0.121 | 0.179 | 0.232 | 0.279 | 0.321 | 0.356 | 0.383 | 0.403 | 0.415 |
| 0.000 | 0.049 | 0.098 | 0.144 | 0.187 | 0.227 | 0.262 | 0.293 | 0.318 | 0.337 | 0.351 |
| 0.000 | 0.041 | 0.081 | 0.119 | 0.155 | 0.189 | 0.219 | 0.246 | 0.269 | 0.287 | 0.302 |
| 0.000 | 0.034 | 0.068 | 0.101 | 0.132 | 0.161 | 0.187 | 0.211 | 0.232 | 0.250 | 0.264 |
| 0.000 | 0.030 | 0.059 | 0.087 | 0.114 | 0.139 | 0.163 | 0.185 | 0.204 | 0.221 | 0.235 |
| 0.000 | 0.026 | 0.051 | 0.076 | 0.100 | 0.123 | 0.144 | 0.164 | 0.182 | 0.198 | 0.212 |
| 0.000 | 0.023 | 0.046 | 0.068 | 0.090 | 0.110 | 0.130 | 0.148 | 0.165 | 0.180 | 0.193 |

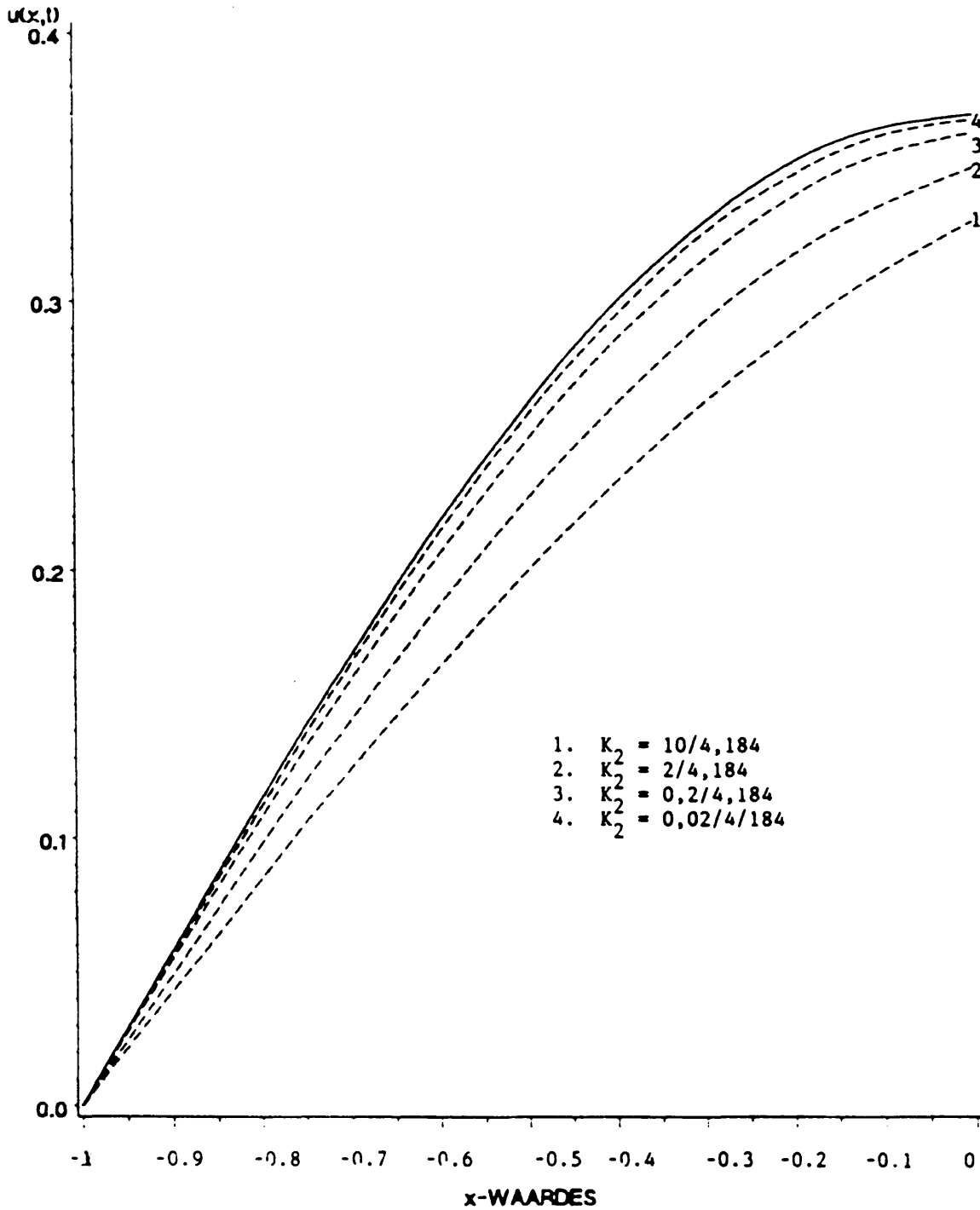
$K_2 = 0,2/4,184$

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.000 | 0.153 | 0.301 | 0.441 | 0.568 | 0.678 | 0.770 | 0.840 | 0.887 | 0.912 | 0.913 |
| 0.000 | 0.115 | 0.228 | 0.334 | 0.431 | 0.517 | 0.589 | 0.647 | 0.687 | 0.711 | 0.717 |
| 0.000 | 0.089 | 0.175 | 0.258 | 0.333 | 0.401 | 0.458 | 0.504 | 0.538 | 0.560 | 0.568 |
| 0.000 | 0.069 | 0.137 | 0.201 | 0.261 | 0.314 | 0.360 | 0.398 | 0.426 | 0.444 | 0.453 |
| 0.000 | 0.055 | 0.108 | 0.159 | 0.206 | 0.249 | 0.286 | 0.316 | 0.340 | 0.356 | 0.364 |
| 0.000 | 0.044 | 0.086 | 0.127 | 0.165 | 0.199 | 0.229 | 0.254 | 0.274 | 0.288 | 0.295 |
| 0.000 | 0.035 | 0.069 | 0.102 | 0.133 | 0.161 | 0.185 | 0.206 | 0.223 | 0.235 | 0.242 |
| 0.000 | 0.028 | 0.056 | 0.083 | 0.108 | 0.131 | 0.151 | 0.169 | 0.183 | 0.193 | 0.200 |
| 0.000 | 0.023 | 0.046 | 0.068 | 0.089 | 0.108 | 0.125 | 0.140 | 0.152 | 0.161 | 0.168 |
| 0.000 | 0.019 | 0.038 | 0.057 | 0.074 | 0.090 | 0.104 | 0.117 | 0.127 | 0.136 | 0.142 |

