B-EVOLUSIES EN DIE LAPLACE TRANSFORMASIE

deur

ALETTA SOPHIA JOOSTE

voorgelê ter vervulling van 'n deel
van die vereistes vir die graad

M.Sc. (Toegepaste Wiskunde)

IN DIE FAKULTEIT WIS- EN NATUURKUNDE
VAN DIE
UNIVERSITEIT VAN PRETORIA
PRETORIA

September 1986

DANKBETUIGINGS

Ek wil graag my dank betuig aan:

1) Prof N Sauer vir sy motivering en bereidwilligheid om my te alle tye van leiding te voorsien en

2) die WNNR-Stigting vir Navorsingsontwikkeling vir finansiële hulp wat ek ontvang het.

INHOUD

B-EVOLUSIES EN DIE LAPLACE TRANSFORMASIE

deur

Aletta Sophia Jooste

Leier: Prof N Sauer
Departement: Wiskunde en Toegepaste Wiskunde
Graad: M.Sc.

SAMEVATTING

As B 'n lineêre operator is, met definisieversameling D(B) in 'n Banachruimte X en waardeversameling in 'n Banach=ruimte Y, word die versameling $\{S(t):t>0\}$ van begrensde, lineêre operatore, gedefinieer op Y, 'n B-evolusie genoem as

$$S(t)[Y] \subset D(B)$$

en

$$S(t+s) = S(t)BS(s)$$

vir alle positiewe t en s.

Met S(t) word 'n semigroep $\{E(t):t>0\}$ van lineêre operatore in Y geassosieer, sodanig dat $E(t) = BS(t)$.

In hierdie verhandeling word die eienskappe van B-evolusies bestudeer, terwyl sekere aannames ten opsigte van S(t) en E(t) gemaak word. Die infinitesimale operator A_o van S(t) word gedefinieer en beperkings van A_o en B vorm 'n af=sluitbare paar. Die afsluiting van laasgenoemde paar word met $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ aangedui en daar word bewys dat die operator

$\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$, met Re$\lambda$>0, vir $P(\lambda)[Y]$ op Y afbeeld, en dat

$$(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1} = P(\lambda),$$

waar $P(\lambda)$ die Laplace-transformasie van $S(t)$ voorstel. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ word die gewysigde operatore genoem, en sal *slegs* die B-evolusie uniek bepaal as $S(t)$ sterk kontinu is vir $t>0$.

Daar word aangetoon vir watter waardes van y, $u(t) = S(t)y$ 'n oplossing van die Cauchy-probleem

$$D_t[Bu(t)] = A_0u(t)$$
$$Bu(t)|_{t=0} = y$$

is.

Die koppeling tussen $S(t)$ en $E(t)$ word ook beskou. 'n Onbe= grensde koppeloperator C, wat die B-evolusie $S(t)$ en sy geassosieerde semigroep $E(t)$ koppel, word gekonstrueer, sodanig dat $S(t) = CE(t)$. Laastens word die begrip empatie gedefinieer en voorwaardes waaronder 'n familie operatore wat in empatie is met 'n semigroep, 'n B-evolusie is, word ondersoek.

B-EVOLUTIONS AND THE LAPLACE TRANSFORM

by

Aletta Sophia Jooste

Leader: Prof N Sauer
Department: Mathematics and Applied Mathematics
Degree: M.Sc.

SUMMARY

If B is a linear operator with domain $D(B)$ contained in a Banach space X and range in a Banach space Y, the family $\{S(t):t>0\}$ of bounded, linear operators defined on Y is called a B-evolution if

$$S(t)[Y] \subset D(B)$$

and

$$S(t+s) = S(t)BS(s)$$

for all positive t and s.

Associated with $S(t)$ is the semi-group $\{E(t):t>0\}$ of linear operators in Y, defined by $E(t) = BS(t)$.

In this dissertation the properties of B-evolutions are studied. Certain assumptions are made with respect to $S(t)$ and $E(t)$. The infinitesimal operator A_0 of $S(t)$ is de= fined and it is shown that restrictions of A_0 and the operator B form a closeable pair. The closure of this pair is denoted by $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ and it is shown that the operator $\lambda\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$, with $\mathrm{Re}\lambda>0$, maps $P(\lambda)[Y]$ onto Y and

$$(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1} = P(\lambda),$$

where $P(\lambda)$ is the Laplace transform of $S(t)$. The closed pair $\langle\mathcal{A},\mathcal{B}\rangle$ will determine the B-evolution uniquely only if $S(t)$ is strongly continuous for $t>0$.

The initial states y for which $u(t) = S(t)y$ solves the Cauchy problem

$$D_t[Bu(t)] = A_o u(t)$$
$$Bu(t)|_{t=o} = y$$

are also determined.

The link between $S(t)$ and $E(t)$ is studied. An unbounded operator C, that links the B-evolution $S(t)$ and its associated semi-group $E(t)$, is constructed such that $S(t) = CE(t)$. Finally, the concept of a family of operators which is in empathy with a semi-group is introduced. Such families are studied, and conditions determined under which they are B-evolutions.

HOOFSTUK 1 AGTERGROND EN OORSIG

1.1 INLEIDING

Beskou die volgende probleem, waar X 'n Banachruimte is en A 'n lineêre operator met definisieversameling D(A) en waardeversameling R(A) beide in X:

Bepaal 'n funksie $u = u(t)$; $t>0$, sodanig dat

$$u_t = Au(t); \; t>0 \qquad (1.1)$$
$$u(o) = u_o, \qquad (1.2)$$

waar $u_o \in X$.

Hierdie tipe probleem word 'n Cauchy-probleem genoem en die oplossing $u(t)$ moet kontinu wees op $[0,\infty)$ en kontinu differensieerbaar op $(0,\infty)$.

Die oplossing van *die* probleem word met behulp van semigroepteorie verkry en is van die vorm

$$u(t) = E(t)u_o; \; u_o \in D(A)$$

waar $\{E(t):t \geq 0\}$ 'n semigroep is met die semigroepeienskap

$$E(t+s) = E(t)E(s); \; t \geq 0 \text{ en } s \geq 0.$$

Cauchy-probleme en die oplosbaarheid daarvan word onder andere deur Friedman [2] en Showalter [9] bespreek.

'n Tipiese voorbeeld van 'n Cauchy-probleem wat met behulp van semigroepteorie opgelos word, word in [9, p.95] gegee:

Bepaal die temperatuurverdeling $u(x,t)$ in 'n staaf met lengte een, as die temperatuur by die eindpunte nul is vir alle tye en as die hitteverspreiding op tydstip nul gegee word deur die funksie $u_0(x)$.

Ons soek dus 'n funksie $u = u(t)$; $0<x<1$, $t>0$, sodanig dat

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_{xx}u; \ 0<x<1, \ t>0 \\ u(x,0) &= u_0(x); \ 0<x<1 \\ u(0,t) &= 0; \ t>0 \\ u(1,t) &= 0; \ t>0 \end{aligned}$$

Hierdie probleem het 'n unieke oplossing vir elke u_0 in $D(A)$, met $A = \partial_{xx}$.

Beskou nou die volgende vergelyking:

$$D_t[Bu(t)] = Au(t); \ t>0 \tag{1.3}$$

en aanvaar dat B^{-1} bestaan.

As B geslote is, en $u'(t)$ bestaan, is *die* vergelyking ekwivalent aan

$$Bu' = Au$$

en die probleem

$$u' = B^{-1}Au$$

met beginvoorwaarde (1.2) kan met behulp van semigroep=teorie opgelos word *indien* $B^{-1}A$ 'n semigroep genereer.

Indien B nie geslote is nie, kan vergelyking (1.3) met behulp van die substitusie $Bu = v$ in die vorm

$$v' = AB^{-1}v \tag{1.4}$$

geskryf word. Vergelyking (1.4), tesame met beginvoorwaarde (1.2) kan met behulp van semigroepteorie opgelos word, mits AB^{-1} 'n semigroep genereer.

In die praktyk bestaan daar egter probleme van die vorm

$$D_t[Bu(t)] = Au(t)$$
$$Bu|_{t=0} = y$$

waar B^{-1} nie noodwendig bestaan nie of waar B nie geslote of afsluitbaar is nie. Sulke probleme kan nie in die vorm (1.1) geskryf word nie en dus ook nie so behandel word nie.

Beskou die volgende voorbeeld:

Bepaal die temperatuurverdeling $u(x,t)$ in 'n eendimen= sionele staaf, waarvan die lengte een is. Die beginpunt van die staaf is voortdurend in kontak met 'n blok ys en aan die eindpunt is dit in kontak met 'n reservoir waarin die temperatuurverdeling homogeen is. Die temperatuur van die reservoir is op tydstip nul α. Die temperatuurverdeling in die staaf op tydstip nul is 'n gegewe funksie van x, sê $a(x)$. As ons alle nodige konstantes gerieflikheidshalwe ge= lyk aan een stel, kry ons met behulp van energie-behoud die volgende:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_{xx} u; \quad 0<x<1, \ t>0 \\ u(0,t) &= 0; \quad t>0 \\ u(1,0) &= \alpha \\ u(x,0) &= a(x); \quad 0<x<1 \\ \text{en } \partial_t u(1,t) &= -\partial_x u(1,t); \quad t>0 \end{aligned}$$

Die probleem kan as volg herformuleer word:

Stel $\gamma_0 u = u|_{x=1}$

$\gamma_1 u = \partial_x u|_{x=1}$

$X = L^2(0,1)$

en $Y = L^2(0,1) \times \mathbb{C}$, waar $\mathbb{C}$ die komplekse vlak aandui.

Definieer die operatore A_0 en B_0 deur

$$A_0 u := \langle \partial_{xx} u, -\gamma_1 u \rangle$$
$$B_0 u := \langle u, \gamma_0 u \rangle .$$

Die gegewe probleem kan dus in die volgende vorm neergeskryf word:

$$D_t[B_0 u] = A_0 u$$
$$B_0 u|_{t=0} = y,$$

waar y 'n gegewe punt in Y is.

In [5] word aangetoon dat hierdie operator B_0 nie geslote of afsluitbaar is nie. Die bestudering van hierdie tipe evolusieprobleme, waar A_0 en B_0 lineêre operatore, gedefinieer op 'n Banachruimte X, met waardes in 'n Banachruimte Y is, het aanleiding gegee tot die ontwikkeling van 'n teorie soortgelyk aan die semigroepteorie, naamlik die teorie van B-evolusies.

Beskou nou die algemene geval:

$$D_t[Bu(t)] = Au(t)$$
$$Bu|_{t=0} = y,$$

waar A en B lineêre (nie noodwendig begrensde) operatore is, gedefinieer op 'n Banachruimte X en met waardes in 'n Banachruimte Y.

Die hoofdoel van die teorie van B-evolusies is om die oplosoperator $S(t)$, wat die begintoestand y op die oplossing $u(t)$ van die probleem afbeeld, d.w.s. waar die verband $u(t) = S(t)y$; $t>0$ geldig is, te ondersoek.

Die oplosoperator $S(t)$ moet aan die volgende eienskappe voldoen:

Aangesien ons te make het met 'n lineêre probleem, moet $S(t)$ 'n lineêre operator wees, gedefinieer op Y en met waardes in $D(B)$.

Om die beginvoorwaarde te bevredig, moet geld dat

$$\lim_{t \to 0} BS(t)y = y; \; t>0.$$

Veronderstel $Bu(t)$ is die begintoestand vir $u(t+s)$:

$$u(t+s) = S(s)Bu(t); \; s>0, \; t>0.$$

Hieruit volg dat vir alle y in Y

$$S(t+s)y = u(t+s) = S(s)Bu(t) = S(s)BS(t)y$$

en dus

$$S(t+s) = S(s)BS(t)$$

vir alle positiewe s en t.

