STEURINGSTEORIE VIR EVOLUSIEVERGELYKINGS

deur

Willem George Greybe

Voorgelê ter vervulling van 'n deel van
die vereistes vir die graad

DSc

in die Fakulteit Wis- en Natuurkunde,
Universiteit van Pretoria,

November 1984

BEDANKINGS

Ek wil graag my promotor, prof F D Penning bedank vir sy geduld en volgehoue ondersteuning en raad tydens die navorsing en studie van die onderwerp van hierdie proefskrif. Sonder sy leiding sou hierdie proefskrif nooit die lig gesien het nie.

Ek wil ook my waardering teenoor my vrou en dogters uitspreek vir hulle opofferings en belangstelling tydens my studie.

Laastens wil ek graag mev A E van Rensburg bedank vir haar bereidwilligheid om die tikwerk te doen.

OPGEDRA AAN

Loraine, Sumarié, Azelle, Theresa

en

my Moeder

INHOUDSOPGAWE

HOOFSTUK 1 BASIESE BEGRIPPE

1. DIE STEURINGSPROBLEEM

Laat Ω 'n begrensde oop versameling in $\mathbb{R}^n$ met rand Γ wees. Ons neem aan dat Γ 'n oneindig keer differensieerbare (n-1)-dimensionale variëteit is en dat Ω lokaal aan een kant van Γ lê.

Ons gebruik die volgende bekende notasie vir parsiële afgeleides: As $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 'n multi-indeks is, dan skryf ons

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

Beskou vaste $T > 0$ en skryf $Q = \Omega \times (0,T)$ en $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Vir elke $t \in [0,T]$ definieer ons 'n tweede orde differensiaal-operator $A(t)$ deur

$$A(t)u = \sum_{|p|\leq 2} a_p(x,t)\partial^p u \tag{1.1}$$

Ons neem aan dat die koëffisiëntfunksies a_p oneindig keer differensieerbaar is op $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0,T]$.
Vir elke $t \in [0,T]$ definieer ons 'n eerste orde randoperator $B(t)$ deur

$$B(t)u = \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\partial_j u + b_0(x,t)u \tag{1.2}$$

Ons neem aan dat die koëffisiëntfunksies b_j, $j=0,1,\ldots,n$ oneindig keer differensieerbaar is op $\Gamma \times [0,T] = \bar{\Sigma}$. Ons sal in paragrawe 3 en 4 verdere voorwaardes behandel waaraan die operatore $A(t)$ en $B(t)$ moet voldoen. In hierdie proefskrif beskou ons die stabiliteitseienskappe van die volgende begin-randwaardeprobleem:

$$\begin{aligned} &A(t)u(x,t) + \partial_t u(x,t) = f(x,t) \quad \text{in} \quad Q \\ &B(t)u(x,t) = g(x,t) \quad \text{op} \quad \Sigma \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Laat $A'(t)$ en $B'(t)$ differensiaaloperatore soortgelyk aan $A(t)$ en $B(t)$ met koëffisiënte a'_p en b'_j wees. Ons beskou dan die volgende probleem soortgelyk aan (1.3):

$$\begin{aligned} &A'(t)u'(x,t) + \partial_t u'(x,t) = f'(x,t) \quad \text{in} \quad Q \\ &B'(t)u'(x,t) = g'(x,t) \quad \text{op} \quad \Sigma \\ &u'(x,0) = u'_0(x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ons beskou (1.4) as 'n vaste probleem en (1.3) as 'n veranderlike probleem.

Die steuringsprobleem kom daarop neer om voorwaardes te vind waaronder die oplossing van (1.3) na die oplossing van (1.4) sal konvergeer indien die koëffisiënte en regterkante van (1.3) na dié van (1.4) sal konvergeer. Al hierdie konvergensies moet natuurlik in geskikte funksieruimtes plaasvind. Ons behandel hierdie funksieruimtes in paragraaf 2.