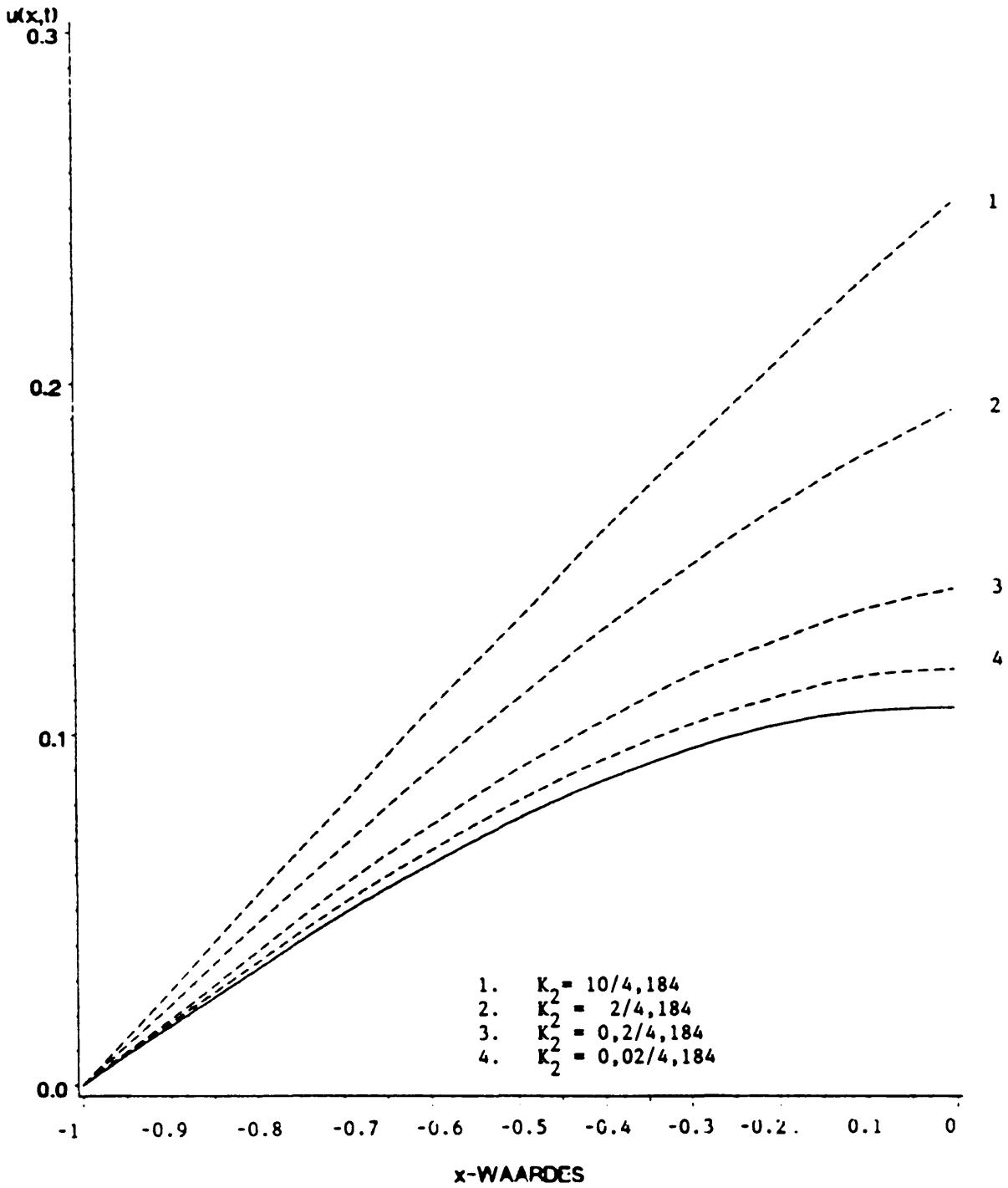
$K_2 = 0,02/4,184$

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.000 | 0.175 | 0.341 | 0.491 | 0.621 | 0.726 | 0.807 | 0.865 | 0.902 | 0.921 | 0.924 |
| 0.000 | 0.122 | 0.240 | 0.351 | 0.453 | 0.542 | 0.617 | 0.676 | 0.719 | 0.744 | 0.752 |
| 0.000 | 0.093 | 0.184 | 0.270 | 0.350 | 0.420 | 0.480 | 0.529 | 0.564 | 0.586 | 0.593 |
| 0.000 | 0.073 | 0.143 | 0.211 | 0.273 | 0.328 | 0.376 | 0.414 | 0.443 | 0.460 | 0.467 |
| 0.000 | 0.057 | 0.112 | 0.165 | 0.214 | 0.258 | 0.295 | 0.326 | 0.348 | 0.363 | 0.369 |
| 0.000 | 0.045 | 0.088 | 0.130 | 0.168 | 0.203 | 0.233 | 0.257 | 0.275 | 0.287 | 0.292 |
| 0.000 | 0.035 | 0.070 | 0.103 | 0.133 | 0.160 | 0.184 | 0.203 | 0.218 | 0.227 | 0.232 |
| 0.000 | 0.028 | 0.055 | 0.081 | 0.105 | 0.127 | 0.146 | 0.161 | 0.173 | 0.181 | 0.185 |
| 0.000 | 0.022 | 0.044 | 0.065 | 0.084 | 0.101 | 0.116 | 0.129 | 0.138 | 0.145 | 0.148 |
| 0.000 | 0.018 | 0.035 | 0.052 | 0.067 | 0.081 | 0.093 | 0.103 | 0.111 | 0.117 | 0.119 |

# DIE NEUMANN PROBLEEM ( $t=0.5$ )



# DIE NEUMANN PROBLEEM ( $\tau=1.0$ )



6.3  $K_2 \rightarrow \infty$

Die tweede staaf word 'n supergeleier.

Die volgende waardes is vir  $K_2$  gebruik:

| <u><math>K_2</math></u> |
|-------------------------|
| 2/4.184                 |
| 5/4.184                 |
| 10/4.184                |
| 100/4.184               |

Die oplossings in tabelvorm is op bladsy 118. Die twee grafieke op bladsye 119 en 120 toon hoe hierdie oplossings, vir tye  $t=0.5$  en  $t=1$ , die oplossings van die Dinamiese-randvoorwaarde-probleem benader.

OPLOSSING VAN DIE MOEDERPROBLEEM VIR STYGENDE  $K_2$ 

$K_2 = 2/4,184$

X →

|   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| T | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| ↓ | 0.000 | 0.159 | 0.311 | 0.448 | 0.566 | 0.660 | 0.728 | 0.770 | 0.786 | 0.781 | 0.757 |
|   | 0.000 | 0.107 | 0.211 | 0.307 | 0.394 | 0.468 | 0.528 | 0.572 | 0.601 | 0.616 | 0.615 |
|   | 0.000 | 0.079 | 0.156 | 0.229 | 0.295 | 0.354 | 0.404 | 0.444 | 0.474 | 0.493 | 0.501 |
|   | 0.000 | 0.061 | 0.121 | 0.179 | 0.232 | 0.280 | 0.321 | 0.356 | 0.383 | 0.403 | 0.415 |
|   | 0.000 | 0.049 | 0.098 | 0.144 | 0.187 | 0.227 | 0.262 | 0.293 | 0.318 | 0.337 | 0.351 |
|   | 0.000 | 0.041 | 0.081 | 0.119 | 0.155 | 0.189 | 0.219 | 0.246 | 0.269 | 0.287 | 0.302 |
|   | 0.000 | 0.034 | 0.068 | 0.101 | 0.132 | 0.161 | 0.188 | 0.211 | 0.232 | 0.250 | 0.264 |
|   | 0.000 | 0.030 | 0.059 | 0.087 | 0.114 | 0.140 | 0.163 | 0.185 | 0.204 | 0.221 | 0.236 |
|   | 0.000 | 0.026 | 0.052 | 0.076 | 0.101 | 0.123 | 0.145 | 0.165 | 0.183 | 0.199 | 0.213 |
|   | 0.000 | 0.023 | 0.046 | 0.068 | 0.090 | 0.111 | 0.130 | 0.149 | 0.166 | 0.181 | 0.195 |

$K_2 = 5/4,184$

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.000 | 0.167 | 0.323 | 0.460 | 0.571 | 0.651 | 0.700 | 0.720 | 0.715 | 0.690 | 0.652 |       |
| 0.000 | 0.102 | 0.200 | 0.290 | 0.370 | 0.437 | 0.488 | 0.525 | 0.547 | 0.555 | 0.551 |       |
| 0.000 | 0.073 | 0.144 | 0.211 | 0.272 | 0.325 | 0.371 | 0.407 | 0.434 | 0.451 | 0.460 |       |
| 0.000 | 0.056 | 0.112 | 0.164 | 0.213 | 0.258 | 0.297 | 0.331 | 0.358 | 0.379 | 0.394 |       |
| 0.000 | 0.046 | 0.091 | 0.135 | 0.176 | 0.214 | 0.249 | 0.280 | 0.306 | 0.329 | 0.347 |       |
| 0.000 | 0.039 | 0.078 | 0.115 | 0.151 | 0.185 | 0.216 | 0.245 | 0.271 | 0.293 | 0.313 |       |
| 0.000 | 0.034 | 0.068 | 0.102 | 0.134 | 0.164 | 0.193 | 0.220 | 0.245 | 0.268 | 0.289 |       |
| 0.000 | 0.031 | 0.062 | 0.092 | 0.121 | 0.150 | 0.177 | 0.202 | 0.227 | 0.249 | 0.270 |       |
| 0.000 | 0.029 | 0.057 | 0.085 | 0.112 | 0.139 | 0.164 | 0.189 | 0.212 | 0.234 | 0.255 |       |
| 0.000 | 0.027 | 0.053 | 0.079 | 0.105 | 0.130 | 0.155 | 0.178 | 0.201 | 0.222 | 0.242 |       |