As die oplossing $u(t)$ kontinu afhanklik van die begin=toestand y is, dan moet $S(t)$ begrens wees.

Aangesien $Bu(t) = BS(t)y$ differensieerbaar is, moet die af=beelding

$$t \to BS(t)y; \; t>0$$

kontinu wees.

Die begrip B-*evolusie* is in [5] soos volg bekendgestel:

As X en Y komplekse Banachruimtes is en B 'n lineêre operator met definisieversameling in X en waardeversameling in Y, dan word die familie begrensde, lineêre operatore $\{S(t):t>0\}$ 'n B-evolusie genoem as

$$S(t)[Y] \subset D(B)$$

en

$$S(t+s) = S(s)BS(t)$$

vir alle positiewe s en t.

Met elke B-evolusie S(t) assosieer ons 'n semigroep $\{E(t):t>0\}$ van lineêre operatore in Y, gedefinieer deur

$$E(t) = BS(t); \; t>0.$$

E(t) staan bekend as die *geassosieerde semigroep*.

Die verskil tussen die reeds-ontwikkelde B-evolusieteorieë, soos beskryf in [5] en [6] lê hoofsaaklik in die aannames wat met betrekking tot die geassosieerde semigroep E(t) gemaak word.

In [5] word aangeneem dat E(t) 'n semigroep van klas C_0 (vgl. [3, p.321]) is, dat S(t) gelykmatig begrens is en dat die Laplace-transformasie van S(t) sekere eienskappe het. Die B-evolusie S(t) word gekoppel aan die probleem

$$D_t[Bu(t)] = Au(t)$$
$$Bu(t)|_{t=0} = y; \; y \in Y.$$

In hierdie geval geld die eienskap $\lim_{t\to 0} BS(t)y = y$ vir alle y in Y.

Die infinitesimale generator A van die B-evolusie word as volg gedefinieer:

$$A_h x := h^{-1}[BS(h)B - B]x;\ x \in D(B)$$

en

$$x \in D(A) \text{ as } Ax := \lim_{h \to 0} A_h x \text{ bestaan.}$$

Die definisieversameling van A kan in hierdie geval ge= skryf word as 'n direkte som, naamlik

$$D(A) = Ker(B) + D_o$$

waar Ker(B) die nulruimte van B voorstel. Verder bepaal A en B se beperkings tot die versameling D_o, sê A_o en B_o, vir S(t) uniek. So word die term *genererende paar* ingevoer. Alhoewel A_o en B_o op sigself nie geslote is nie, vorm hulle 'n geslote paar. Die begrip *gesamentlik geslote* word gedefinieer en die gesamentlik geslote paar $\langle A_o, B_o \rangle$ is die genererende paar van die B-evolusie S(t).

Hierdie C_o-teorie is 'n spesiale geval van 'n meer algemene teorie wat in [6] bespreek word en wat in die volgende afdeling kortliks opgesom word.

1.2 ABEL-SOMMEERBAARHEID EN B-EVOLUSIES

In hierdie swakker teorie van B-evolusies word aanvaar dat die geassosieerde semigroep E(t) Abel-sommeerbaar, oftewel van klas (A) is. Abel-sommeerbaarheid word deur Hille en Phillips [3, Afdeling 10.6, pp.321-322] soos volg gedefi= nieer:

$\{E(t):t>0\}$ is 'n semigroep van klas (A) as die operatore E(t) begrensde, lineêre operatore is, waarvoor die volgende geld:

(a) $E(t)$ is sterk kontinu vir $t>0$,

(b) $Y_0 = \cup\{R(E(t)):t>0\}$ is dig in Y en

(c) vir enige komplekse getal λ met positiewe reële ge=deelte, bestaan daar 'n begrensde, lineêre operator $R(\lambda)$ van Y na Y, sodanig dat

(i) $R(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)ydt$ vir $y \in Y_0$,

(ii) $\|R(\lambda)\|$ is begrens in die komplekse halfvlak $\mathrm{Re}\lambda > 0$

en

(iii) vir elke y in Y geld $\lambda R(\lambda)y \to y$ as $\lambda \to \infty$.

Daar word ook aanvaar dat die B-evolusie $S(t)$ van tipe L-A is, *i.e.*

(a) Die afbeelding $t \to S(t)y$; $t>0$, $y \in Y$ is kontinu,

(b) daar bestaan 'n begrensde, lineêre operator $P(\lambda)$ van Y na $D(B)$ in X, sodanig dat

(i) $P(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)ydt$; $\mathrm{Re}\lambda>0$, $y \in Y_0$,

(ii) $BP(\lambda)y = R(\lambda)y$; $y \in Y$ en

(iii) $\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda)$ as $\lambda \to \infty$.

Die *infinitesimale operator* A_0 van $S(t)$ word soos volg gedefinieer:

$$A_h x := h^{-1}[BS(h)B - B]x;\ x \in D(B),\ h>0$$

en

$$x \in D(A_0) \text{ as } A_0 x := \lim_{h\to 0} A_h x \text{ bestaan.}$$

Aangesien daar in hierdie werk hoofsaaklik van die Laplace-transformasietegniek gebruik gemaak word, is die volgende resultaat belangrik:

STELLING 1.1 (Veralgemeende resolventvergelyking)

Vir λ *en* μ *met positiewe reële gedeeltes, sodanig dat* $\mathrm{Re}\lambda \neq \mathrm{Re}\mu$, *geld*

$$P(\mu) = P(\lambda) + (\lambda - \mu)P(\mu)BP(\lambda).$$

Die volgende resultate word later benodig:

HULPSTELLING 1.2

Vir $x \in D(A_o)$ *geld dat* $S(t)Bx \in D(A_o)$ *en*

$$A_oS(t)Bx = BS(t)A_ox = D_tBS(t)Bx.$$

HULPSTELLING 1.3

$P(\lambda)$ *beeld* Y_o *af in* $D(A_o)$ *en*

$$(\lambda B - A_o)P(\lambda)y = y; \; y \in Y_o.$$

HULPSTELLING 1.4

$S(t)BP(\lambda)y = P(\lambda)BS(t)y$ *as* $y \in Y$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ *en* $t > 0$.

Die volgende notasie word ingevoer:

$$\mathfrak{D}_o := P(\lambda)[Y_o]$$
$$A_{oo} := A_o \text{ se beperking tot } \mathfrak{D}_o$$
$$B_{oo} := B \text{ se beperking tot } \mathfrak{D}_o.$$

Uit 1.2 volg

STELLING 1.5

As $y \in B[\mathfrak{D}_0]$ *en* $t>0$, *dan is* $u(t) = S(t)y$ *'n element van* $\mathfrak{D}_0$ *en dit bevredig die vergelykings*

$$D_t[Bu(t)] = A_{00}u(t)$$
$$Bu(t)|_{t=0} = y.$$

Die begrip *gesamentlik geslote* of *geslote paar* is deur Sauer in [5] ingevoer.

DEFINISIE 1.6

Veronderstel A en B is lineêre operatore met definisie=versamelings D(A) en D(B) in 'n Banachruimte X en waarde=versamelings in Banachruimtes Y en Z onderskeidelik. Die paar $\langle A,B\rangle$ word soos volg gedefinieer:

$$D(\langle A,B\rangle) = D(A) \cap D(B)$$
$$\langle A,B\rangle x = \langle Ax,Bx\rangle \in Y \times Z$$

Die paar $\langle A,B\rangle$ is *geslote* as uit

$$\{x_n\} \subset D(A) \cap D(B),$$
$$x_n \to x \text{ in } X$$
$$Ax_n \to y \text{ in } Y \text{ en}$$
$$Bx_n \to z \text{ in } Z,$$

volg dat

$$x \in D(A) \cap D(B),\ Ax = y \text{ en } Bx = z.$$

Die begrip *gesamentlik afsluitbaar*, wat 'n swakker begrip is as *gesamentlik geslote*, word as volg gedefinieer:

DEFINISIE 1.7

Laat A en B lineêre operatore vanaf 'n Banachruimte X in Banachruimtes Y en Z onderskeidelik wees. A en B is *gesamentlik afsluitbaar* as die lineêre operator $\langle A,B\rangle$ afsluitbaar is. Die *gesamentlike afsluiting* van A en B word gedefinieer as die kleinste afsluiting van die operator $\langle A,B\rangle$, *i.e.* $\mathrm{Cl}\langle A,B\rangle$. Aangesien $\mathrm{Cl}\langle A,B\rangle$ 'n element van $Y \times Z$ is, is die afsluiting weer 'n paar en ons stel $\mathrm{Cl}\langle A,B\rangle := \langle \mathfrak{A},\mathfrak{B}\rangle$, waar $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ lineêre operatore is.

Dit volg dus uit hierdie definisie dat die paar $\langle \mathfrak{A},\mathfrak{B}\rangle$ geslote is.

STELLING 1.8

A_{oo} en B_{oo} is gesamentlik afsluitbaar.

Die gesamentlike afsluiting van A_{oo} en B_{oo} word aangedui met $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ en die definisieversameling van die gesamentlike afsluiting met $\mathfrak{D}$. Die volgende verband tussen B en $\mathfrak{B}$ word verkry:

STELLING 1.9

$\mathfrak{B}$ = B se beperking tot $\mathfrak{D}$.

Hulpstelling 1.3 word gebruik om die volgende resultaat te bewys.

STELLING 1.10

As $\mathrm{Re}\lambda > 0$, *volg*

$$\mathfrak{A}P(\lambda)y = \lambda\mathfrak{B}P(\lambda)y - y;\ y \in Y$$

en

$$\mathfrak{D} = P(\lambda)[Y].$$

STELLING 1.11

Vir λ *met positiewe reële gedeelte, is die operator* $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$ *inverteerbaar, beeld* $\mathcal{D}$ *af op* Y *en*

$$(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1} = P(\lambda).$$

OPMERKING 1.12

Die operatore $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ word die *gewysigde operatore* van die B-evolusie genoem en die *kontinuïteit* van S(t) word gebruik om die volgende te bewys:

STELLING 1.13

Die gewysigde operatore $\mathcal{A}$ *en* $\mathcal{B}$ *bepaal die B-evolusie* S(t) *uniek.*

$\langle\mathcal{A},\mathcal{B}\rangle$ word gevolglik die *genererende paar* van S(t) genoem.

Die eienskap: $\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda)$ as $\lambda \to \infty$ is nodig vir

STELLING 1.14

Daar bestaan 'n begrensde, lineêre operator C, *gedefinieer op* Y, *sodanig dat* $\mathcal{B}^{-1}$ *die beperking van* C *tot* $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ *is.*

STELLING 1.15

S(t) = CE(t) *vir* t>0.

OPMERKING 1.16

Deur die sterk kontinuïteit van $E(t)$ en die begrensdheid van C te gebruik, kan uit Stelling 1.15 bewys word dat $S(t)$ sterk kontinu is vir $t>0$. Die aanname dat die afbeelding

$$t \to S(t)y;\ y \in Y,\ t>0$$

kontinu is, kan dus weggelaat word en ons sal steeds te make hê met 'n B-evolusie van tipe L-A. Stelling 1.13 sal dan steeds geld.

Die volgende notasie word in [5] gebruik en gedefinieer:

DEFINISIE 1.17

Laat A en B lineêre funksies wees, met definisieversamelings $D(A)$ en $D(B)$ en waardeversamelings van beide in Y. Ons definieer die som-afbeelding $A \dotplus B$ vanaf $D(A) + D(B)$ na Y soos volg:

As $x = a + b$, met $a \in D(A)$ en $b \in D(B)$, dan is

$$(A \dotplus B)x = Aa + Bb.$$

Die volgende resultate is aan [5] ontleen:

HULPSTELLING 1.18

As die lineêre funksies A en B ooreenstem op $D(A) \cap D(B)$, dan is die som-afbeelding $A \dotplus B$ 'n funksie.