Steuringsteorie vir swak oplossings van die Dirichlet-probleem vir elliptiese vergelykings is deur Sauer beskou in [6]. In [5] is aandag gegee aan klassieke oplossings van die Dirichlet-probleem vir elliptiese vergelykings asook L^2-oplossings van die bybehorende paraboliese probleem.

In [3] is 'n steuringsteorie ontwikkel vir swak en klassieke oplossings van die meer algemene klas van elliptiese randwaardeprobleme wat aan die versoenbaarheidsvoorwaardes van Schechter voldoen. In hierdie proefskrif beskou ons die stabiliteit van die bybehorende paraboliese begin-randwaardeprobleem asook die geval waar die operatore ook tydafhanklik mag wees. Al die begrippe in verband met elliptiese en paraboliese vergelykings word kortliks in paragrawe 3 en 4 beskryf.

In hoofstukke 2, 3 en 4 gebruik ons die metodes van semigroepe en evolusie-operatore om die stabiliteit van vergelyking (1.3) vir die geval waar f en $g = 0$ te bestudeer. In hoofstuk 2 beskou ons die geval waar die operatore A en B slegs ruimte-afhanklik is, in hoofstuk 3 is die operator A ook tydafhanklik en in hoofstuk 4 is die operatore A en B beide ruimte- en tydafhanklik.

In hoofstuk 5 gebruik ons die metode van [4] volume 2, hoofstuk 4 om die stabiliteit van die algemene nie-homogene paraboliese probleem te bestudeer. Aangesien hierdie metode onafhanklik van dié in die vorige hoofstukke is, kan hoofstuk 5 direk na hoofstuk 1 gelees word.

2. FUNKSIERUIMTES

Laat Ω 'n oop versameling in $\mathbb{R}^n$ wees. Ons dui met $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ die ruimte van (ekwivalensie klasse van) funksies u aan wat kwadraties integreerbaar is op Ω met inproduk

$$(u,v)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

en norm gedefinieer deur

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vir $m = 0,1,\ldots$ definieer ons die Sobolev-ruimte $H^m(\Omega)$ as die versameling van alle komplekswaardige funksies u gedefinieer op Ω sô dat $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$ vir alle α met $|\alpha| \leqslant m$, met inproduk

$$(u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha}u\overline{\partial^{\alpha}v}\,dx$$

en norm gedefinieer deur

$$\|u\|_{m,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha}u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1)$$

Vir elke reële getal s definieer ons die Sobolev-ruimte $H^s(\mathbb{R}^n)$ as die versameling van alle stemmige distribusies u in $\mathbb{R}^n$ met die eienskap dat $(1+|\xi|^2)^{s/2} Fu(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ waar Fu die Fourier-transformasie van u is. Ons definieer 'n inproduk en norm in $H^s(\mathbb{R}^n)$ deur

$$(u,v)_{s,\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s Fu(\xi)\overline{Fv(\xi)}\,d\xi \quad \text{en}$$

$$\|u\|_{s,\mathbb{R}^n} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |Fu(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2)$$

Indien ons in (2.1) vir $\Omega = \mathbb{R}^n$ neem en $s=1,2,\ldots$, volg dat die twee norms gedefinieer deur die regterkante van (2.1) en (2.2) ekwivalent is. Om hierdie rede gebruik ons dieselfde notasie aan die linkerkante van (2.1) en (2.2). Ons benodig die volgende ongelykheid in $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$. Laat ϕ enige oneindig keer differensieerbare funksie gedefinieer op $\mathbb{R}^n$ wees waarvan die afgeleides begrens is. Laat m die kleinste heelgetal $\geq s$ wees. Dan bestaan daar 'n $C > 0$ só dat

$$\|\phi u\|_{s,\mathbb{R}^n} \leq C|\phi|_m \|u\|_{s,\mathbb{R}^n} \quad \text{vir alle} \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n) \qquad (2.3)$$

waar $|\phi|_m = \sup\{|\partial^{\alpha}\phi(x)| : |\alpha| \leq m,\ x \in \mathbb{R}^n\}$