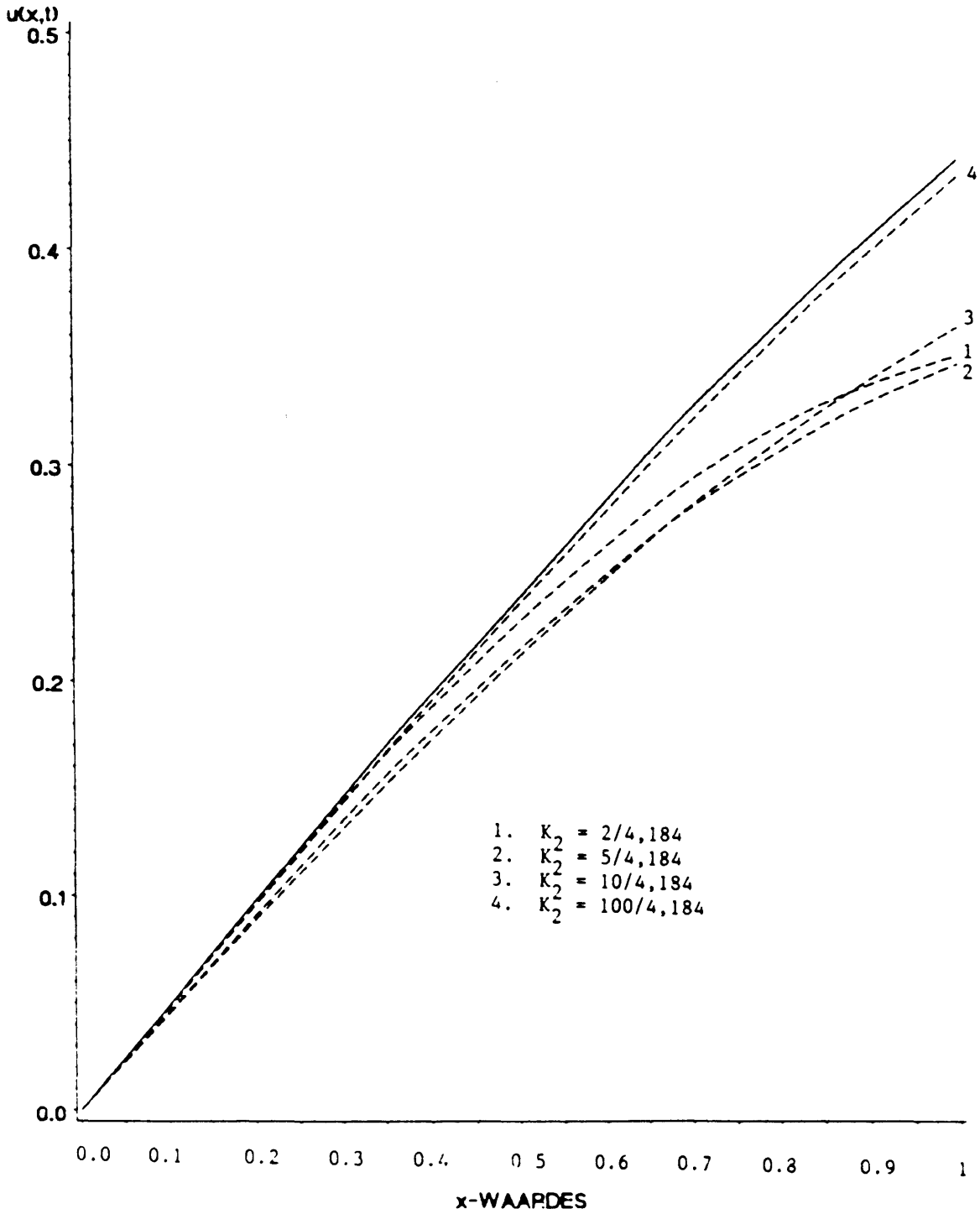
$K_2 = 10/4,184$

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.000 | 0.164 | 0.318 | 0.451 | 0.557 | 0.631 | 0.672 | 0.682 | 0.666 | 0.629 | 0.580 |       |
| 0.000 | 0.097 | 0.189 | 0.274 | 0.348 | 0.408 | 0.454 | 0.486 | 0.503 | 0.507 | 0.501 |       |
| 0.000 | 0.068 | 0.134 | 0.196 | 0.252 | 0.302 | 0.344 | 0.378 | 0.405 | 0.424 | 0.436 |       |
| 0.000 | 0.053 | 0.105 | 0.155 | 0.201 | 0.244 | 0.283 | 0.317 | 0.347 | 0.372 | 0.393 |       |
| 0.000 | 0.045 | 0.089 | 0.131 | 0.172 | 0.211 | 0.247 | 0.281 | 0.311 | 0.339 | 0.364 |       |
| 0.000 | 0.040 | 0.079 | 0.117 | 0.155 | 0.190 | 0.225 | 0.257 | 0.288 | 0.316 | 0.343 |       |
| 0.000 | 0.036 | 0.072 | 0.108 | 0.143 | 0.177 | 0.209 | 0.240 | 0.270 | 0.298 | 0.325 |       |
| 0.000 | 0.034 | 0.068 | 0.101 | 0.134 | 0.166 | 0.197 | 0.227 | 0.256 | 0.284 | 0.310 |       |
| 0.000 | 0.032 | 0.064 | 0.096 | 0.127 | 0.157 | 0.187 | 0.216 | 0.244 | 0.270 | 0.295 |       |
| 0.000 | 0.031 | 0.061 | 0.091 | 0.121 | 0.150 | 0.178 | 0.206 | 0.232 | 0.257 | 0.282 |       |

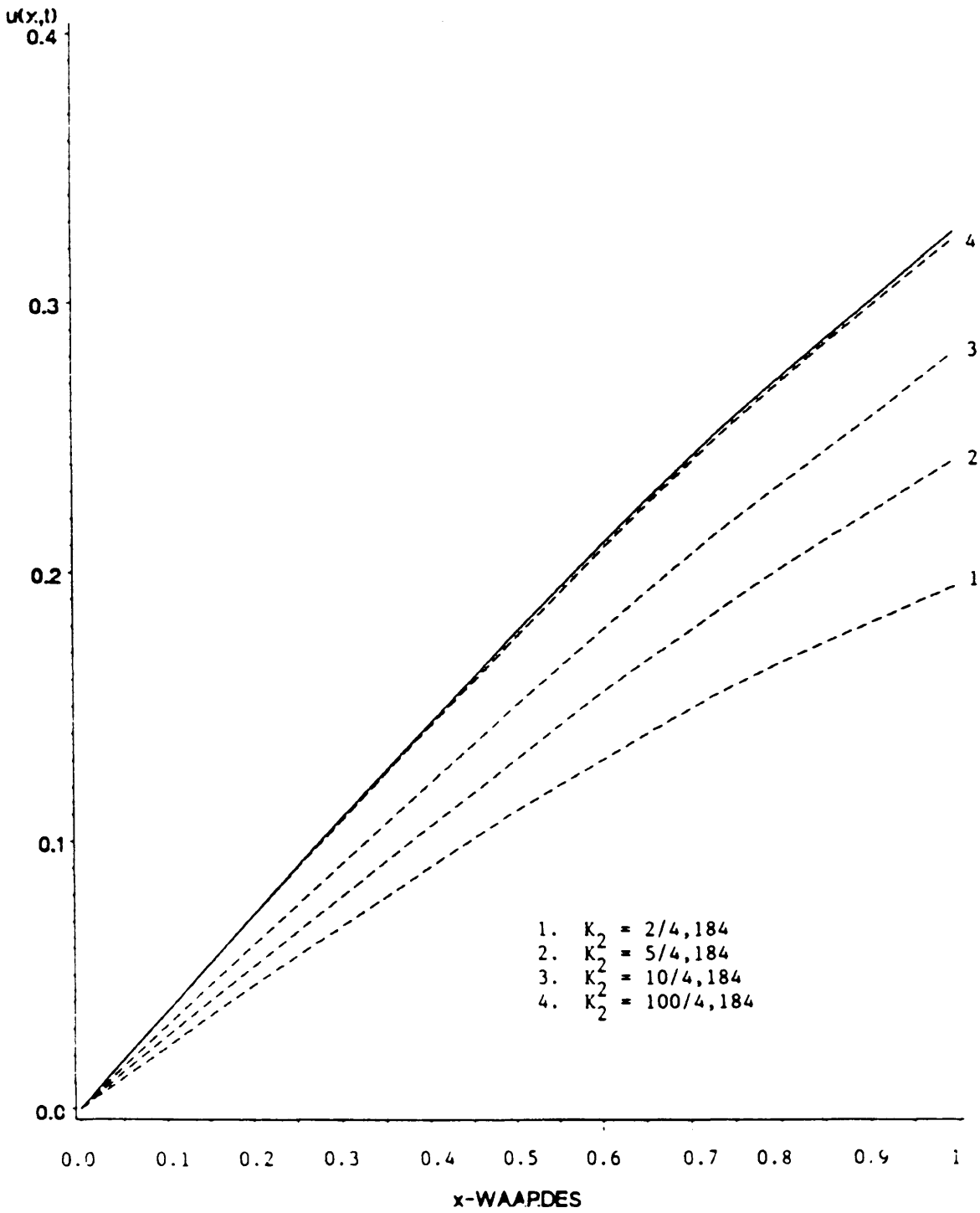
$K_2 = 100/4,184$

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.000 | 0.157 | 0.302 | 0.424 | 0.515 | 0.570 | 0.590 | 0.577 | 0.540 | 0.489 | 0.434 |       |
| 0.000 | 0.085 | 0.165 | 0.239 | 0.303 | 0.355 | 0.396 | 0.426 | 0.448 | 0.464 | 0.477 |       |
| 0.000 | 0.061 | 0.121 | 0.178 | 0.232 | 0.282 | 0.328 | 0.369 | 0.407 | 0.441 | 0.474 |       |
| 0.000 | 0.052 | 0.104 | 0.155 | 0.205 | 0.252 | 0.297 | 0.340 | 0.381 | 0.420 | 0.456 |       |
| 0.000 | 0.048 | 0.096 | 0.143 | 0.190 | 0.235 | 0.278 | 0.320 | 0.360 | 0.398 | 0.434 |       |
| 0.000 | 0.045 | 0.090 | 0.135 | 0.179 | 0.221 | 0.263 | 0.303 | 0.341 | 0.377 | 0.412 |       |
| 0.000 | 0.043 | 0.085 | 0.127 | 0.169 | 0.209 | 0.248 | 0.286 | 0.322 | 0.357 | 0.389 |       |
| 0.000 | 0.040 | 0.081 | 0.120 | 0.159 | 0.198 | 0.235 | 0.270 | 0.304 | 0.337 | 0.367 |       |
| 0.000 | 0.038 | 0.076 | 0.114 | 0.150 | 0.186 | 0.221 | 0.255 | 0.287 | 0.317 | 0.345 |       |
| 0.000 | 0.036 | 0.072 | 0.107 | 0.142 | 0.175 | 0.208 | 0.240 | 0.270 | 0.298 | 0.324 |       |

# DIE DINAMIESE RANDVOORWAARDE PROBLEEM ( $t=0.5$ )



# DIE DINAMIESE RANDVOORWAARDE PROBLEEM ( $t=10$ )



HOOFSTUK 7

SAMEVATTING

Hierdie hoofstuk is 'n kort samevatting van die resultate van hierdie verhandeling, asook die bespreking van enkele probleme wat tydens die navorsing ondervind is.

In hoofstuk 6 word die parameters  $K_2$  en/of  $L$  in die moederprobleem telkens vergroot of verklein en die resultaat vergelyk met die resultate van die probleme met die verskillende randvoorwaardes, soos verkry in hoofstuk 3.

Eerstens is die waardes van  $K_2$  en  $L$  geleidelik vergroot in die moederprobleem (die tweede staaf word dus termies massief). Uit die tabelle en uit die grafieke op bladsy 110 tot bladsy 112 en bladsy 126 is dit duidelik dat die oplossings die oplossing van die Dirichlet-randvoorwaardeprobleem benader.

Soortgelyk volg dat as  $K_2$  kleiner gemaak word in die moederprobleem (die tweede staaf word 'n isolator), benader die oplossings die van die Neumann-randvoorwaardeprobleem, (verwys na die tabelle en grafieke op bladsy 114 tot bladsy 116 en bladsy 129) en as  $K_2$  baie groot word (die tweede staaf word 'n supergeleier), dan benader die oplossings die van die probleem waarin die Dinamiese-randvoorwaarde geld, (vergelyk tabelle en grafieke op bladsy 118 tot bladsy 120 en bladsy 132.)