BEWYS:

Neem $x \in D(A) + D(B)$. x kan meer as een voorstelling hê, sê $x = a_1+b_1 = a_2+b_2$.

Dan is $a_1-a_2 = b_2-b_1 \in D(A) \cap D(B)$ en dus is

$$A(a_1-a_2) = B(b_2-b_1),$$

waaruit volg:

$$Aa_1 + Bb_1 = Aa_2 + Bb_2 = (A \dotplus B)x.$$

STELLING 1.19

(a) *Die operator* C *is inverteerbaar op* $Y_0 + R(\mathcal{B})$.
(b) *Stel* $(\mathcal{B}_1)^{-1}$ = C *se beperking tot* Y_0; *dan het* B *die representasie*

$$B = \mathcal{B}_0 \dotplus \mathcal{B}_1 \; op \; \mathcal{D} + D(\mathcal{B}_1) = P(\lambda)[Y] + C[Y_0].$$

EMPATIEKE EVOLUSIE-OPERATORE

Die definisie van 'n B-evolusie gee aanleiding tot die vergelyking

$$S(t+s) = S(t)E(s) = S(s)E(t).$$

As hierdie nou die enigste verband tussen 'n familie $\{S(t):t>0\}$ van begrensde, lineêre operatore en 'n semigroep $\{E(t):t>0\}$ is, ontstaan die vraag of daar 'n operator B gekonstrueer kan word wat sodanig is dat $E(t) = BS(t)$.

Die begrip *empatie* word in [7] soos volg gedefinieer:

DEFINISIE 1.20
Laat X en Y komplekse Banachruimtes wees en $\{E(t):t>0\}$ 'n semigroep van begrensde, lineêre operatore in Y. 'n Versameling $\{S(t):t>0\}$ van begrensde, lineêre operatore van Y na X is in *empatie* met $\{E(t):t>0\}$ as

$$S(t+s) = S(t)E(s) = S(s)E(t)$$

vir alle positiewe t en s.

In [7] word aanvaar dat $\{E(t):t>0\}$ 'n semigroep van klas (A) is en dat $\{S(t):t>0\}$ in empatie is met $\{E(t):t>0\}$.

Verder word aanvaar dat

(a) die afbeelding $t \to S(t)y$; $t>0$, $y \in Y$ kontinu is,

(b) $P(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)ydt$; $\mathrm{Re}\lambda>0$, bestaan vir $y \in Y_0$

en

(c) $\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda)$ as $\lambda \to \infty$.

Die volgende resultate is in [7] verkry:

STELLING 1.21 (Veralgemeende resolventstelling)

Vir λ *en* μ *met positiewe reële gedeeltes, sodanig dat* $\mathrm{Re}\lambda \neq \mathrm{Re}\mu$, *geld*

$$P(\mu) - P(\lambda) = (\lambda - \mu)P(\mu)R(\lambda).$$

Hierdie resultaat is meer algemeen as Stelling 1.1.

DEFINISIE 1.22

$S(t)$ word *nie-singulier* genoem as $\lim_{t\to 0} S(t)y$ bestaan vir $y \in Y_0$ en as uit $\lim_{t\to 0} S(t)y = 0$, volg dat $y = 0$.

STELLING 1.23

(a) *Daar bestaan 'n begrensde, lineêre operator* C *gedefinieer op* Y, *met* $\mathcal{R}(C) \subset X$, *sodanig dat*

$$P(\lambda) = CR(\lambda);\ \mathrm{Re}\lambda>0$$

en

$$S(t) = CE(t);\ t>0.$$

(b) *As* $P(\lambda)$ *een-eenduidig is vir 'n spesifieke* λ *met* $\mathrm{Re}\lambda>0$, *dan is* C *een-eenduidig op* $R(\lambda)[Y]$ *en* $P(\lambda)$ *een-eenduidig vir alle* λ *met positiewe reële gedeeltes.*

(c) *As* $S(t)$ *nie-singulier is, dan is* C *een-eenduidig op* Y_0.

Daar word nou aanvaar dat $P(\lambda)$ een-eenduidig is vir 'n spesifieke λ met $\mathrm{Re}\lambda>0$ en dat $S(t)$ nie-singulier is. Die volgende operatore word gedefinieer:

$\mathfrak{B} := (C_o)^{-1}$ op $P(\lambda)[Y]$;

$\mathfrak{B}_1$ is die inverse van C se beperking tot Y_o;

$B := \mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1$ op $P(\lambda)[Y] + C[Y_o]$ en

$\mathfrak{A} := A_E(C_o)^{-1}$ op $P(\lambda)[Y]$,

waar A_E die *infinitesimale generator* van $E(t)$ is.

OPMERKING:

Volgens Hille en Phillips [3, p.344] hoef die infinitesima=le operator A_o van 'n semigroep van Klas (A) nie geslote te wees nie. Dit is egter afsluitbaar en die kleinste geslote uitbreiding van A_o word die *infinitesimale generator* van $E(t)$ genoem.

Die geslotenheid van A_E word dan gebruik om die volgende te bewys:

STELLING 1.24

$\langle\mathfrak{A},\mathfrak{B}\rangle$ *is gesamentlik geslote.*

STELLING 1.25

$S(t)$ *is 'n B-evolusie van klas* (A) *en tipe* L-A. *Die paar* $\langle\mathfrak{A},\mathfrak{B}\rangle$ *van operatore is die genererende paar van* $S(t)$.

OPMERKING:

'n B-evolusie is van klas (A) as die geassosieerde semi=groep $E(t) = BS(t)$ van klas (A) is. [6, p.4]

Ons sien dus dat daar wel 'n operator B gekonstrueer is, sodanig dat

$$E(t) = BS(t).$$

1.3 OORSIG OOR WERK GEDOEN IN HIERDIE VERHANDELING

In hierdie verhandeling word sommige beperkings wat in [6] op $S(t)$ en $E(t)$ gelê word, weggelaat, naamlik

(1) $\|R(\lambda)\|$ is begrens in die halfvlak $\mathrm{Re}\lambda>0$
(2) die afbeelding $t \to S(t)y;\ t>0,\ y \in Y$ is kontinu en
(3) $\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda)$ as $\lambda \to \infty$.

Ons aanvaar dus dat $E(t)$ begrensde, lineêre operatore is, waarvoor die volgende geld:

(a) $E(t)$ is sterk kontinu vir $t>0$,
(b) $Y_o = \cup\{R(E(t)):t>0\}$ is dig in Y en
(c) vir enige komplekse getal λ met positiewe reële ge=deelte, bestaan daar 'n begrensde, lineêre operator $R(\lambda)$ van Y na Y, sodanig dat

(i) $R(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)ydt$ vir $y \in Y_o$ en
(ii) vir elke y in Y geld $\lambda R(\lambda)y \to y$ as $\lambda \to \infty$.

Vir die B-evolusie $S(t)$ geld dit dat daar 'n begrensde, lineêre operator $P(\lambda)$ bestaan, gedefinieer op Y, met waar=des in $D(B)$ in X, sodanig dat

(i) $P(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)ydt;\ \mathrm{Re}\lambda>0,\ y \in Y_o$ en
(ii) $BP(\lambda)y = R(\lambda)y;\ y \in Y$.

Die infinitesimale operator A_o van die B-evolusie $S(t)$ word soos in [6] gedefinieer:

$$A_h x := h^{-1}[BS(h)B - B]x;\ x \in D(B),\ h>0$$

en

$$x \in D(A_o) \text{ as } A_o x := \lim_{h\to 0} A_h x \text{ bestaan.}$$

Daar sal aangetoon word dat die resultate verkry in [6], soos uiteengesit in Afdeling 1.2 van hierdie hoofstuk, tot en met Stelling 1.11 dieselfde bly as ons die drie genoemde voorwaardes weglaat. Hierdie drie aannames speel dus geen rol in Stellings 1.1 tot 1.11 nie.

Ons sal egter in Stelling 2.16 sien dat Stelling 1.5 met behulp van direkte berekening uitgebrei kan word na:

Vir $y \in B[\mathfrak{D}] \cap Y_o$, *waar* $\mathfrak{D} = P(\lambda)[Y]$, *geld*

$$u(t) = S(t)y \in \mathfrak{D}_o$$

en $u(t)$ *bevredig die vergelykings*

$$D_t[Bu(t)] = A_{oo}u(t)$$

$$Bu|_{t=o} = y.$$

In Stelling 2.13 sal bewys word dat die operator $\lambda\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ (met $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ gedefinieer soos in Afdeling 1.2) weer eens inverteerbaar is, vir $P(\lambda)[Y]$ op Y afbeeld en dat

$$(\lambda\mathfrak{B}-\mathfrak{A})^{-1} = P(\lambda).$$

Uit die definisie van $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ volg dat $\langle\mathfrak{A},\mathfrak{B}\rangle$ 'n geslote paar is en *die* operatore sal weer eens die gewysigde operatore van die B-evolusie genoem word. Aangesien $S(t)$ *nie* sterk kontinu is vir $t>0$ nie, kan ons *nie* bewys dat $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ vir $S(t)$ uniek bepaal nie, en daar sal dus nie sprake wees van 'n genererende paar van $S(t)$ nie.

In Hoofstuk 3 word die koppeling tussen die operatore $S(t)$ en $E(t)$ beskou. In Stelling 3.1.1 sal ons sien dat die koppeling tussen die B-*evolusie* $S(t)$ en die *geassosieerde semigroep* $E(t) = BS(t)$, naamlik

$$S(t) = CE(t)$$

van so 'n aard is, dat C nie noodwendig begrens is nie.
Ons het naamlik die volgende bewys:

Daar bestaan 'n lineêre operator C, *sodanig dat*

$$C = C_0 \dotplus C_1 \text{ op } Y_0 + R(\lambda)[Y],$$

waar

$$C_1R(\lambda) = P(\lambda) \text{ op } Y;\ \mathrm{Re}\lambda>0$$

en

$$C_0E(t) = S(t) \text{ op } Y;\ t>0.$$

Aangesien die operator C nie begrens is nie, sal ons nie uit $S(t) = CE(t)$ kan bewys dat $S(t)$ sterk kontinu is vir $t>0$, soos in Opmerking 1.16 opgemerk is nie.

Die *een-eenduidigheid van* C_1 *op* $R(\lambda)[Y]$ *en* C_0 *op* Y_0 sal in Stelling 3.1.3 bewys word, deur te aanvaar dat $S(t)$ nie-singulier is en $P(\lambda)$ een-eenduidig vir 'n spesifieke λ met $\mathrm{Re}\lambda>0$.

As ons die volgende notasie invoer:

$$B_1 := (C_1)^{-1} \text{ op } P(\lambda)[Y]$$
$$B_0 := (C_0)^{-1} \text{ op } C[Y_0],$$

sal ons in Stelling 3.1.4 sien dat B die representasie

$$B = B_0 \dotplus B_1$$

op $C[Y_0] + P(\lambda)[Y]$ het. Hierdie resultaat stem ooreen met Stelling 1.19(b).

In Afdeling 3.2 aanvaar ons dat die enigste verband tussen 'n familie begrensde, lineêre operatore $\{S(t):t>0\}$ van Y na X en 'n semigroep $\{E(t):t>0\}$ van begrensde, lineêre opera= tore in Y *die* van *empatie* is, *i.e.*

$$S(t+s) = S(s)E(t) = S(t)E(s)$$

vir alle positiewe s en t.