<u>Bewys</u>: Die bewys verloop soos in [3], Lemma 2.1:
Die afbeelding $u \to \phi u$ is kontinu van $H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ in $H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ en

$$\|\phi u\|_{m-1,\mathbb{R}^n} \leq C|\phi|_{m-1}\|u\|_{m-1,\mathbb{R}^n} \quad \text{vir alle} \quad u \in H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$$

Ook is die afbeelding $u \to \phi u$ kontinu van $H^m(\mathbb{R}^n)$ in $H^m(\mathbb{R}^n)$ en

$$\|\phi u\|_{m,\mathbb{R}^n} \leq C|\phi|_m \|u\|_{m,\mathbb{R}^n} \quad \text{vir alle} \quad u \in H^m(\mathbb{R}^n)$$

Uit 'n bekende stelling oor interpolasieruimtes, (kyk [4] hoofstuk 1, Stelling 5.1) volg dan dat die afbeelding $u \to \phi u$ kontinu is van $H^s(\mathbb{R}^n)$ in $H^s(\mathbb{R}^n)$ en dat

$$\begin{aligned} \|\phi u\|_{s,\mathbb{R}^n} &\leq C \text{ maks } (|\phi|_{m-1}, |\phi|_m) \|u\|_{s,\mathbb{R}^n} \\ &= C |\phi|_m \|u\|_{s,\mathbb{R}^n} \quad \text{vir alle} \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n) . \qquad \square \end{aligned}$$

Ons beskou vervolgens die geval waar

$$\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_n > 0\}$$

en ons skryf $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$.
In hierdie geval word die rand Γ van Ω gegee deur

$$\mathbb{R}^{n-1}_{x'} = \{(x',0) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\} .$$

Die Sobolev-ruimte $H^s(\Gamma)$, s reëel word dan gedefinieer as die ruimte $H^s(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ soos hierbo.

Sobolev se spoorstelling lui soos volg: Laat $m = 1,2,\ldots$. As $u \in H^m(\Omega)$ dan behoort u ook aan $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ en daar bestaan 'n konstant $C > 0$ só dat

$$\|u\|_{m-\frac{1}{2},\Gamma} \leq C\|u\|_{m,\Omega} \quad \text{vir alle} \quad u \in H^m(\Omega) \tag{2.4}$$

In die algemeen, as Ω 'n begrensde oop versameling is wat aan die vereistes van paragraaf 1 voldoen, word die Sobolev-ruimte $H^s(\Gamma)$ met behulp van die bekende tegniek van lokale koördinate en 'n partisie van die identiteit gedefinieer. Die spoorstelling (2.4) geld ook vir die algemene geval. Vir volledige besonderhede verwys ons na [4], paragraaf 7, hoofstuk 1.

Ons beskou weereens die operatore $A(t)$ en $B(t)$ soos gedefinieer in paragraaf 1. Ons skryf $a = a(x,t)$ en $b = b(x,t)$ vir die stelsels koëffisiënte en definieer vir $k = 0,1,\ldots$ en $\ell = 0,1,\ldots$

$$|a|_{k,\ell} = \sup\{|\partial_x^\alpha \partial_t^j a_p(x,t)| : |p| \leq 2, |\alpha| \leq k, j=0,\ldots,\ell, (x,t) \in \bar{Q}\}$$

en

$$|b|_{k,\ell} = \sup\{|\partial_x^\alpha \partial_t^r b_j(x,t)| : |\alpha| \leq k, r=0,\ldots,\ell, j=0,\ldots,n, (x,t) \in \bar{\Sigma}\}$$

Indien a en b slegs van x afhanklik is, definieer ons die hoeveelhede $|a|_k$ en $|b|_k$, waar die supremum dan slegs oor x geneem word. Soortgelyk kan ons vir elke vaste $t \in [0,T]$ die hoeveelhede $|a(\cdot,t)|_k$ en $|b(\cdot,t)|_k$ definieer, waar die supremum dan weereens slegs oor x geneem word.