Grafieke is geteken slegs vir die gevalle waar  $t=0.5$  en  $t=1$ . Vir ander tye volg soortgelyke grafieke.

In hoofstuk 4, paragraaf 4.5, word die oplossing van die moederprobleem analities bepaal. Dit is naamlik

$$u_1(x,t) = \sum_n \text{Res}[U_1(x,s)e^{st}]_{s=\sigma_n}$$

waar  $\sigma_n$  die pole is van  $U_1(x,s)$  en

$$U_1(x,s) = A \cosh \sqrt{s}x + B \sinh \sqrt{s}x + \frac{1}{s}$$

Om die pole van  $U_1(x,s)$  te bereken, behels onder andere om die vergelyking

$$\cos \frac{\theta \ell}{\alpha} \cos \theta - \frac{\gamma}{\alpha} \sin \frac{\theta \ell}{\alpha} \sin \theta = 0, \quad \gamma = \frac{K_2}{K_1}, \quad \alpha^2 = \frac{K_2 c_1 \rho_1}{K_1 c_2 \rho_2}$$

op te los vir  $\theta$ .

(verwys na die uitdrukkings vir  $A_1$  tot  $A_4$  en  $B_1$  tot  $B_4$  in vergelykings (4.32) tot (4.37)).

Die oplossings is grafies as volg bepaal:

Herskryf die vergelyking as

$$1 - \frac{\gamma}{\alpha} \tan \frac{\theta \ell}{\alpha} \tan \theta = 0$$

of 
$$\frac{\gamma}{\alpha} \tan \frac{\theta \ell}{\alpha} = \cot \theta$$

Vir verskillende waardes van  $K_2$  en  $L$  (dit wil sê vir  $\gamma$  en  $\alpha$ ) is die grafieke van  $\frac{\gamma}{\alpha} \tan \frac{\theta \ell}{\alpha}$  en  $\cot \theta$  getrek en die sny punte eers geskat en daarna met behulp van 'n numeriese metode akkuraat bepaal.

Die rede waarom, vir die verskillende gevalle, die oplossing van die veranderde moederprobleem nie presies ooreenstem met die drie 'proper' probleme nie, is dat, in die bepaling van die  $\theta$ -waardes, afrondingsfoute ontstaan en in die bepaling van  $u_1(x,t)$  akkumuleer hierdie afrondingsfoute as gevolg van die sommasie van die residue.

Die bepaling van die  $\theta$ -waardes is 'n baie omslagtige proses, veral in die geval waar  $K_2$  baie klein gemaak word. Uit die vorm van  $\alpha$  ( $\alpha^2 = \frac{K_2 \rho_1 c_1}{K_1 \rho_2 c_2}$ ) word die uitdrukking  $\frac{\theta \ell}{\alpha}$  groter sodat die aantal sny punte van  $\frac{\gamma}{\alpha} \tan \frac{\theta \ell}{\alpha}$  en  $\cot \theta$  in 'n spesifieke interval baie toeneem. Die grafieke van  $\frac{\gamma}{\alpha} \tan \frac{\theta \ell}{\alpha}$  en  $\cot \theta$  sny op plekke baie naby aan die punte waar een van die grafieke neig na plus of minus oneindig, sodat die eerste skatting van 'n  $\theta$ -waarde uiters akkuraat gedoen moet word. Vir die gevalle waar  $K_2$  groter gemaak is, is die skatting van die sny punte baie eenvoudiger.

Die berekenings van die residue vir Probleem 4 word in die bylae na hierdie hoofstuk gevind. Die rekenaarprogramme wat gebruik is vir die bepaling van die numeriese oplossing van elke probleem vorm ook deel van die bylae.

BYLAAG A - DIE DIRICHLET-RANDVOORWAARDE PROBLEEM

```

C$JOB
C   PROBLEEM 1 - (DIRICHLET RANDVOORWAARDE) - BESKOU 'N EENDIMENSIO-
C   NALE STAAF, LENGTE A WAARIN DIE HITTEVERGELYKING GELD. BEGINTEMP-
C   ERATUUR  $U(X,0)=1$ ,  $U(-A,T)=0$ ,  $U(0,T)=EXP(-T)$ .
C
C   DIE PROBLEEM WORD GETRANSFORMEER NA DIE GEBIED  $(-1,0)$ .
C
C   DIE X-AS WORD VERDEEL IN 1/10 DELE SODAT  $X=(I-11)/10$ .
C
C   DIE T-AS WORD OOK VERDEEL IN 1/10 DELE SODAT  $T=(J-1)/10$ .
C
C   T1=W1, T2=W2, T3=V
C
C   S1 IS DIE SOM VAN DIE T1-TERME
C   S2 IS DIE SOM VAN DIE T2-TERME
C
C   W = S1+S2+S3 - DIT IS DIE FINALE WAARDES VAN DIE TEMPERATURE
C   IN DIE STAAF OP VERSKILLENDE TYDSTIPPE BY VERSKILLENDE POSISIES.
C
C
C
C
C   DIE UITDRUK VAN DIE RESULTATE LYK AS VOLG:
C
C   W(1,1)  W(2,1)  W(3,1)  .....          .....W(11,1)
C   W(1,2)  W(2,2)  W(3,2)  .....          .....W(11,2)
C   .       .       .       .               .
C   .       .       .       .               .
C   .       .       .       .               .
C   W(1,11) W(2,11) W(3,11)...          ....W(11,11)
C
1   REAL K1
2   DIMENSION T1(11,11), T2(11,11), T3(11,11), W(11,11)
3   PI = 3.1415927
4   C1 = 0.136*10**3/4.184
5   RO1 = 7.4*10**3
6   A = 1.
7   C2RO2 = 0.6*10**6/4.184
8   K1 = 0.12*10**2/4.184
9   BETA = C1*RO1*A**2/(C2RO2*K1)
10  R = C1*RO1*A**2/K1
11  DO 40 J=2,11
12  DO 30 I=2,11
13  X = (I-11.)/10.
14  T = (J-1.)/10.
15  S1=0.
16  S2=0.
C
C   AS J KLEIN IS WORD MEER TERME IN DIE SOMMASIE GEBRUIK VIR GROTER
C   AKKURAAATHEID.
C
17  N = 1
18  B=2.*(COS(N*PI)-1.)/(N*PI)
C
C   A IS DIE WAARDE VAN DIE EKSPONENT IN DIE UITDRUKKING VIR W1
C   M A W T1
C
19  A=-(N**2)*(PI**2)*T
20  D = EXP(A)

```

```

21      P = -50.
22      IF ( D .LT. EXP(P)) GO TO 10
23      T1(I,J)=B*SIN(N*PI*X)*D
24      S1=S1+T1(I,J)
25      N = N+1
26      GO TO 5
27  10  N = 1
28  15  A = -(N**2)*(PI**2)*T
29      D = EXP (A)
30      IF ( D .LT. EXP(P)) GO TO 25
31      FAKT1 = 2.*BETA/(N*PI*(N**2*PI**2-1.))
32      C = -T
33      FAKT2 = (EXP(C)-D)
34      T2(I,J)=FAKT1 * FAKT2 * SIN(N*PI*X)
35      S2=S2+T2(I,J)
36      N = N+1
37      GO TO 15
38  25  C = -T
39      T3(I,J)=BETA*(1.+X)*(1.-EXP(C))
40      S3=T3(I,J)
41      W(I,J)=S1+S2+S3
42  30  CONTINUE
43  40  CONTINUE
44      WRITE (6,50)
45  50  FORMAT('1',20X,'I=1',4X,'I=2',4X,'I=3',4X,'I=4',4X,'I=5',4X,'I=6',
14X,'I=7',4X,'I=8',4X,'I=9',4X,'I=10',3X,'I=11')
46      WRITE(6,55)
47  55  FORMAT('/0',12X,'J= 1',4X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000'
1,2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000'
1,2X,'1.000')
      C
      C
48      DO 70 J=2,11
49      WRITE (6,60) J,W(2,J),W(3,J),W(4,J),W(5,J),W(6,J),W(7,J),W(8,J),
1W(9,J),W(10,J),W(11,J)
50  60  FORMAT(' ',12X,'J=',12,4X,'0.000',1X,10(F6.3,1X))
51  70  CONTINUE
52      STOP
53      END

```

C\$ENTRY

126

|      | I=1   | I=2   | I=3   | I=4   | I=5   | I=6   | I=7   | I=8   | I=9   | I=10  | I=11  |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| J= 1 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| J= 2 | 0.000 | 0.147 | 0.280 | 0.386 | 0.455 | 0.481 | 0.462 | 0.401 | 0.305 | 0.185 | 0.056 |
| J= 3 | 0.000 | 0.058 | 0.111 | 0.155 | 0.186 | 0.202 | 0.203 | 0.191 | 0.167 | 0.137 | 0.106 |
| J= 4 | 0.000 | 0.028 | 0.055 | 0.078 | 0.098 | 0.114 | 0.125 | 0.133 | 0.138 | 0.144 | 0.152 |
| J= 5 | 0.000 | 0.020 | 0.039 | 0.058 | 0.077 | 0.095 | 0.112 | 0.129 | 0.149 | 0.170 | 0.193 |
| J= 6 | 0.000 | 0.019 | 0.039 | 0.059 | 0.079 | 0.100 | 0.122 | 0.145 | 0.171 | 0.200 | 0.230 |
| J= 7 | 0.000 | 0.022 | 0.044 | 0.066 | 0.089 | 0.112 | 0.138 | 0.166 | 0.197 | 0.230 | 0.264 |
| J= 8 | 0.000 | 0.025 | 0.050 | 0.075 | 0.101 | 0.128 | 0.157 | 0.188 | 0.222 | 0.258 | 0.294 |
| J= 9 | 0.000 | 0.028 | 0.056 | 0.084 | 0.113 | 0.143 | 0.174 | 0.209 | 0.245 | 0.283 | 0.322 |
| J=10 | 0.000 | 0.031 | 0.061 | 0.092 | 0.124 | 0.157 | 0.191 | 0.227 | 0.266 | 0.306 | 0.347 |
| J=11 | 0.000 | 0.033 | 0.067 | 0.100 | 0.134 | 0.169 | 0.206 | 0.245 | 0.285 | 0.327 | 0.370 |