In Stelling 3.2.9 sal ons sien dat as $R(\lambda)$, die Laplace-transformasie van $E(t)$, inverteerbaar is vir ten minste *een* λ met $\mathrm{Re}\lambda>0$, *dan bestaan daar lineêre operatore* C_1, *gedefinieer op* $R(\lambda)[Y]$ *en* C_0, *gedefinieer op* Y_0, *sodanig dat*

$$C_1R(\lambda) = P(\lambda) \textit{ op } Y;\ \mathrm{Re}\lambda>0$$

en

$$S(t) = C_0E(t) \textit{ op } Y;\ t>0.$$

Hierdie operatore C_1 en C_0 is beide een-eenduidig as ons aanvaar dat $P(\lambda)$ inverteerbaar is vir 'n spesifieke λ met positiewe reële gedeelte en dat $S(t)$ nie-singulier is.

In Stelling 3.2.10 sal ons sien dat $S(t)$ 'n B-evolusie is, waar die operator B soos volg gedefinieer word:

$$B := B_0 \dotplus B_1 \text{ op } C[Y_0] + P(\lambda)[Y],$$

waar

$$B_1 = (C_1)^{-1} \text{ op } P(\lambda)[Y] \text{ en}$$
$$B_0 = (C_0)^{-1} \text{ op } C[Y_0].$$

Die vraag ontstaan nou watter invloed die weglating van die voorwaardes

(1) $\|R(\lambda)\|$ is begrens in die halfvlak $\mathrm{Re}\lambda>0$
(2) die afbeelding $t \to S(t)y$; $t>0$, $y \in Y$ is kontinu en
(3) $\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda)$ as $\lambda \to \infty$,

op ons teorie het.

Aangesien die voorwaarde

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda)y = y \text{ vir elke } y \text{ in } Y$$

ekwivalent is aan

$$\|\lambda R(\lambda)\| = O(1) \text{ as } \lambda \to \infty \text{ [3, p.322-323]},$$

volg, *as* C *begrens* is, dat

$$\begin{aligned}\|\lambda P(\lambda)\| &= \|\lambda CR(\lambda)\| \\ &\leq \|C\|\ \|\lambda R(\lambda)\| \\ &\leq M \quad \text{as } \lambda \to \infty\end{aligned}$$

en dus volg:

$$\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda) \text{ as } \lambda \to \infty.$$

Die weglating van hierdie voorwaarde impliseer dus dat die operator C, wat ons in Stelling 3.1.1 sal konstrueer, nie noodwendig begrens is nie. Indien hierdie voorwaarde *nie* weggelaat word nie, sal presies dieselfde resultate as in die L-A teorie verkry word, aangesien die sterk konti= nuïteit van $S(t)$ dan sal volg uit $S(t) = CE(t)$ vir $t>0$ en die feit dat C begrens is en $E(t)$ sterk kontinu.

As ons *net* die voorwaarde

$$\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda) \text{ as } \lambda \to \infty$$

sou weglaat, sou ons kon bewys dat die operatore $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ vir $S(t)$ uniek bepaal en die paar $\langle\mathfrak{A},\mathfrak{B}\rangle$ is dan die genererende paar van die B-evolusie $S(t)$.

Presies dieselfde resultate sal verkry word as ons aanvaar dat $E(t)$ 'n semigroep van klas (A) is. Die verskille tussen hierdie nuwe teorie en *die* soos beskryf in [6] lê dus slegs in die feit dat $S(t)$ nie meer 'n B-evolusie van tipe L-A is nie.

HOOFSTUK 2 EIENSKAPPE VAN B-EVOLUSIES

In hierdie hoofstuk word 'n teorie van B-evolusies, wat soortgelyk aan *die* in [6] is, ontwikkel. Die drie voor=waardes, soos genoem in Afdeling 1.3, word weggelaat en dus is $E(t)$ nie meer 'n semigroep van klas (A) nie en $S(t)$ nie meer 'n B-evolusie van tipe L-A nie.

Laat X en Y komplekse Banachruimtes wees en B 'n lineêre operator met definisieversameling $D(B)$ in X en waarde=versameling $R(B)$ in Y. $S(t)$ stel 'n B-evolusie voor, *i.e.* $\{S(t):t>0\}$ is 'n versameling begrensde, lineêre operatore gedefinieer op Y sodanig dat

$$S(t)[Y] \subset D(B)$$

en

$$S(t+s) = S(s)BS(t)$$

vir alle positiewe s en t.

Geassosieer met $S(t)$ is die semigroep $\{E(t):t>0\}$ van begrensde, lineêre operatore in Y, gedefinieer deur

$$E(t) = BS(t);\ t>0.$$

en waarvoor geld:

(2.1) $E(t)$ is sterk kontinu vir $t>0$,

(2.2) $Y_0 = \cup\{R(E(t)):t>0\}$ is dig in Y en

(2.3) vir enige komplekse getal λ met positiewe reële ge=deelte, bestaan die "*Laplace-transformasie*" $R(\lambda)$ van $E(t)$ in die volgende sin: $R(\lambda)$ is 'n begrensde, lineêre opera=tor van Y na Y, sodanig dat

(i) $R(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt$ vir $y \in Y_0$ en

(ii) vir elke y in Y geld $\lambda R(\lambda)y \to y$ as $\lambda \to \infty$.

Die Laplace-transformasietegniek speel 'n baie groot rol in die analise van B-evolusies en ons aanvaar die volgende ten opsigte van $S(t)$:

Daar bestaan 'n begrensde, lineêre operator $P(\lambda)$ gedefinieer op Y met waardeversameling in $D(B) \subset X$, sodanig dat

(i) $P(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)y\,dt$; $\mathrm{Re}\lambda>0$, $y \in Y_0$ en
(ii) $BP(\lambda)y = R(\lambda)y$, waar $y \in Y$.

Hieruit en uit eienskap (2.3) volg dat

(2.4) $$B\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)y\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}BS(t)y\,dt \text{ en}$$

(2.5) $$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda BP(\lambda)y = y, \text{ waar } y \in Y.$$

Die infinitesimale operator A_0 van $S(t)$ word soos voorheen gedefinieer:

$$A_h x := h^{-1}[BS(h)B - B]x;\ x \in D(B),\ h>0$$

en

$$x \in D(A_0) \text{ as } A_0 x := \lim_{h\to 0} A_h x \text{ bestaan.}$$

In resultate 2.1, 2.4, 2.5 en 2.6 word aandag geskenk aan die gedrag van die Laplace-transformasie $P(\lambda)$ van die B-evolusie $S(t)$. As $S(t)$ van tipe L-A is, bly hierdie vier resultate onveranderd.

STELLING 2.1

$S(t)BP(\lambda)y = P(\lambda)BS(t)y$ *as* $y \in Y$, $\mathrm{Re}\lambda>0$ *en* $t>0$.

BEWYS:

Vir enige y in Y_0 geld

$$
\begin{aligned}
S(t)BP(\lambda)y &= S(t)B\int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)y\,dr \\
&= S(t)\int_0^\infty e^{-\lambda r}BS(r)y\,dr \quad \text{(uit (2.4))} \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda r}S(t)BS(r)y\,dr \\
&\qquad\qquad \text{(uit [1, Stelling 2.19(c), p.113])} \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda r}S(t+r)y\,dr \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)BS(t)y\,dr \\
&= P(\lambda)BS(t)y.
\end{aligned}
$$

Die resultaat is dus waar in Y_0. Omdat Y_0 dig is in die ruimte Y, bestaan daar vir elke y in Y 'n ry (y_n) in Y_0, sodanig dat $y_n \to y$.

Dus geld $S(t)BP(\lambda)y_n = P(\lambda)BS(t)y_n$ vir $n = 1,2,3...$

Aangesien die operatore $S(t)$, $BP(\lambda) = R(\lambda)$, $P(\lambda)$ en $BS(t) = E(t)$ almal begrensde, lineêre operatore is, volg:

$$\lim_{n\to\infty} S(t)BP(\lambda)y_n = S(t)BP(\lambda)y$$

en

$$\lim_{n\to\infty} P(\lambda)BS(t)y_n = P(\lambda)BS(t)y$$

en die resultaat is bewys.

OPMERKING 2.2

In die volgende stelling het ons die volgende notasie nodig:

$\mathcal{L}[f(t)](\mu)$ dui die Laplace-transformasie van $f(t)$ aan,

$$\textit{i.e.}\ \mathcal{L}[f(t)](\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu t} f(t)\,dt$$

en die funksie $f * g$ is die konvolusie van f en g,

$$\textit{i.e.}\ (f * g)(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma-t)g(t)\,dt$$

Uit die konvolusiestelling vir Laplace-transformasies [10, p.347] volg: $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$.

In Stelling 2.4 sal ons egter te make hê met 'n meer ingewikkelde konvolusie, naamlik $\mathcal{L}[e^{\mu t} * S(t)y]$, waar $S(t)y \in X$ en dus nie reëel- of komplekswaardig is nie. Ons benodig dan die volgende hulpstelling:

HULPSTELLING 2.3

$\mathcal{L}[f * x] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[x]$, waar f 'n reëel- of komplekswaardige funksie en $x : t \to x(t)$ 'n funksie met waardes in X is.

BEWYS:

Neem enige kontinue, lineêre funksionaal ϕ op X,

$$\text{i.e. } \phi : X \to \mathbb{C}.$$

Dit volg nou dat

$$\begin{aligned}
\phi(f * x)(\sigma) &= \phi \int_0^\sigma f(\sigma - t)x(t)dt \\
&= \int_0^\sigma f(\sigma - t)\phi x(t)dt \\
&= (f * \phi x)(\sigma)
\end{aligned}$$

'n Kontinue, lineêre funksionaal op 'n genormeerde ruimte is ook 'n begrensde, lineêre funksionaal [4, Stelling 2.8-3, p.104] en dit volg uit [1, Stelling 2.19(c), p.113] dat

$$\mathcal{L}[\phi x] = \phi\mathcal{L}[x]$$

en

$$\mathcal{L}[\phi(f * x)] = \phi\mathcal{L}[f * x].$$

Uit die Konvolusiestelling volg dat

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\phi(f * x)] &= \mathcal{L}(f * \phi x) \\
&= \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[\phi x]
\end{aligned}$$

en dus geld

$$\begin{aligned}
\phi\mathcal{L}[f * x] &= \mathcal{L}[f]\phi\mathcal{L}[x] \\
&= \phi\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[x].
\end{aligned}$$

Omdat ϕ arbitrêr is, is die resultaat bewys.

STELLING 2.4 (Veralgemeende resolventvergelyking)

Vir λ *en* μ *met positiewe reële gedeeltes, sodanig dat* $\mathrm{Re}\lambda \neq \mathrm{Re}\mu$, *geld*

$$P(\mu) = P(\lambda) + (\lambda - \mu)P(\mu)BP(\lambda).$$

BEWYS:

Ons bewys eers dat die identiteit waar is in die digte deelruimte Y_o. Net soos in die bewys van Stelling 2.1, kan die resultaat dan met behulp van kontinuïteit uitgebrei word na die hele ruimte Y.

Ons gebruik die feit dat $BP(\lambda)y \in Y_o$ *as* $y \in Y_o$, wat volg uit Stelling 2.1.