## BYLAAG B - DIE NEUMANN-RANDVOORWAARDE PROBLEEM

```

C$JOB
C
C   PROBLEEM 2 - (NEUMAN RANDVOORWAARDE) - BESKOU 'N EENDIMENSIONALE
C   STAAF, LENGTE A, WAARIN DIE HITTEVERGELYKING GELD. DIE BEGIN-
C   TEMPERATUUR U(X,0)=1, EN DIE RANDVOORWAARDES IS U(-A,T)=0,
C   DU/DX(0,T)= 0
C
C   DIE PROBLEEM WORD GETRANSFORMEER NA DIE GEBIED (-1,0)
C
C   DIE X- EN T-ASSE WORD VERDEEL IN 1/10 DELE SODAT X=(I-11)/10
C   EN T=(J-1)/10
C
C   T1=W1, T2=W2, T3=V
C
C   S1 IS DIE SOM VAN DIE T1-TERME
C   S2 IS DIE SOM VAN DIE T2-TERME
C
C   W(I,J) = S1 + S2 + S3 - DIT IS DIE OPLOSSING VAN DIE HITTEVERGE-
C   LYKING MET SY BETROKKE BEGINVOORWAARDE EN RANDVOORWAARDES, MET
C   ANDER WOORDE W(I,J) IS DIE WAARDE VAN DIE TEMPERATUUR IN DIE
C   STAAF BY 'N SEKERE POSISIE OP 'N SEKERE TYDSTIP.
C
C   DIE UITDRUK VAN DIE RESULTATE LYK AS VOLG:
C
C   W(1,1)   W(2,1)   W(3,1)   ...           ...           W(11,1)
C   W(1,2)   W(2,2)   W(3,2)   ...           ...           W(11,2)
C   .         .         .         .           .           .
C   .         .         .         .           .           .
C   W(1,11)  W(2,11)  W(3,11)  ...           ...           W(11,11)
C
C
C
C
1   DIMENSION T1(11,11), T2(11,11), T3(11,11), W(11,11)
C
2   PI=3.141593
C
3   DO 40 J=2,11
C
4   DO 30 I=2,11
C
5   S1=0.
6   S2=0.
7   K=0
C
8   5   X=K+0.5
9       B=2.*SIN(X*PI)/(X*PI)
10      A=-X**2*PI**2*(J-1.)/10.
11      F=EXP(A)
12      P=-20
13      IF (F .LT. EXP(P)) GO TO 10
14      T1(I,J)=B*COS(X*PI*(I-11.)/10.)*F
15      S1=S1+T1(I,J)
16      K=K+1
17      GO TO 5
C
18  10  D=- (J-1.)/10.
C
19      K=0

```

```

C
20 15 X=K+0.5
21 C=-X**2*PI**2*(J-1.)/10.
22 G=EXP(C)
23 IF (G .LT. EXP(P)) GO TO 20
24 T2(I,J)=2.*(PI**2-1.)*COS(X*PI*(I-11.)/10.)*(EXP(D)-EXP(C))/(PI**2
1*(1.-X**2)*(X**2*PI**2-1.))
25 S2 = S2 + T2(I,J)
26 K = K+1
27 GO TO 15

C
28 20 T3(I,J)=EXP(D)*SIN(PI*(I-11.)/10.)/PI
29 S3 = T3(I,J)

C
C MAAK S2 EN S3 = 0, M.A.W AANVAAR GEEN BRON
C
30 S2=0.
31 S3=0.

C
32 W(I,J) = S1 + S2 + S3

C
33 30 CONTINUE

C
34 40 CONTINUE

C
35 WRITE(6,50)
36 50 FORMAT('1',12X,'I=1',4X,'I=2',4X,'I=3',4X,'I=4',4X,'I=5',4X,'I=6',
14X,'I=7',4X,'I=8',4X,'I=9',4X,'I=10',3X,'I=11')

C
37 WRITE(6,60)
38 60 FORMAT(/,'0',6X,'J= 1',3X,'0.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000'
1,2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000'
1,2X,'1.000')

C
39 DO 80 J=2,11
40 WRITE(6,70) J,W(2,J),W(3,J),W(4,J),W(5,J),W(6,J),W(7,J),W(8,J),W(9
1,J),W(10,J),W(11,J)
41 70 FORMAT(' ',6X,'J=',12,2X,'0.000',1X,10(F6.3,1X))
42 80 CONTINUE

C
43 STOP
44 END

C$ENTRY

```

|      | I=1   | I=2   | I=3   | I=4   | I=5   | I=6   | I=7   | I=8   | I=9   | I=10  | I=11  |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| J= 1 | 0.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| J= 2 | 0.000 | 0.177 | 0.345 | 0.498 | 0.629 | 0.736 | 0.819 | 0.879 | 0.919 | 0.942 | 0.949 |
| J= 3 | 0.000 | 0.124 | 0.244 | 0.358 | 0.462 | 0.553 | 0.630 | 0.692 | 0.736 | 0.763 | 0.772 |
| J= 4 | 0.000 | 0.095 | 0.188 | 0.276 | 0.358 | 0.430 | 0.492 | 0.541 | 0.577 | 0.599 | 0.607 |
| J= 5 | 0.000 | 0.074 | 0.147 | 0.215 | 0.279 | 0.336 | 0.384 | 0.423 | 0.451 | 0.469 | 0.474 |
| J= 6 | 0.000 | 0.058 | 0.115 | 0.168 | 0.218 | 0.262 | 0.300 | 0.330 | 0.353 | 0.366 | 0.371 |
| J= 7 | 0.000 | 0.045 | 0.090 | 0.132 | 0.170 | 0.205 | 0.234 | 0.258 | 0.276 | 0.286 | 0.290 |
| J= 8 | 0.000 | 0.035 | 0.070 | 0.103 | 0.133 | 0.160 | 0.183 | 0.202 | 0.215 | 0.224 | 0.226 |
| J= 9 | 0.000 | 0.028 | 0.055 | 0.080 | 0.104 | 0.125 | 0.143 | 0.158 | 0.168 | 0.175 | 0.177 |
| J=10 | 0.000 | 0.022 | 0.043 | 0.063 | 0.081 | 0.098 | 0.112 | 0.123 | 0.131 | 0.136 | 0.138 |
| J=11 | 0.000 | 0.017 | 0.033 | 0.049 | 0.063 | 0.076 | 0.087 | 0.096 | 0.103 | 0.107 | 0.108 |



```

21      T=(J-1.)/10.
      C
22      DO 10 N=1,6
23      SL=LAMBDA(N)
24      B(N)=SQRT(SL)
25      10 CONTINUE
      C
26      S1=0.
27      DO 20 N=1,5
28      G=BETA/(1.-B(N)**2)
29      AA=(ALFA**2+ALFA+B(N)**2)*COS(B(N))
30      C=-B(N)**2*T
31      TERM1(I,J)=2.*B(N)*EXP(C)*SIN(B(N)*X)*(G-1.)/AA
32      S1=S1+TERM1(I,J)
33      20 CONTINUE
      C
34      D=-T
35      AAA=ALFA*COS(1.)-SIN(1.)
36      R=BETA*EXP(D)*SIN(X)/AAA
37      S1=S1+R
      C
38      S2=0.
39      DO 30 N=1,5
40      CC=2.*(ALFA**2+LAMBDA(N))
41      DD=SIN(B(N))/ALFA
42      EE=(1.-COS(B(N)))/B(N)
43      FF=ALFA**2+ALFA+LAMBDA(N)
44      BB(N)=CC*(DD+EE)/FF
45      A=-LAMBDA(N)*T
46      TERM2(I,J)=BB(N)*EXP(A)*SIN(B(N)*X)
47      S2=S2+TERM2(I,J)
48      30 CONTINUE
      C
49      W(I,J)=S1+S2
      C
50      40 CONTINUE
      C
51      50 CONTINUE
      C
52      WRITE(6,55)
53      55 FORMAT('1',12X,'I=1',4X,'I=2',4X,'I=3',4X,'I=4',4X,'I=5',4X,'I=6',
14X,'I=7',4X,'I=8',4X,'I=9',4X,'I=10',3X,'I=11')
      C
54      WRITE(6,60)
55      60 FORMAT(/,'0',6X,'J= 1',3X,'0.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000'
1,2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000'
1,2X,'1.000')
      C
56      DO 80 J=2,11
57      WRITE(6,70) J,W(2,J),W(3,J),W(4,J),W(5,J),W(6,J),W(7,J),W(8,J),W(9
1,J),W(10,J),W(11,J)
58      70 FORMAT(' ',6X,'J=',I2,2X,'0.000',1X,10(F6.3,1X))
59      80 CONTINUE
      C
60      STOP
61      END

CSENTRY

```

|      | I=1   | I=2   | I=3   | I=4   | I=5   | I=6   | I=7   | I=8   | I=9   | I=10  | I=11  |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| J= 1 | 0.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| J= 2 | 0.000 | 0.154 | 0.295 | 0.414 | 0.501 | 0.553 | 0.570 | 0.556 | 0.521 | 0.474 | 0.427 |
| J= 3 | 0.000 | 0.082 | 0.161 | 0.233 | 0.296 | 0.348 | 0.390 | 0.422 | 0.447 | 0.467 | 0.486 |
| J= 4 | 0.000 | 0.061 | 0.120 | 0.178 | 0.232 | 0.282 | 0.329 | 0.372 | 0.412 | 0.449 | 0.484 |
| J= 5 | 0.000 | 0.053 | 0.105 | 0.157 | 0.207 | 0.255 | 0.301 | 0.346 | 0.388 | 0.427 | 0.465 |
| J= 6 | 0.000 | 0.049 | 0.098 | 0.146 | 0.193 | 0.238 | 0.283 | 0.326 | 0.366 | 0.405 | 0.442 |
| J= 7 | 0.000 | 0.046 | 0.092 | 0.137 | 0.181 | 0.225 | 0.267 | 0.307 | 0.346 | 0.383 | 0.418 |
| J= 8 | 0.000 | 0.043 | 0.087 | 0.129 | 0.171 | 0.212 | 0.252 | 0.290 | 0.327 | 0.361 | 0.394 |
| J= 9 | 0.000 | 0.041 | 0.082 | 0.122 | 0.162 | 0.200 | 0.238 | 0.273 | 0.308 | 0.340 | 0.371 |
| J=10 | 0.000 | 0.039 | 0.077 | 0.115 | 0.152 | 0.188 | 0.224 | 0.257 | 0.289 | 0.320 | 0.348 |
| J=11 | 0.000 | 0.036 | 0.072 | 0.108 | 0.143 | 0.177 | 0.210 | 0.242 | 0.272 | 0.300 | 0.327 |

**BYLAAG D - DIE MOEDERPROBLEEM**

```

CSJOB
C   PROBLEEM 4 - MOEDERPROBLEEM - BESKOU 'N EENDIMENSIONELE STAAF,
C   LENGTE L, WAT AAN 'N STAAF, LENGTE A, GEKOPPEL WORD. DIE
C   HITTEVERGELYKING GELD IN ALBEI STAWE.
C   'N BRON B2(X,T) IS IN DIE TWEDE STAAF AANWESIG.
C   BY DIE PUNT WAAR DIE TWEE STAWE GEKOPPEL WORD, GELD DIE
C   VOLGENDE TWEE VERBANDE:
C           U1(0,T) = U2(0,T)
C           K1 DU1/DX(0,T) = K2 DU2/DX(0,T)
C   VERDERE RAND- EN BEGINVOORWAARDES IS AS VOLG:
C
C   U1(-1,T) = 0,  DU2/DX(L1,T) = 0 (WAAR L1 = L/A)
C
C   U1(X,0) = 1,  U2(X,0) = 0
C
C   DIE PROBLEEM WORD GETRANSFORMEER NA DIE GEBIED (-1,0) VIR DIE
C   EERSTE STAAF, EN (0,L1) VIR DIE TWEDE STAAF.
C
C   DIE X- EN T-ASSE WORD VERDEEL IN 1/10 DELE SODAT X = (I-11)/10
C   EN T = (J-1)/10 .
C
C   W(I,J) IS DIE OPLOSSING VAN DIE VERGELYKING IN DIE EERSTE STAAF
C   EN DIE UITDRUK VAN DIE RESULTATE SAL AS VOLG IYK:
C
C   W(1,1)  W(2,1)  W(3,1)...           ...W(11,1)
C   W(1,2)  W(2,2)  W(3,2)...           ...W(11,2)
C   .       .       .                   .
C   .       .       .                   .
C   .       .       .                   .
C   W(1,11) W(2,11) W(3,11)...         ...W(11,11)
C
C
C   1   DIMENSION W(11,11), F(6), TH(6), TH1(6), AA1(6), AA2(7), AA3(7)
C   2   DIMENSION BB1(6), BB2(7), BB3(6), SKAT(6), XX(100)
C   3   REAL LIA1, LIA2, LIA3, LIB1, LIB2, LIB3, L, L1, K1, K2
C
C
C   4   L = 2.
C   5   A = 1.
C   6   K1 = 0.12*10**2/4.184
C   7   K2 = 0.2*10**2/4.184
C   8   C1 = 0.136*10**3/4.184
C   9   RO1 = 7.4*10**3
C  10   C2RO2 = 0.6*10**6/4.184
C
C
C   11  BETA = C1*RO1*A**2/(C2RO2*K1)
C   12  GAMMA = K2/K1
C   13  L1 = L/A
C   14  AL = K2*C1*RO1/(K1*C2RO2)
C   15  ALFA = SQRT(AL)
C   16  DELTA = A/K1
C
C
C   17  DO 100 J = 2,11
C
  
```

```

C
18 DO 90 I = 2,11
C
C
C
19 X = (I-11.)/10.
20 T = (J-1.)/10.
C
C
C DIE OPLOSSING VAN DIE PROBLEEM IN DIE EERSTE GEBIED WORD VERKRY
C DEUR DIE LAPLACE INVERSE TRANSFORMASIE VAN DIE VOLGENDE FORMULE
C TE NEEM:
C      U1(X,P) = A COSH(PX) + B SINH(PX) + 1/P**2
C              = A1 + A2 + A3 + B1 + B2 + B3 + 1/P**2
C
C DIE NOTASIE VIR DIE LAPLACE INVERSES VAN A1 - A3 EN B1 - B3
C IS: LIA1 - LIA3 EN LIB1 - LIB3.
C
C DIE LAPLACE INVERSE VAN 1/P**2 IS 1.
C
C
C DIE OPLOSSING VAN DIE HITTEVERGELYKING IN DIE EERSTE GEBIED
C LYK DAN AS VOLG:
C
C
C W(I,J) = LIA1 + LIA2 + LIA3 + LIB1 + LIB2 + LIB3 + 1
C
C
C
C
21 SKAT(1) = 0.7
22 SKAT(2) = 2.17
23 SKAT(3) = 3.585
24 SKAT(4) = 5.
25 SKAT(5) = 6.425
26 SKAT(6) = 7.9
C
C
27 DO 4 N=1,6
28 XX(1)=SKAT(N)
C
C
29 DO 2 K=1,100
30 T1=COTAN(XX(K)) - (GAMMA/ALFA)*TAN(XX(K)*L1/ALFA)
31 T2=(-1./(SIN(XX(K))**2)) - ((GAMMA*L1/ALFA**2)*(1./(COS(XX(K))*L1/
1ALFA**2)))
32 M=K+1
33 XX(M)=XX(K)-T1/T2
34 IF (ABS(XX(M)-XX(K)) .LT. 0.0001) GO TO 3
35 2 CONTINUE
C
C
C
36 3 TH(K)=XX(M)
C
C
37 4 CONTINUE
C

```

```

C
C   TH(N), N = 1-6, IS DIE WAARDES VAN POLE VAN A1-A3 EN B1-B3 EN IS
C   VEKRY DEUR DIE VOLGENDE VERGELYKING GRAFIES OP TE LOS:
C
C   COS(TH)*COS(TH*L1/ALFA) - (GAMMA/ALFA)*SIN(TH)*SIN(TH*L1/ALFA)
C
C
C
C
C
C
38   DO 5 N=1,6
39   F(N)=SIN(TH(N))*COS(TH(N)*L1/ALFA)*((ALFA**2+GAMMA*L1)/ALFA)+COS(T
1H(N))*SIN(TH(N)*L1/ALFA)*(L1+GAMMA)
40   TH1(N)=TH(N)*L1/ALFA
41   5  CONTINUE
C
C
C
C   DIE LAPLACE INVERSE TRANSFORMASIES VAN A1-A3 EN B1-B3 WORD' NOU
C   BEREKEN
C
C
42   LIA1 = 0.
43   DO 10 N=1,6
44   B=- (TH(N)**2)*T
45   AA1(N) = -2.*EXP(B)*GAMMA*SIN(TH(N))*SIN(TH1(N))*COS(TH(N)*X)/(TH(
1N)*F(N))
46   LIA1 = LIA1+AA1(N)
47   10 CONTINUE
C
C
C
48   LIA2 = 0.
49   DO 20 N=1,6
50   B=- (TH(N)**2)*T
51   AA2(N) = 2.*EXP(B)*BETA*GAMMA*SIN(TH(N))*SIN(TH1(N))*COS(TH(N)*X)/
1(TH(N)*(1.-(TH(N)**2))*F(N))
52   LIA2 = LIA2+AA2(N)
53   20 CONTINUE
C
C
C   A2 HET OOK 'N POOL BY S=-1. DIE RESIDU BY HIERDIE POOL WORD NOU
C   BEREKEN EN BYGETEL BY LIA2.
C
C
54   C = -T
55   AA2(7) = EXP(C)*BETA*GAMMA*SIN(1.)*SIN(L1/ALFA)*COS(X)/(ALFA*(COS(
11.)*COS(L1/ALFA)-GAMMA/ALFA*SIN(1.)*SIN(L1/ALFA)))
56   LIA2 = LIA2 + AA2(7)
C
C
C
C
C
57   LIA3 = 0.
58   DO 40 N=1,6
59   B=- (TH(N)**2)*T
60   AA3(N) = 2.*ALFA*EXP(B)*COS(TH1(N))*COS(TH(N)*X)/(TH(N)*F(N))
61   LIA3 = LIA3 + AA3(N)