Neem enige y in Y_o.

$$\begin{aligned}
P(\mu)BP(\lambda)y &= P(\mu)B\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)y dt \\
&= P(\mu)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, BS(t)y dt \text{ (uit Eienskap (2.4))} \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu r}\, S(r) \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, BS(t)y dt\, dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\mu r}\, e^{-\lambda t}\, S(r+t)y dt\, dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\mu(r+t)}\, e^{(\mu-\lambda)t}\, S(r+t)y dt\, dr
\end{aligned}$$

Met behulp van die substitusie

$$r+t = \tau$$
$$t = \sigma$$

en as ons aanvaar dat $\mathrm{Re}\lambda > \mathrm{Re}\mu > 0$, kry ons dat

$$\begin{aligned}
P(\mu)BP(\lambda)y &= \int_0^\infty \int_\sigma^\infty e^{-\mu\tau}\, e^{-(\lambda-\mu)\sigma}\, S(\tau)y d\tau\, d\sigma \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\mu\tau}\, e^{-(\lambda-\mu)\sigma}\, S(\tau)y d\tau\, d\sigma \\
&\quad - \int_0^\infty \int_0^\sigma e^{-\mu\tau}\, e^{-(\lambda-\mu)\sigma}\, S(\tau)y d\tau\, d\sigma \\
&= \int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)\sigma} \int_0^\infty e^{-\mu\tau}\, S(\tau)y d\tau\, d\sigma \\
&\quad - \int_0^\infty e^{-\sigma\lambda} \int_0^\sigma e^{\mu(\sigma-\tau)}\, S(\tau)y d\tau\, d\sigma \\
&= P(\mu)y \int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)\sigma}\, d\sigma - \mathcal{L}[e^{\mu t} * S(t)y](\lambda)
\end{aligned}$$

$$= P(\mu)y \int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)\sigma} d\sigma - \mathcal{L}[e^{\mu t}](\lambda)\mathcal{L}[S(t)y](\lambda)$$

(uit Hulpstelling 2.3)

$$= P(\mu)y \int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)\sigma}\, d\sigma - \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{\mu t}dt\ P(\lambda)y$$

$$= P(\mu)y(\lambda-\mu)^{-1} - P(\lambda)y \int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)t}\, dt$$

$$= P(\mu)y(\lambda-\mu)^{-1} - P(\lambda)y(\lambda-\mu)^{-1}$$

Dit volg dus dat

$$P(\mu)y - P(\lambda)y = (\lambda - \mu)P(\mu)BP(\lambda)y$$

Die geval $\mathrm{Re}\mu > \mathrm{Re}\lambda > 0$ is simmetries en die resultaat volg.

GEVOLG 2.5

$P(\lambda)$ *en* $P(\mu)$ *is kommutatief om* B,

$$i.e.\ P(\lambda)BP(\mu) = P(\mu)BP(\lambda).$$

BEWYS:
Uit Stelling 2.4 volg:

$$P(\lambda) - P(\mu) = (\mu - \lambda)P(\lambda)BP(\mu)$$
$$P(\mu) - P(\lambda) = (\lambda - \mu)P(\mu)BP(\lambda)$$

As ons hierdie twee vergelykings bymekaartel, kry ons

$$0 = (\mu - \lambda)P(\lambda)BP(\mu) + (\lambda - \mu)P(\mu)BP(\lambda),$$

i.e. $(\mu - \lambda)P(\lambda)BP(\mu) = (\mu - \lambda)P(\mu)BP(\lambda)$,

i.e. $P(\lambda)BP(\mu) = P(\mu)BP(\lambda)$.

GEVOLG 2.6

$P(\lambda)[Y]$ *en* $P(\lambda)[Y_0]$ *is onafhanklik van* λ.

BEWYS:

Dit volg direk uit die Veralgemeende Resolventvergelyking dat $P(\lambda)[Y]$ onafhanklik van λ is:

Neem enige y in Y.

$$\begin{aligned} P(\lambda)y &= P(\mu)y + (\mu - \lambda)P(\lambda)BP(\mu)y \\ &= P(\mu)y + (\mu - \lambda)P(\mu)BP(\lambda)y \\ &= P(\mu)[y + (\mu - \lambda)BP(\lambda)y] \\ &\in P(\mu)[Y], \end{aligned}$$

i.e. $P(\lambda)[Y] \subset P(\mu)[Y]$ en die resultaat volg.

Ons gebruik die kommutasiereël van Stelling 2.1 om te bewys dat $P(\lambda)[Y_o]$ onafhanklik van λ is:

Neem enige y in Y_o. Net soos hierbo volg dit dat

$$P(\lambda)y = P(\mu)[y + (\mu - \lambda)BP(\lambda)y]$$

Vir elke y in Y_o bestaan daar 'n x in Y, sodanig dat

$$y = E(t)x,$$

i.e.
$$\begin{aligned} BP(\lambda)y &= BP(\lambda)E(t)x \\ &= BP(\lambda)BS(t)x \\ &= BS(t)BP(\lambda)x \quad \text{(uit Stelling 2.1)} \\ &= E(t)BP(\lambda)x \\ &\in Y_o \end{aligned}$$

Dus is $P(\lambda)y \in P(\mu)[Y_o]$ en gevolglik geld

$$P(\lambda)[Y_o] \subset P(\mu)[Y_o].$$

Die resultaat volg.

HULPSTELLING 2.7

$\lim_{t \to 0} E(t)y = y$ *vir alle* $y \in Y_o$ *en* $t>0$.

BEWYS:

Neem enige $y \in Y_0$, *i.e.* $y = E(s)z$, waar $z \in Y$ en $s>0$.

Dus is $E(t)y = E(t)E(s)z = E(t+s)z$

Uit die sterk kontinuïteit van $E(t)$ vir $t>0$, volg nou dat

$$\lim_{t\to 0} E(t)y = \lim_{t\to 0} E(t+s)z = E(s)z = y$$

vir $t>0$.

OPMERKING: Hierdie resultaat geld net so as $E(t)$ 'n semigroep van klas (A) is, maar in die C_0-geval is dit waar in die hele ruimte Y. Die C_0-geval word deur hierdie eienskap gekarakteriseer [3, p.321].

STELLING 2.8

$P(\lambda)$ *beeld* Y_0 *af in* $D(A_0)$ *en*

$$(\lambda B - A_0)P(\lambda)y = y; \; y \in Y_0.$$

BEWYS:

Neem enige y in Y_0.

$A_hP(\lambda)y = A_h\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)ydt$

Omdat $S(h)$ 'n begrensde, lineêre operator is, volg uit Ver=gelyking (2.4) en [1, Stelling 2.19(c), p.113] dat

$$A_hP(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}A_hS(t)ydt$$

Uit die definisie van A_h volg:

$$\begin{aligned} A_hS(t)y &= h^{-1}[BS(h)B-B]S(t)y \\ &= h^{-1}[BS(t+h)-BS(t)]y \\ &= h^{-1}B[S(t+h)-S(t)]y. \end{aligned}$$

Dus is

$$\begin{aligned} A_hP(\lambda)y &= h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}B[S(t+h)-S(t)]ydt \\ &= h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}BS(t+h)ydt - h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}BS(t)ydt. \end{aligned}$$

As ons nou $t+h = \tau$ stel, kry ons

$$A_hP(\lambda)y = h^{-1}\int_h^\infty e^{-\lambda(\tau-h)}BS(\tau)yd\tau - h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}BS(t)ydt$$

$$= h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}BS(t)ydt - h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}BS(t)ydt - h^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}BS(t)ydt$$

$$= h^{-1}(e^{\lambda h}-1)\int_0^\infty e^{-\lambda t}BS(t)ydt - h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}BS(t)ydt$$

As ons die limiet neem waar $h \to 0$, sien ons dat

$$\lim_{h\to 0} A_hP(\lambda)y = \lim_{h\to 0} h^{-1}[e^{\lambda h}-1]BP(\lambda)y - \lim_{h\to 0} h^{-1}e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}BS(t)ydt$$

Uit Hulpstelling 2.7 volg nou dat die funksie $e^{-\lambda t}BS(t)y$ kontinu is op $[0,\infty)$, want $y \in Y_0$.

Laat $\emptyset$ 'n kontinue, lineêre funksionaal wees, sodanig dat

$$\emptyset : Y \to \mathbb{C}.$$

Uit die Tweede Hoofstelling van die Differensiaal- en Integraalrekening, volg:

$$D_x \int_0^x e^{-\lambda t}\emptyset BS(t)ydt = [e^{-\lambda t}\emptyset BS(t)y]_{t=x} = \emptyset e^{-\lambda x}BS(x)y$$

Ook geld

$$D_x \int_0^x e^{-\lambda t}\emptyset BS(t)ydt$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1}\left[\int_0^{x+h} e^{-\lambda t}\emptyset BS(t)ydt - \int_0^x e^{-\lambda t}\emptyset BS(t)ydt\right]$$

$$= \emptyset \lim_{h\to 0} h^{-1}\left[\int_0^{x+h} e^{-\lambda t}BS(t)ydt - \int_0^x e^{-\lambda t}BS(t)ydt\right]$$

Dus geld

$$\phi \lim_{h\to 0} h^{-1}[\int_0^{x+h} e^{-\lambda t}BS(t)ydt - \int_0^{x} e^{-\lambda t}BS(t)ydt]$$
$$= \phi e^{-\lambda x}BS(x)y$$

vir alle ϕ en dus volg dat

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}[\int_0^{x+h} e^{-\lambda t}BS(t)ydt - \int_0^{x} e^{-\lambda t}BS(t)ydt]$$
$$= e^{-\lambda x}BS(x)y$$

Deur $x = 0$ te stel, kry ons dat

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \int_0^{h} e^{-\lambda t}BS(t)ydt = y.$$

Gevolglik bestaan $\lim_{h\to 0} A_h P(\lambda)y$ en

$$A_o P(\lambda)y = \lambda BP(\lambda)y - y,$$

i.e. $(\lambda B - A_o)P(\lambda)y = y$
en $P(\lambda)[Y_o] \subset D(A_o)$.

Die volgende resultaat is 'n direkte gevolg van Stelling 2.8:

GEVOLG 2.9

$P(\lambda)$ *beperk tot* Y_o *is 'n een-eenduidige afbeelding in* $D(A_o)$.

Dit volg dus dat $P(\lambda)$ inverteerbaar is op Y_o [4, p.88, Stelling 2.6-10] en $P(\lambda) = (\lambda B - A_o)^{-1}$ op Y_o.

As ons die volgende notasie invoer:

$$\mathfrak{D}_o = P(\lambda)[Y_o]$$

$$A_{oo} = A_o \text{ se beperking tot } \mathfrak{D}_o$$

$$B_{oo} = B \text{ se beperking tot } \mathfrak{D}_o,$$

dan is $P(\lambda) = (\lambda B_{oo} - A_{oo})^{-1}$.

STELLING 2.10

Die operatore A_{oo} en B_{oo} is gesamentlik afsluitbaar.

Gesamentlike afsluitbaarheid is in Definisie 1.7 van Hoofstuk 1 gedefinieer: A_{oo} en B_{oo} sal gesamentlik afsluitbaar wees indien die lineêre operator

$$\langle A_{oo},B_{oo}\rangle x = \langle A_{oo}x, B_{oo}x\rangle; \quad x \in P(\lambda)[Y_o]$$

afsluitbaar is. Volgens Schechter [8, p.288] is 'n lineêre operator A, gedefinieer op 'n genormeerde ruimte, met waardes in 'n genormeerde ruimte, afsluitbaar as uit

$\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to 0$ en $Ax_n \to y$, volg dat $y = 0$.

Ons gebruik hierdie definisie van afsluitbaarheid in die BEWYS VAN STELLING 2.10:

Laat $\{x_n\}$ 'n ry in $\mathfrak{D}$ wees, sodanig dat

$$x_n \to 0, \quad A_{oo}x_n \to y \text{ en } B_{oo}x_n \to z$$

as $n \to \infty$.

Vir alle λ geld dus dat $(\lambda B_{oo} - A_{oo})x_n \to \lambda z - y$.

Vir alle λ met $\mathrm{Re}\lambda>0$ is $P(\lambda)$ begrens en dus is

$$0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} P(\lambda)(\lambda B_{oo} - A_{oo})x_n = P(\lambda)(\lambda z - y),$$

i.e. $\lambda BP(\lambda)z = BP(\lambda)y$ vir alle λ met $\mathrm{Re}\lambda>0$.