```

```

62 40 CONTINUE
    C
    C
    C A3 HET OOK 'N POOL BY S=0. DIE RESIDU BY HIERDIE POOL WORD NOU
    C BEREKEN EN BYGETEL BY LIA3.
    C
    C
    C
63 AA3(7) = -1.
64 LIA3 = LIA3 + AA3(7)
    C
    C
    C
65 LIB1 = 0.
66 DO 50 N=1,6
67 B=- (TH(N)**2)*T
68 BB1(N) = -2.*EXP(B)*GAMMA*COS(TH(N))*SIN(TH1(N))*SIN(TH(N)*X)/(TH(
1N)*F(N))
69 LIB1 = LIB1 + BB1(N)
70 50 CONTINUE
    C
    C
    C
71 LIB2 = 0.
72 DO 60 N=1,6
73 B=- (TH(N)**2)*T
74 BB2(N) = 2.*EXP(B)*BETA*GAMMA*COS(TH(N))*SIN(TH1(N))*SIN(TH(N)*X)/
1(TH(N)*(1.-TH(N)**2)*F(N))
75 LIB2 = LIB2 + BB2(N)
76 60 CONTINUE
    C
    C
    C
    C B2 HET OOK 'N POOL BY S=-1. DIE RESIDU BY HIERDIE POOL WORD NOU
    C BEREKEN EN BYGETEL BY LIB2
    C
    C
    C
77 BB2(7) = EXP(C)*BETA*GAMMA*COS(1.)*SIN(L1/ALFA)*SIN(X)/(ALFA*(COS(
11.)*COS(L1/ALFA)-GAMMA/ALFA*SIN(1.)*SIN(L1/ALFA)))
78 LIB2 = LIB2 + BB2(7)
    C
    C
    C
    C
    C
79 LIB3 = 0.
80 DO 80 N=1,6
81 B=- (TH(N)**2)*T
82 BB3(N) = 2.*EXP(B)*GAMMA*SIN(TH1(N))*SIN(TH(N)*X)/(TH(N)*F(N))
83 LIB3 = LIB3 + BB3(N)
84 80 CONTINUE
    C
    C
    C
85 W(I,J) = LIA1+LIA2+LIA3+LIB1+LIB2+LIB3+1.
    C
    C
86 90 CONTINUE
    C
  
```

```
C
C
87 100 CONTINUE
C
C
C
88 WRITE(6,110)
89 110 FORMAT('1',12X,'I=1',4X,'I=2',4X,'I=3',4X,'I=4',4X,'I=5',4X,'I=6',
14X,'I=7',4X,'I=8',4X,'I=9',4X,'I=10',3X,'I=11')
C
C
90 WRITE(6,120)
91 120 FORMAT('/0',4X,'J= 1',4X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000'
1,2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000',2X,'1.000'
1,2X,'1.000')
C
C
92 DO 140 J=2,11
93 WRITE(6,130) J,W(2,J),W(3,J),W(4,J),W(5,J),W(6,J),W(7,J),W(8,J),W(
19,J),W(10,J),W(11,J)
94 130 FORMAT(' ',4X,'J=',12,4X,'0.000',1X,10(F6.3,1X))
95 140 CONTINUE
96 STOP
97 END
```

CSEENTRY

BYLAAG E - BEREKENING VAN DIE RESIDUE VAN DIE UITDRUKKING

$U_1(x,s)e^{st}$  BY DIE POLE  $s=\sigma_n$

$$U_1(x,s) = A \cosh \sqrt{s}x + B \sinh \sqrt{s}x + \frac{1}{s}$$

$$\text{waar } A \cosh \sqrt{s}x = A_1 + A_2 + A_3$$

$$B \sinh \sqrt{s}x = B_1 + B_2 + B_3$$

Die vorms van  $A_1$  tot  $A_3$  en  $B_1$  tot  $B_3$  word gevind in hoofstuk 4, paragraaf 4.5.

Ter voorbereiding

$A_1 e^{st}$ ,  $A_2 e^{st}$ , ...,  $B_3 e^{st}$  kan telkens geskryf word in die vorm

$$I(s) = \frac{J(s)}{K(s)}$$

Die residue by die pole  $s=\sigma_n$  van hierdie uitdrukking word gegee deur

$$\text{Res}\{I(s)\}_{s=\sigma_n} = \frac{J'(\sigma_n)}{K'(\sigma_n)}$$

In elke geval kan die uitdrukking van  $I(s)$  geskryf word sodat

$$K(s) = \cos i\sqrt{s} \cos \frac{1\sqrt{s}l}{a} - \frac{\gamma}{a} \sin i\sqrt{s} \sin \frac{1\sqrt{s}l}{a}$$

waar  $s = -\theta^2$  of  $\theta = \pm i\sqrt{s}$

Dit is dus nodig om  $K'(s)$  te bereken:

$$\begin{aligned}
 K'(s) &= (\cos i\sqrt{s}) \left(-\sin \frac{i\sqrt{s}l}{a}\right) \left(\frac{il}{2a\sqrt{s}}\right) + (-\sin i\sqrt{s}) \left(\frac{i}{2\sqrt{s}}\right) \left(\cos \frac{i\sqrt{s}l}{a}\right) \\
 &\quad - \frac{\gamma}{a} \left[ (\sin i\sqrt{s}) \left(\cos \frac{i\sqrt{s}l}{a}\right) \left(\frac{il}{2a\sqrt{s}}\right) + (\cos i\sqrt{s}) \left(\frac{i}{2\sqrt{s}}\right) \left(\sin \frac{i\sqrt{s}l}{a}\right) \right] \\
 &= (\cos i\sqrt{s}) \left(-\sin \frac{i\sqrt{s}l}{a}\right) \left(\frac{il}{2a\sqrt{s}}\right) - \frac{\gamma}{a} (\cos i\sqrt{s}) \left(\frac{i}{2\sqrt{s}}\right) \left(\sin \frac{i\sqrt{s}l}{a}\right) \\
 &\quad + (-\sin i\sqrt{s}) \left(\frac{i}{2\sqrt{s}}\right) \left(\cos \frac{i\sqrt{s}l}{a}\right) - \frac{\gamma}{a} (\sin i\sqrt{s}) \left(\cos \frac{i\sqrt{s}l}{a}\right) \left(\frac{il}{2a\sqrt{s}}\right) \\
 &= (\cos i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}l}{a}) \left(\frac{-il}{2a\sqrt{s}} - \frac{\gamma i}{2a\sqrt{s}}\right) \\
 &\quad + (\sin i\sqrt{s} \cos \frac{i\sqrt{s}l}{a}) \left(\frac{-i}{2\sqrt{s}} - \frac{\gamma il}{a \cdot 2a\sqrt{s}}\right) \\
 &= (\cos i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}l}{a}) \left(\frac{l}{2a\sqrt{s}} + \frac{\gamma}{2a\sqrt{s}}\right) \\
 &\quad + (\sin i\sqrt{s} \cos \frac{i\sqrt{s}l}{a}) \left(\frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{\gamma l}{2a^2\sqrt{s}}\right) \\
 &= (\cos i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}l}{a}) \left(\frac{1}{2a\sqrt{s}}\right) (l+\gamma) \\
 &\quad + (\sin i\sqrt{s} \cos \frac{i\sqrt{s}l}{a}) \left(\frac{1}{2\sqrt{s}}\right) \left(1 + \frac{\gamma l}{a^2}\right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{s}a} \left[ (\cos i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}l}{a}) (l+\gamma) + (\sin i\sqrt{s} \cos \frac{i\sqrt{s}l}{a}) \left(\frac{a^2 + \gamma l}{a}\right) \right]
 \end{aligned}$$

sodat

$$K'(\theta) = \frac{1}{2\theta a} \left[ (\cos \theta \sin \frac{\theta l}{a}) (l+\gamma) + (\sin \theta \cos \frac{\theta l}{a}) \left(\frac{a^2 + \gamma l}{a}\right) \right]$$

Die residue by die pole waar

$$\cos \frac{\theta l}{a} \cos \theta - \frac{\gamma}{a} \sin \frac{\theta l}{a} \sin \theta = 0$$

word aangedui deur AA1, ..., BB3. Enige ander residue se simbole sal duidelik blyk uit die verdere berekeninge.

Berekening van die residue:

$$A_1 = \frac{\gamma \sin \theta \sin \frac{\theta \ell}{a} \cos \theta x}{-\alpha \theta^2 \left( \cos \theta \cos \frac{\theta \ell}{a} - \frac{\gamma}{\alpha} \sin \theta \sin \frac{\theta \ell}{a} \right)}$$

met  $s = -\theta^2$

$$\theta = i\sqrt{s}$$

$$I(s) = \frac{e^{st} \gamma \sin i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \cos i\sqrt{s}x / \alpha s}{\left( \cos i\sqrt{s} \cos \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} - \frac{\gamma}{\alpha} \sin i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \right)} = \frac{J(s)}{K(s)}$$

$$AA_1 = \frac{J(s_n)}{K'(s_n)} \quad \text{waar } K'(s_n) \text{ reeds bepaal is.}$$

$$AA_1 = \frac{e^{s_n t} \gamma \sin i\sqrt{s_n} \sin \frac{i\sqrt{s_n}\ell}{a} \cos i\sqrt{s_n}x}{\frac{\alpha s_n}{2\alpha i\sqrt{s_n}} \left[ \left( \cos i\sqrt{s_n} \sin \frac{i\sqrt{s_n}\ell}{a} \right) (\ell + \gamma) + \left( \sin i\sqrt{s_n} \sin \frac{i\sqrt{s_n}\ell}{a} \right) \frac{\alpha^2 + \gamma \ell}{\alpha} \right]}$$

$$\therefore AA_1 \theta_n = \frac{-2e^{-\theta_n^2 t} \gamma \sin \theta_n \sin \frac{\theta_n \ell}{a} \cos \theta_n x}{\theta_n \left[ \left( \cos \theta_n \sin \frac{\theta_n \ell}{a} \right) (\ell + \gamma) + \left( \sin \theta_n \cos \frac{\theta_n \ell}{a} \right) \frac{\alpha^2 + \gamma \ell}{\alpha} \right]}$$