Uit Eienskap (2.5) volg:

$$z = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda BP(\lambda)z$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} BP(\lambda)y$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} [\lambda BP(\lambda)y]/\lambda$$

$$= 0$$

Die resultaat is bewys.

Ons dui nou die gesamentlike afsluiting van A_{oo} en B_{oo} met $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ aan en die definisieversameling daarvan met $\mathfrak{D}$. In die volgende resultaat kry ons 'n verband tussen B en $\mathfrak{B}$, waar $\mathfrak{B}$ 'n uitbreiding van 'n beperking van B is:

STELLING 2.11

$\mathfrak{B} = B$ *se beperking tot* $\mathfrak{D}$.

BEWYS:

Neem $x \in \mathfrak{D}$ en laat $\{x_n\}$ 'n ry in $\mathfrak{D}_o$ wees, sodanig dat

$$x_n \to x, \quad A_{oo}x_n \to \mathfrak{A}x, \quad \text{en } B_{oo}x_n \to \mathfrak{B}x$$

as $n \to \infty$.

Laat $\{v_n\}$ in Y_o sodanig wees dat $x_n = P(\lambda)v_n$; $\mathrm{Re}\lambda>0$. Ons weet dat $P(\lambda)$ se beperking tot Y_o gelyk is aan

$$(\lambda B_{oo} - A_{oo})^{-1},$$

i.e. $v_n = (\lambda B_{oo} - A_{oo})x_n \to (\lambda\mathfrak{B} - \mathfrak{A})x$.

Stel $v := (\lambda\mathfrak{B} - \mathfrak{A})x$. Dan is $\lim_{n\to\infty} v_n = v$.

Omdat $P(\lambda)$ begrens is vir $\mathrm{Re}\lambda>0$, volg:

$$x_n = P(\lambda)v_n \to P(\lambda)v = x$$

i.e. $\mathfrak{B}x = \mathfrak{B}P(\lambda)v$

$$= \lim_{n\to\infty} B_{oo}P(\lambda)v_n, \text{ want } P(\lambda)v_n \in \mathfrak{D}_o$$

$$= \lim_{n\to\infty} BP(\lambda)v_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} R(\lambda)v_n$$

$= R(\lambda)v$, want $R(\lambda)$ is begrens as $\mathrm{Re}\lambda>0$.

$= BP(\lambda)v$

$= Bx$

en die resultaat is bewys.

HULPSTELLING 2.12

As $\mathrm{Re}\lambda>0$, *dan is*

$$\mathfrak{A}P(\lambda)y = \lambda\mathfrak{B}P(\lambda)y - y;\ y \in Y$$

en $\mathfrak{D} = P(\lambda)[Y]$.

BEWYS:

Ons weet dat vir $y \in Y_o$ geld $(\lambda B_{oo} - A_{oo})P(\lambda)y = y$.

Neem nou 'n ry $\{y_n\}$ in Y_o, sodanig dat

$$y_n \to y \text{ in } Y \text{ as } n \to \infty,$$

i.e. $(\lambda B_{oo} - A_{oo})P(\lambda)y_n = y_n$

en $A_{oo}P(\lambda)y_n = \lambda B_{oo}P(\lambda)y_n - y_n$.

Omdat $R(\lambda) = B_{oo}P(\lambda)$ begrens is vir alle λ met $\mathrm{Re}\lambda > 0$, *bestaan* die limiet

$$\lim_{n\to\infty} A_{oo}P(\lambda)y_n = \lim_{n\to\infty} [\lambda B_{oo}P(\lambda)y_n - y_n]$$

en aangesien $P(\lambda)y_n \in \mathfrak{D}_o$, volg $\mathfrak{A}P(\lambda)y = \lambda\mathfrak{B}P(\lambda)y - y$.

Gevolglik is

$$(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})P(\lambda)y = y \text{ vir alle } y \in Y;\ \mathrm{Re}\lambda>0.$$

Ons wil nou bewys dat $\mathcal{D} = P(\lambda)[Y]$.

Neem enige $x \in \mathcal{D}$ en laat $\{x_n\}$ 'n ry in $\mathcal{D}_o$ wees sodanig dat

$$x_n \to x,\ A_{oo}x_n \to \mathcal{A}x \text{ en } B_{oo}x_n \to \mathcal{B}x$$

as $n \to \infty$.

As $\{x_n\}$ 'n ry in $\mathcal{D}_o$ is, volg dit dat daar 'n ry $\{v_n\}$ in Y_o bestaan, sodanig dat $x_n = P(\lambda)v_n;\ n = 1,2,3...$

$$\begin{aligned}(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})x &= \lim_{n\to\infty} (\lambda B_{oo} - A_{oo})x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (\lambda B_{oo} - A_{oo})P(\lambda)v_n \\ &= \lim_{n\to\infty} v_n := v \in Y.\end{aligned}$$

Aangesien $P(\lambda)$ begrens is vir alle λ met positiewe reële gedeeltes, volg:

$$x_n = P(\lambda)v_n \to P(\lambda)v,$$

i.e. $x = P(\lambda)v$ en dus is $\mathcal{D} = P(\lambda)[Y]$.

Die volgende resultaat is nou direk:

STELLING 2.13

Vir λ met positiewe reële gedeelte, is die operator $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$ inverteerbaar, beeld $\mathcal{D}$ af op Y en

$$(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1} = P(\lambda).$$

Uit Definisie 1.7 van Afdeling 1.2 volg dat die operatore $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ 'n geslote paar vorm, soos gedefinieer in Definisie 1.6. Ons noem die operatore $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ die *gewysigde operatore* van die B-evolusie $S(t)$.

OPMERKING 2.14:

In Hoofstuk 1 het ons opgemerk (Opmerking 1.12) dat die sterk kontinuïteit van $S(t)$ nodig is om te bewys dat hierdie operatore vir $S(t)$ uniek bepaal. As ons dus sou aanvaar dat die afbeelding

$$t \to S(t)y; \ t>0, \ y \in Y$$

kontinu is, kan ons bewys dat $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ vir $S(t)$ uniek bepaal:

STELLING 2.15

As die B-evolusies $S(t)$ *en* $T(t)$ *sterk kontinu is vir* $t>0$ *en dieselfde gewysigde operatore* $\mathfrak{A}$ *en* $\mathfrak{B}$ *het, dan is hulle identies.*

BEWYS:

Vir y in Y_0 geld

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)y\,dt = (\lambda\mathfrak{B} - \mathfrak{A})^{-1}y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)y\,dt.$$

Uit die sterk kontinuïteit van $S(t)$ en $T(t)$ volg dat

$$S(t)y = T(t)y; \ t>0$$

vir alle y in Y_0 [2, Stelling 1.3, p.100] en omdat Y_0 dig is in Y, is

$$S(t) = T(t) \text{ op } Y.$$

Ons kan dus in hierdie geval, anders as wanneer $S(t)$ van tipe L-A is, nie van 'n genererende paar van $S(t)$ praat nie.

Beskou vervolgens die evolusieprobleem:

$$D_t[Bu(t)] = Au(t)$$
$$Bu(t)|_{t=0} = y.$$

Die volgende resultaat gee vir ons 'n aanduiding van wanneer die funksie $S(t)y$ 'n oplossing van *die* probleem is. Ons het hier 'n uitbreiding van Stelling 1.5 van Hoofstuk 1.

STELLING 2.16

As $y \in B[\mathfrak{D}]$ *en* $t>0$, *dan is* $u(t) = S(t)y$ *'n element van* $\mathfrak{D}_0$. *As* $y \in B[\mathfrak{D}] \cap Y_0$, *dan is* $u(t)$ *'n oplossing van die evolusieprobleem*

$$D_t[Bu(t)] = A_{00}u(t)$$
$$Bu(t)|_{t=0} = y.$$

BEWYS:

As $y \in B[\mathfrak{D}]$, bestaan daar 'n x in Y, sodanig dat

$$y = BP(\lambda)x.$$

Uit Stelling 2.1 volg nou:

$$\begin{aligned} u(t) &= S(t)y \\ &= S(t)BP(\lambda)x \\ &= P(\lambda)BS(t)x \\ &= P(\lambda)E(t)x \\ &\in P(\lambda)[Y_0] \\ &= \mathfrak{D}_0. \end{aligned}$$

Verder geld

$$A_{oo}u(t) = \lim_{h\to 0} A_h u(t)$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1}[BS(h)B - B]S(t)y \quad (y \in B[\mathfrak{D}])$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1}[BS(h)B - B]S(t)BP(\lambda)x \quad (x \in Y)$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1}[BS(h)B - B]P(\lambda)BS(t)x.$$

$$D_t[Bu(t)] = \lim_{h\to 0} h^{-1}[Bu(t+h)B - Bu(t)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1}[BS(t+h)B - BS(t)]y$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1}[BS(h)BS(t) - BS(t)]BP(\lambda)x$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1}[BS(h)BP(\lambda) - BP(\lambda)]BS(t)x$$

$$= A_{oo}u(t).$$

Uit Hulpstelling 2.7 sien ons dat

$$\lim_{t\to 0} Bu(t) = \lim_{t\to 0} BS(t)y = y \text{ as } y \in Y_o.$$

Dit volg dus dat as $y \in B[\mathfrak{D}]$, dan is $u(t) = S(t)y$ 'n op= lossing van $D_t[Bu(t)] = A_{oo}u(t)$

en as $y \in Y_o$, volg dat $Bu(t)|_{t=o} = y$,

en dus, as $y \in B[\mathfrak{D}] \cap Y_o$, bevredig $S(t)y$ wel die gegewe evolusievergelykings.

In [6] word 'n versameling beginvoorwaardes, waarvoor $S(t)y$ 'n oplossing van bogenoemde evolusieprobleem is, gegee, wat moontlik die versameling $B[\mathfrak{D}] \cap Y_o$ kan omvat. *Die* moontlik uitgebreide versameling kan te make hê met die sterker voorwaardes wat ten opsigte van die B-evolusie $S(t)$ gemaak word. [6, Stelling 4.10, p.18].

HOOFSTUK 3 DIE KOPPELING TUSSEN S(t) EN E(t)

3.1 'n ONBEGRENSDE KOPPELOPERATOR C

Die doel van hierdie afdeling is om 'n lineêre operator C te vind, sodanig dat

$$S(t) = CE(t).$$

In die geval waar S(t) van tipe L-A is, het ons gesien dat die voorwaarde

$$\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda) \text{ as } \lambda \to \infty$$

gebruik word om so 'n operator C te vind, wat begrens is. [6, Stelling 4.6, p.16]. In Afdeling 1.3 van Hoofstuk 1 het ons bewys dat as laasgenoemde voorwaarde *nie* geld nie, dan *kan* C nie begrens wees nie.

Ons konstrueer nou in die volgende stelling 'n operator C wat nie begrens is nie, sodanig dat

$$S(t) = CE(t)$$

en

$$P(\lambda) = CR(\lambda).$$

Die som-afbeelding wat in Definisie 1.17 gedefinieer word, asook Hulpstelling 1.18 word hier benodig.

STELLING 3.1.1

Daar bestaan 'n lineêre operator C wat sodanig is dat

$$C = C_0 + C_1 \textit{ op } Y_0 + R(\lambda)[Y],$$

waar $C_1R(\lambda) = P(\lambda)$ *op* Y; $\mathrm{Re}\lambda > 0$

en $C_0E(t) = S(t)$ *op* Y; $t>0$.