Vir A<sub>2</sub>

$$I(s) = \frac{\beta \gamma e^{st} \sin \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \sin i\sqrt{s} \cos i\sqrt{s}x}{s_n a (1+s) \left( \cos i\sqrt{s} \cos \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} - \frac{\gamma}{a} \sin i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \right)}$$

$$AA_2 = \frac{\beta \gamma e^{s_n t} \sin \frac{i\sqrt{s_n}\ell}{a} \sin i\sqrt{s_n} \cos i\sqrt{s_n}x}{P Q}$$

waar  $P = \frac{a}{2i\sqrt{s_n}} (1 + s_n)$

en  $Q = (\cos i\sqrt{s_n} \sin \frac{i\sqrt{s_n}\ell}{a}) (\ell + \gamma) + (\sin i\sqrt{s_n} \cos \frac{i\sqrt{s_n}\ell}{a}) \cdot \frac{a^2 + \gamma\ell}{a}$

$$AA_2(\theta_n) = \frac{2\beta \gamma e^{-\theta_n^2 t} \sin \frac{\theta_n \ell}{a} \sin \theta_n \cos \theta_n x}{\theta_n (1 - \theta_n^2) \left[ (\cos \theta_n \sin \frac{\theta_n \ell}{a}) (\ell + \gamma) + (\sin \theta_n \cos \frac{\theta_n \ell}{a}) \cdot \frac{a^2 + \gamma\ell}{a} \right]}$$

A<sub>2</sub> het ook 'n pool by  $s = -1$

$$\sqrt{s} = i$$

$$I(s) = \frac{\beta \gamma e^{st} \sin \frac{i\sqrt{s}l}{a} \sin i\sqrt{s} \cos i\sqrt{s}x}{s(1+s) a \left( \cos i\sqrt{s} \cos \frac{i\sqrt{s}l}{a} - \frac{\gamma}{a} \sin i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}l}{a} \right)}$$

Die residu by hierdie pool is AA22

$$AA_{22} = \frac{\beta \gamma e^{-t} \sin \frac{i \cdot i \cdot l}{a} \sin i \cdot i \cos i \cdot i x}{a \left( \cos i \cdot i \cos \frac{i \cdot i \cdot l}{a} - \frac{\gamma}{a} \sin i \cdot i \sin \frac{i \cdot i \cdot l}{a} \right)}$$

$$AA_{22} = \frac{\beta \gamma e^{-t} \sin \frac{l}{a} \sin l \cos x}{a \left( \cos l \cos \frac{l}{a} - \frac{\gamma}{a} \sin l \sin \frac{l}{a} \right)}$$

Vir A<sub>3</sub>

$$I(s) = \frac{e^{st} \cos \frac{i\sqrt{s}l}{a} \cos i\sqrt{s}x}{-s \left( \cos i\sqrt{s} \cos \frac{i\sqrt{s}l}{a} - \frac{\gamma}{a} \sin i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}l}{a} \right)}$$

$$AA_3 = \frac{2i\sqrt{s}_n a e^{s_n t} \cos \frac{i\sqrt{s}_n l}{a} \cos i\sqrt{s}_n x}{-s_n \left[ \left( \cos i\sqrt{s}_n \sin \frac{i\sqrt{s}_n l}{a} - \frac{\gamma}{a} \right) (l + \gamma) + \left( \sin i\sqrt{s}_n \cos \frac{i\sqrt{s}_n l}{a} - \frac{a^2 + \gamma l}{a} \right) \right]}$$

$$= \frac{2\theta_n a e^{-\theta_n^2 t} \cos \frac{\theta_n \ell}{a} \cos \theta_n x}{\theta_n^2 \left[ (\cos \theta_n \sin \frac{\theta_n \ell}{a}) (\ell + \gamma) + (\sin \theta_n \cos \frac{\theta_n \ell}{a}) (\frac{a^2 + \gamma \ell}{a}) \right]}$$

$$AA3(\theta_n) = \frac{2ae^{-\theta_n^2 t} \cos \frac{\theta_n \ell}{a} \cos \theta_n x}{\theta_n \left[ (\cos \theta_n \sin \frac{\theta_n \ell}{a}) (\ell + \gamma) + (\sin \theta_n \cos \frac{\theta_n \ell}{a}) (\frac{a^2 + \gamma \ell}{a}) \right]}$$

A3 het ook 'n pool by  $s=0$

$$I(s) = \frac{e^{st} \cos \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \cos i\sqrt{s}x}{s \left[ -\cos i\sqrt{s} \cos \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} + \frac{\gamma}{a} \sin i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \right]}$$

$$AA33 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot -1} = -1$$

Vir B<sub>1</sub>

$$I(s) = \frac{e^{st} \gamma \cos i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \sin i\sqrt{s}x}{sa \left[ \cos \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \cos i\sqrt{s} - \frac{\gamma}{a} \sin i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \right]}$$

$$BB1 = \frac{2i\sqrt{s_n} a e^{s_n t} \gamma \cos i\sqrt{s_n} \sin \frac{i\sqrt{s_n} \ell}{a} - \sin i\sqrt{s_n} x}{s_n a \left[ (\cos i\sqrt{s_n} \sin \frac{i\sqrt{s_n} \ell}{a}) (\ell + \gamma) + (\sin i\sqrt{s_n} \cos \frac{i\sqrt{s_n} \ell}{a}) (\frac{a^2 + \gamma \ell}{a}) \right]}$$

$$BB1(\theta_n) = \frac{-2e^{-\theta_n^2 t} \gamma \cos \theta_n \sin \frac{\theta_n \ell}{a} - \sin \theta_n x}{\theta_n \left[ (\cos \theta_n \sin \frac{\theta_n \ell}{a}) (\ell + \gamma) + (\sin \theta_n \cos \frac{\theta_n \ell}{a}) (\frac{a^2 + \gamma \ell}{a}) \right]}$$

Vir B<sub>2</sub>

$$I's' = \frac{e^{st} \gamma \rho \sin \frac{i\sqrt{s} \ell}{a} \cos i\sqrt{s} \sin i\sqrt{s} x}{-s a (1 + s) \left( \cos \frac{i\sqrt{s} \ell}{a} \cos i\sqrt{s} - \frac{\gamma}{a} \sin i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s} \ell}{a} \right)}$$

$$BB2 = \frac{2i\sqrt{s_n} e^{s_n t} \gamma \rho \sin \frac{i\sqrt{s_n} \ell}{a} \cos i\sqrt{s_n} \sin i\sqrt{s_n} x}{-s_n a (1 + s_n) \left[ (\cos i\sqrt{s_n} \sin \frac{i\sqrt{s_n} \ell}{a}) (\ell + \gamma) + (\sin i\sqrt{s_n} \cos \frac{i\sqrt{s_n} \ell}{a}) (\frac{a^2 + \gamma \ell}{a}) \right]}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{BB2}(\theta_n) = \\
 & \frac{2e^{-\theta_n^2 t} \gamma \beta \sin \frac{\theta_n \ell}{a} \cos \theta_n \sin \theta_n x}{\theta_n (1 - \theta_n^2) \left[ (\cos \theta_n \sin \frac{\theta_n \ell}{a})(\ell + \gamma) + (\sin \theta_n \cos \frac{\theta_n \ell}{a})(\frac{\alpha^2 + \gamma \ell}{a}) \right]}
 \end{aligned}$$

$B_2$  het ook 'n pool by  $s = -1 \therefore \sqrt{s} = i$

Die residu by hierdie pool is BB22

$$\text{BB22} = \frac{e^{-t} \gamma \beta \sin \frac{\ell}{a} \cos l \sin x}{\alpha (\cos \frac{\ell}{a} \cos l - \frac{\gamma}{a} \sin l \sin \frac{\ell}{a})}$$

Vir  $B_3$

$$I(s) = \frac{e^{st} \gamma \sin \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \sin i\sqrt{s}x}{-\alpha s \left[ \cos \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \cos i\sqrt{s} - \frac{\gamma}{a} \sin i\sqrt{s} \sin \frac{i\sqrt{s}\ell}{a} \right]}$$

BB3 =

$$\frac{2i\sqrt{s_n} a e^{s_n t} \gamma \sin \frac{i\sqrt{s_n} \ell}{a} - \sin i\sqrt{s_n} x}{-a s_n \left[ (\cos i\sqrt{s_n} \sin \frac{i\sqrt{s_n} \ell}{a}) (\ell + \gamma) + (\sin i\sqrt{s_n} \cos \frac{i\sqrt{s_n} \ell}{a}) \left( \frac{\alpha^2 + \gamma \ell}{a} \right) \right]}$$

$$BB3(\theta_n) = \frac{2e^{-\theta_n^2 t} \gamma \sin \frac{\theta_n \ell}{a} - \sin \theta_n x}{\theta_n \left[ (\cos \theta_n \sin \frac{\theta_n \ell}{a}) (\ell + \gamma) + (\sin \theta_n \cos \frac{\theta_n \ell}{a}) \left( \frac{\alpha^2 + \gamma \ell}{a} \right) \right]}$$

BIBLIOGRAFIE

Carslaw HS en Jaeger JC: Conduction of Heat in Solids, Tweede uitgawe, Oxford University Press, 1959.

Haberman R: Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier series and Boundary Value Problems, Prentice Hall, Inc., 1983.

Rossouw WJ: Behoudwetformulerings vir Randvoorwaardes, Mei 1983.

Weinberger HF: A First Course in Partial Differential Equations, Xero: College Publishing, 1965.