BEWYS:

Stel $G_n = nP(n)$; $n = 1,2,3...$

Beskou eerstens die ry $\{G_nR(\lambda)y\}$, waar $y \in Y$ en $Re\lambda>0$.
Uit Gevolg 2.5 weet ons dat

$$P(\lambda)BP(\mu) = P(\mu)BP(\lambda),$$

i.e. $P(\lambda)R(\mu) = P(\mu)R(\lambda)$.

Vir $y \in Y$ en λ met positiewe reële gedeelte, geld dus:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} G_nR(\lambda)y &= \lim_{n\to\infty} nP(n)R(\lambda)y \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\lambda)nR(n)y \\ &= P(\lambda)\lim_{n\to\infty} nR(n)y, \text{ want } P(\lambda) \text{ is begrens} \\ &= P(\lambda)y \text{ (uit eienskap (2.3)(ii))},\end{aligned}$$

i.e. $\{G_n\}$ is konvergent op $R(\lambda)[Y]$.

Definieer nou C_1 op $R(\lambda)[Y]$ deur $C_1z = \lim_{n\to\infty} G_nz$,
i.e. $C_1R(\lambda)y = P(\lambda)y$; $y \in Y$,
i.e. $C_1R(\lambda) = P(\lambda)$ op Y.

Beskou nou die ry $\{G_nE(t)y\}$, waar $y \in Y$ en $t>0$.

$$\begin{aligned}G_nE(t)y &= nP(n)BS(t)y \\ &= nS(t)BP(n)y \text{ (uit Stelling 2.1)} \\ &= S(t)nR(n)y \\ &\to S(t)y \text{ as } n \to \infty, \text{ want } S(t) \text{ is 'n begrensde opera=}\end{aligned}$$

tor.

Dus is $\{G_n\}$ konvergent op Y_0.

Definieer nou C_0 op Y_0 deur $C_0z = \lim_{n\to\infty} G_nz$

Uit $C_0E(t)y = \lim_{n\to\infty} G_nE(t)y = S(t)y$ vir $y \in Y$, volg dat

$$C_0E(t) = S(t) \text{ op } Y.$$

Stel nou $C = C_0 + C_1$ op $Y_0 + R(\lambda)[Y]$. Die lineariteit van C volg uit *die* van $P(\lambda)$.

HULPSTELLING 3.1.2

As $P(\lambda)$ *een-eenduidig is vir ten minste een* λ *met positiewe reële gedeelte, dan is* $P(\lambda)$ *een-eenduidig vir alle* λ *met* $\text{Re}\lambda>0$.

BEWYS:

Veronderstel $P(\lambda)$ is een-eenduidig vir $\lambda = \mu$, met $\text{Re}\mu>0$. Neem nou enige λ met $\text{Re}\lambda>0$, sodanig dat $P(\lambda)y = 0$, waar $y \in Y$. Uit die Algemene Resolventvergelyking van Stelling 2.4 volg:

$$\begin{aligned} 0 &= P(\lambda)y \\ &= P(\mu)y + (\mu - \lambda)P(\lambda)BP(\mu)y \\ &= P(\mu)y + (\mu - \lambda)P(\mu)BP(\lambda)y, \text{ uit Gevolg 2.5} \\ &= P(\mu)y \end{aligned}$$

en $y = 0$ volg.

Hierdie hulpstelling, asook Definisie 1.22 word benodig in die bewys van

STELLING 3.1.3

(a) *As* $P(\lambda)$ *inverteerbaar is vir 'n spesifieke* λ *met* $\text{Re}\lambda>0$, *dan is* C_1 *een-eenduidig op* $R(\lambda)[Y]$.

(b) *As* $S(t)$ *nie-singulier is, dan is* C_0 *een-eenduidig op* Y_0.

BEWYS:

(a) Neem enige z in $R(\lambda)[Y]$, sodanig dat $C_1 z = 0$;

i.e. $C_1 R(\lambda)y = 0$, waar $y \in Y$,

i.e. $P(\lambda)y = 0$.

Uit Hulpstelling 3.1.2 volg nou dat $y = 0$ en die resultaat is bewys.

(b) Neem enige z in Y_o, sodanig dat $C_o z = 0$. Vir elke z in Y_o, bestaan daar 'n y in Y_o, sodanig dat $z = E(t)y$, $t>0$. Omdat $S(t)$ nie-singulier is, weet ons uit Definisie 1.22 dat $\lim_{t\to 0} S(t)y$ bestaan vir alle y in Y_o;

$$\textit{i.e.}\ \lim_{t\to 0} S(t)y = \lim_{t\to 0} C_o E(t)y$$

$$= \lim_{t\to 0} C_o z$$

$$= 0, \text{ waar } y \in Y_o.$$

Uit die nie-singulariteit van $S(t)$ volg nou dat $y = 0$ en ons het dus $z = 0$.

C_o is dus een-eenduidig op Y_o en daarom ook inverteerbaar.

Aanvaar nou dat

(1) $P(\lambda)$ een-eenduidig is vir ten minste een λ met $\mathrm{Re}\lambda>0$ en

(2) dat $S(t)$ nie-singulier is.

Stel vervolgens $B_1 = (C_1)^{-1}$ op $P(\lambda)[Y]$

en $B_o = (C_o)^{-1}$ op $C[Y_o]$.

STELLING 3.1.4

B *het die representasie*

$$B = B_o \dotplus B_1 \text{ op } C[Y_o] + P(\lambda)[Y],$$

i.e. $Bx = B_o u + B_1 v$, *waar* $x = u + v$,
$u \in C[Y_o]$ *en* $v \in P(\lambda)[Y]$.

BEWYS:
Ons bewys eers dat $C[Y_o] + P(\lambda)[Y] \subset D(B)$.
Neem enige $x \in C[Y_o] + P(\lambda)[Y]$, dus: $x = u + v$, met u in $C[Y_o]$ en v in $P(\lambda)[Y]$;
i.e. $u = CE(t)y$
$= S(t)y$, met y in Y.
Omdat $S(t)[Y] \subset D(B)$, volg $u \in D(B)$.
Ons weet dat $P(\lambda)[Y] \subset D(B)$, d.w.s. $v \in D(B)$.
Gevolglik is $x = u + v$ 'n element van $D(B)$, want $D(B)$ is 'n deelruimte van X. [4, Definisie 2.6-1, p.82]. Dus geld

$$C[Y_o] + P(\lambda)[Y] \subset D(B).$$

Ons bewys vervolgens dat B_1 en B_o beperkings van B is.

Neem $x \in Y_o$, *i.e.* $x = E(t)y$, met $y \in Y$ en
$Cx = CE(t)y = S(t)y$
Dit geld egter ook dat
$Cx = C_oE(t)y = C_oBS(t)y$
en dus is
$S(t)y = C_oBS(t)y$,
i.e. $(C_o)^{-1}S(t)y = BS(t)y$,
i.e. $(C_o)^{-1} = B$ op $S(t)[Y]$.

Dit volg dus dat B_o gelyk is aan B se beperking tot $S(t)[Y] = C[Y_o]$.

Ons weet dat $P(\lambda)[Y] = CR(\lambda)[Y]$. Neem enige x in $R(\lambda)[Y]$, *i.e.* $Cx = CR(\lambda)y = P(\lambda)y$, met y in Y.
Ook volg dat $CR(\lambda)y = C_1R(\lambda)y = C_1BP(\lambda)y$;
i.e. $(C_1)^{-1}P(\lambda)y = BP(\lambda)y$,
i.e. $(C_1)^{-1} = B_1 = B$ op $P(\lambda)[Y]$
en ons sien dat B_1 die beperking van B tot $P(\lambda)[Y]$ is.

Hierdie resultaat stem ooreen met Stelling 1.19(b), al is C onbegrens.

3.2 EMPATIE TUSSEN EVOLUSIE-OPERATORE S(t) EN E(t)

Laat $\{S(t):t>0\}$ 'n versameling van begrensde, lineêre operatore van Y na X wees en $\{E(t):t>0\}$ 'n semigroep van begrensde, lineêre operatore in Y.

Aanvaar dat $\{S(t):t>0\}$ in *empatie* is met $\{E(t):t>0\}$, dit wil sê dat

$$S(t+s) = S(t)E(s) = S(s)E(t)$$

vir alle positiewe t en s. (Vergelyk Definisie 1.20)

Die doel van hierdie afdeling is om te bewys dat as hierdie die *enigste* verband tussen $S(t)$ en $E(t)$ is, dan kan daar 'n operator B gekonstrueer word, sodanig dat $E(t) = BS(t)$.

Die volgende aannames word ten opsigte van $E(t)$ en $S(t)$ gemaak:

(3.2.1) $E(t)$ is sterk kontinu vir $t>0$,
(3.2.2) $Y_o = \cup\{R(E(t)):t>0\}$ is dig in Y,
(3.2.3) vir enige komplekse getal λ met positiewe reële ge=deelte, bestaan daar 'n begrensde, lineêre operator $R(\lambda)$

van Y na Y, sodanig dat

(i) $R(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}E(t)y\,dt$ vir alle $y \in Y_0$ en

(ii) vir elke y in Y geld $\lambda R(\lambda)y \to y$ as $\lambda \to \infty$,

(3.2.4) vir enige komplekse getal λ met positiewe reële ge=deelte, bestaan daar 'n begrensde, lineêre operator $P(\lambda)$ van Y na X, sodanig dat

$$P(\lambda)y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)y\,dt;\ y \in Y_0.$$

Ons beskou eers 'n paar eienskappe van E(t).

HULPSTELLING 3.2.1

Vir $t>0$ *en* λ *sodanig dat* $\mathrm{Re}\lambda>0$, *geld die kommutasiereël*

$$E(t)R(\lambda)y = R(\lambda)E(t)y$$

vir alle y *in* Y.

BEWYS:

Ons bewys eers dat die vergelyking geld vir alle y in Y_0. Die resultaat kan dan met behulp van kontinuïteit uitgebrei word na die hele ruimte Y, aangesien Y_0 dig is in Y.

Neem $y \in Y_0$. Dan is

$$\begin{aligned} E(t)R(\lambda)y &= E(t)\int_0^\infty e^{-\lambda r}E(r)y\,dr \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda r}E(t)E(r)y\,dr \end{aligned}$$

Die laaste stap is moontlik, aangesien E(t) 'n begrensde, lineêre operator op Y is. [1, Stelling 2.19(c), p.113]

Aangesien $E(t)y \in Y_0$, geld

$$R(\lambda)E(t)y = \int_0^\infty e^{-\lambda r}E(r)E(t)y\,dr$$

en die resultaat volg.

Die volgende resolventvergelyking is 'n bekende resultaat in die Spektraalteorie, en kom onder andere in Dunford en Schwartz [1, Lemma 6, p.568] en Hille en Phillips [3, p.184] voor. *Die* vergelyking kan ook op dieselfde manier as die Veralgemeende Resolventstelling (Stelling 2.4) bewys word, en die bewys word derhalwe weggelaat.

STELLING 3.2.2 (Resolventvergelyking)

Vir λ *en* μ *met positiewe reële gedeeltes, sodanig dat* $\mathrm{Re}\lambda \neq \mathrm{Re}\mu$, *geld*

$$R(\lambda) = R(\mu) + (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

op Y.

Die volgende twee resultate volg direk uit die Resolvent=vergelyking en hulle bewyse word weggelaat.

GEVOLG 3.2.3

$R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$.

Hierdie resultaat word op dieselfde manier as Gevolg 2.5 bewys.

Die notasie: Ker(T) word vervolgens gebruik om die nulruimte van T aan te dui,

$$\textit{i.e.}\ \mathrm{Ker}(T) = \{x \in D(T) \colon Tx = 0\}.$$

GEVOLG 3.2.4

(a) $R(\lambda)[Y]$ *is onafhanklik van* λ.
(b) $\mathrm{Ker}(R(\lambda)) = \mathrm{Ker}(R(\mu))$.

GEVOLG 3.2.5

As $R(\lambda)$ *inverteerbaar is vir ten minste een* λ *met positiewe reële gedeelte, dan is* $R(\lambda)$ *een-eenduidig vir alle* λ *met* $\mathrm{Re}\lambda>0$.

BEWYS:
Veronderstel $R(\lambda)$ is inverteerbaar vir $\lambda = \mu$, met $\mathrm{Re}\mu>0$.
Neem nou enige y in Y en stel $R(\lambda)y = 0$.
Ons het dus $y \in \mathrm{Ker}(R(\lambda)) = \mathrm{Ker}(R(\mu))$ en $R(\mu)y = 0$,
i.e. $y = 0$.
$R(\lambda)$ is dus een-eenduidig en inverteerbaar vir alle λ met positiewe reële gedeeltes.

Vervolgens beskou ons die verband tussen $S(t)$ en $E(t)$.

STELLING 3.2.6 (Veralgemeende resolventstelling)

Vir λ *en* μ *met positiewe reële gedeeltes, sodanig dat* $\mathrm{Re}\lambda \neq \mathrm{Re}\mu$, *geld*

$$P(\mu) - P(\lambda) = (\lambda - \mu)P(\mu)R(\lambda).$$

Om hierdie identiteit te bewys, word die feit dat $R(\lambda)y$ 'n element van Y_o is vir alle y in Y_o, gebruik, wat uit Hulpstelling 3.2.1 volg, asook die feit dat $\{S(t):t>0\}$ en $\{E(t):t>0\}$ in empatie is. Die bewys volg dieselfde trant as *die* van Stelling 2.4 en word derhalwe weggelaat.

Indien $E(t)$ van klas (A) is en die volgende twee aannames ten opsigte van $S(t)$ gemaak word,

(1) $S(t)$ is sterk kontinu vir $t>0$

(2) $\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda)$ as $\lambda \to \infty$,

sal Stelling 3.2.6 en dit wat daaruit volg net so geld (Vergelyk Stelling 1.21).

Uit die Veralgemeende Resolventstelling volg direk:

GEVOLG 3.2.7

(a) *Vir* λ *en* μ *met positiewe reële gedeeltes, sodanig dat* $\mathrm{Re}\lambda \neq \mathrm{Re}\mu$, *geld* $P(\mu)R(\lambda) = P(\lambda)R(\mu)$.
(b) $P(\lambda)[Y]$ *is onafhanklik van* λ.

HULPSTELLING 3.2.8

$S(t)R(\lambda)y = P(\lambda)E(t)y$ *as* $y \in Y$, $\mathrm{Re}\lambda>0$ *en* $t>0$.

BEWYS:
Neem enige y in Y_0. Dan is
$S(t)R(\lambda)y = S(t)\int_0^\infty e^{-\lambda r}E(r)y\,dr = \int_0^\infty e^{-\lambda r}S(t+r)y\,dr$ en
$P(\lambda)E(t)y = \int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)E(t)y\,dr = \int_0^\infty e^{-\lambda r}S(t+r)y\,dr$.
Dit wil sê $S(t)R(\lambda)y = P(\lambda)E(t)y$ vir alle y in Y_0 en die resultaat kan met behulp van kontinuïteit uitgebrei word na die hele ruimte Y.

Hierdie identiteit word nou in die volgende stelling gebruik om 'n lineêre operator C te konstrueer wat sodanig is dat

$$S(t) = CE(t).$$

Die definisie van 'n nie-singuliere operator word ook benodig. (Definisie 1.22)

STELLING 3.2.9

Aanvaar dat $R(\lambda)$ *inverteerbaar is vir ten minste een* λ *met* $\mathrm{Re}\lambda>0$.

(a) *Daar bestaan 'n lineêre operator* C_1 *op* $R(\lambda)[Y]$ *en* C_0 *op* Y_0, *sodanig dat*

$$C_1R(\lambda) = P(\lambda) \text{ op } Y;\ \mathrm{Re}\lambda > 0$$

$$\text{en } C_0E(t) = S(t) \text{ op } Y;\ t>0.$$

(b) *As* $P(\lambda)$ *inverteerbaar is vir 'n spesifieke* λ *met* $\mathrm{Re}\lambda>0$, *dan is* C_1 *een-eenduidig op* $R(\lambda)[Y]$ *en* $P(\lambda)$ *is een-eenduidig vir alle* λ *met* $\mathrm{Re}\lambda>0$.

(c) *As* $S(t)$ *nie-singulier is, dan is* C_0 *een-eenduidig op* Y_0.

BEWYS:

(a)Stel $G_n = nP(n)$; $n = 1,2,3...$

Beskou eerstens die ry $\{G_nR(\lambda)y\}$, waar $y \in Y$ en $\mathrm{Re}\lambda>0$.
Uit Gevolg 3.2.7(a) sien ons dat

$$G_nR(\lambda) = nP(n)R(\lambda)$$
$$= P(\lambda)nR(n)$$

Vir $y \in Y$ en λ met positiewe reële gedeelte, geld dus:

$$\lim_{n\to\infty} G_nR(\lambda)y = \lim_{n\to\infty} P(\lambda)nR(n)y = P(\lambda)y,$$

want $P(\lambda)$ is begrens. Gevolglik is $\{G_n\}$ konvergent op $R(\lambda)[Y]$. Definieer nou C_1 op $R(\lambda)[Y]$ deur $C_1z = \lim_{n\to\infty} G_nz$,
i.e. $C_1R(\lambda)y = P(\lambda)y$; $y \in Y$,
i.e. $C_1R(\lambda) = P(\lambda)$ op Y.

Beskou nou die ry $\{G_nE(t)y\}$, waar $y \in Y$ en $t>0$.

$$G_nE(t)y = nP(n)E(t)y$$
$$= nS(t)R(n)y \text{ (uit Hulpstelling 3.2.8)}$$
$$= S(t)nR(n)y$$
$$\to S(t)y \text{ as } n \to \infty,$$ want $S(t)$ is 'n begrensde operator.

Dus is die ry $\{G_n\}$ konvergent op Y_o.

Definieer nou C_o op Y_o deur $C_o z = \lim\limits_{n\to\infty} G_n z$

Nou geld $C_o E(t)y = \lim\limits_{n\to\infty} G_n E(t)y = S(t)y$ vir $y \in Y$, en
$C_o E(t) = S(t)$ op Y.

Die lineariteit van C_o en C_1 volg uit *die* van $P(\lambda)$.

(b) Veronderstel $P(\lambda)$ is inverteerbaar vir $\lambda = \mu$, $\mathrm{Re}\mu>0$.
Uit $C_1 R(\lambda) = P(\lambda)$ en Gevolg 3.2.5 volg

$$C_1 = P(\lambda)R^{-1}(\lambda)$$

vir alle λ met $\mathrm{Re}\lambda>0$.
Neem nou enige z in $R(\lambda)[Y]$, sodanig dat $C_1 z = 0$,
i.e. $P(\mu)R^{-1}(\mu)z = 0$, waaruit volg $z = 0$. C_1 is dus een-eenduidig op $R(\lambda)[Y]$.

Neem nou enige y in Y en λ met $\mathrm{Re}\lambda>0$, sodanig dat
$P(\lambda)y = 0$,
i.e. $C_1 R(\lambda)y = 0$,
i.e. $R(\lambda)y = 0$,
i.e. $y = 0$.

(c) Neem enige z in Y_o, sodanig dat $C_o z = 0$.
As $z \in Y_o$, volg $z = E(t)x$; $x \in Y_o$, $t>0$.
Uit die nie-singulariteit van $S(t)$ volg dat $\lim\limits_{t\to 0} S(t)y$ bestaan vir alle y in Y_o,

$$\text{i.e. } \lim_{t\to 0} S(t)x = \lim_{t\to 0} C_o E(t)x = \lim_{t\to 0} C_o z = 0$$

en omdat $S(t)$ nie-singulier is, volg $x = 0$ en dus ook $z = 0$.

Die resultaat is bewys.

Stel nou $C = C_0 \dotplus C_1$ op $Y_0 + R(\lambda)[Y]$. Die gevraagde lineêre operator C, wat sodanig is dat $S(t) = CE(t)$, is dus gevind.

As ons sou aanvaar dat

$$\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda) \text{ as } \lambda \to \infty,$$

dan kan ons 'n *begrensde*, lineêre operator C vind, wat ook sodanig is dat

$$S(t) = CE(t);\ t>0$$
$$\text{en } P(\lambda) = CR(\lambda);\ \text{Re}\lambda>0.$$

(Vergelyk Stelling 1.23)

Ons het in Afdeling 1.3 gesien dat as

$$P(\lambda) = CR(\lambda)$$
$$\text{en } \lambda R(\lambda)y \to y \text{ as } \lambda \to \infty, \text{ dan volg:}$$

As C begrens is, dan is $\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda)$ as $\lambda \to \infty$.

Die weglating van die voorwaarde

$$\|P(\lambda)\| = O(1/\lambda) \text{ as } \lambda \to \infty,$$

impliseer dus dat die operator C nie noodwendig begrens is nie.

Aanvaar nou dat $R(\lambda)$ en $P(\lambda)$ beide inverteerbaar is vir ten minste een λ met $\text{Re}\lambda>0$ en dat $S(t)$ nie-singulier is.

Definieer die volgende operatore:

$$B_1 := (C_1)^{-1} \text{ op } P(\lambda)[Y];$$
$$B_0 := (C_0)^{-1} \text{ op } C[Y_0];$$
$$\text{en } B := B_0 \dotplus B_1 \text{ op } C[Y_0] + P(\lambda)[Y].$$

Soos in [7] volg nou dat $S(t)$ 'n B-evolusie is:

STELLING 3.2.10

$S(t)$ *is 'n B-evolusie en* $E(t) = BS(t)$.

BEWYS:

Neem enige y in Y.

$S(t)y = CE(t)y \in C[Y_o] \subset D(B)$ en dus geld $S(t)[Y] \subset D(B)$.

$$\begin{aligned} S(t+s)y &= CE(t+s)y \\ &= CE(t)E(s)y \\ &= S(t)B_oC_oE(s)y \\ &= S(t)BS(s)y, \end{aligned}$$

dit wil sê $S(t)$ is 'n B-evolusie.

Ook geld
$$\begin{aligned} BS(t)y &= BCE(t)y \\ &= B_oC_oE(t)y \\ &= E(t)y \end{aligned}$$
vir alle y in Y.

VERWYSINGS

1. N. Dunford en J.T. Schwartz. *Linear operators Part I* (New York: Interscience, 1964)

2. A. Friedman. *Partial differential equations* (New York: Holt, 1969)

3. E. Hille en R.S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol.31, Providence, R.I.(1957); Hersiene Uitgawe (1974)

4. E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. (New York: John Wiley & Sons, 1978)

5. N. Sauer. Linear evolution equations in two Banach spaces. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A91* (1982), pp.287-303.

6. N. Sauer en J.E. Singleton. *Abel summability and B-evolutions*. Univ. van Suid-Afrika Dept. Wisk., Toeg. Wisk. en Sterrekunde. Navorsingsverslag 11/85, 1985.

7. N. Sauer en J.E. Singleton. *Empathetic evolution operators*. Univ. van Suid-Afrika Dept. Wisk., Toeg. Wisk. en Sterrekunde. Navorsingsverslag 15/85, 1985.

8. M. Schechter. *Principles of functional analysis*. (New York: Academic Press, 1971)

9. R.E. Showalter. *Hilbert space methods for partial differential equations*. (Londen: Pitman, 1977)

10. H.F. Weinberger *A first course in partial differential equations*. (New York: John Wiley & Sons, 1965)