Ons verkry nou die volgende afskatting:

Vir $r = 0,1,2,\ldots$ en $t \in [0,T]$ is

$$\begin{aligned} \|A(t)u\|_{r,\Omega} &\leq C|a(\cdot,t)|_r \|u\|_{r+2,\Omega} \\ &\leq C|a|_{r,0} \|u\|_{r+2,\Omega} \qquad (2.5) \end{aligned}$$

vir alle $u \in H^{2+r}(\Omega)$.

Aangesien die bewys redelik eenvoudig is laat ons dit uit.

Vir die randoperatore kry ons die volgende ongelykheid.

Vir $r=0,1,\ldots$ en $t \in [0,T]$ is

$$\begin{aligned} \|B(t)u\|_{r+\frac{1}{2},\Gamma} &\leq C|b(\cdot,t)|_{r+1} \|u\|_{r+2,\Omega} \\ &\leq C|b|_{r+1,0} \|u\|_{r+2,\Omega} \qquad (2.6) \end{aligned}$$

vir alle $u \in H^{2+r}(\Omega)$.

Bewys: Ons neem aan dat $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

Dan is $\Gamma = \mathbb{R}_{x'}^{n-1}$ en dan volg uit (2.4) toegepas op $\mathbb{R}^{n-1}$ dat vir elke $j=1,2,\ldots,n$ is.

$$\begin{aligned}\|b_j\partial_j u\|_{r+\frac{1}{2},\Gamma} &\leqslant C|b(\cdot,t)|_{r+1}\|\partial_j u\|_{r+\frac{1}{2},\Gamma}\\ &\leqslant C|b(\cdot,t)|_{r+1}\|\partial_j u\|_{r+1,\Omega} \qquad \text{(uit 2.4)}\\ &\leqslant C|b(\cdot,t)|_{r+1}\|u\|_{r+2,\Omega}\end{aligned}$$

Die algemene geval volg dan weer deur 'n partisie van die identiteit en lokale koördinate. □

Ons benodig ook 'n ongelykheid soortgelyk aan (2.6) vir die hoeveelheid $\|B(t)u\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}$ vir enige $u \in H^2(\Omega)$. Ons begin deur die volgende resultaat te bewys:

Laat $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ en laat ϕ enige oneindig keer differensieerbare funksie gedefinieer op $\mathbb{R}^n$ wees waarvan alle afgeleides begrens is. Neem enige reële getal $s \geqslant 0$ en laat m die kleinste heelgetal $\geqslant s$ wees. Dan bestaan daar 'n $C > 0$ só dat

$$\|\phi u\|_{-s} \leqslant C|\phi|_m\|u\|_{-s} \tag{2.7}$$

<u>Bewys</u>: Uit die bekende dualiteit tussen $H^s(\mathbb{R}^n)$ en $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ (kyk [4] volume 1, hoofstuk 1, stelling 7.2) en vergelyking (2.3) dat

$$\begin{aligned}\|\phi u\|_{-s} &= \sup_{\|w\|_s\leqslant 1} |(w,\phi u)_0|\\ &= \sup_{\|w\|_s\leqslant 1} |(\bar{\phi}w,u)_0|\\ &\leqslant \sup_{\|w\|_s\leqslant 1} \|\bar{\phi}w\|_s\|u\|_{-s}\\ &\leqslant C \sup_{\|w\|_s\leqslant 1} |\phi|_m\|w\|_s\|u\|_{-s}\\ &= C|\phi|_m\|u\|_{-s}\end{aligned}$$

□

Vervolgens bewys ons op dieselfde manier as in vergelyking (2.6) dat

$$\| B(t)u \|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq C|b|_{1,0} \| u \|_{1,\Omega} \tag{2.8}$$

vir alle $u \in H^2(\Omega)$

<u>Bewys</u>: Ons neem aan dat $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Dan is $\Gamma = \mathbb{R}^{n-1}_{x'}$ en dan volg uit (2.7) toegepas op $\mathbb{R}^{n-1}$ dat vir elke $j=1,2,\ldots n$ is

$$\begin{aligned} &\| b_j \partial_j u \|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\leq C|b(\cdot,t)|_1 \| \partial_j u \|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\leq C|b(\cdot,t)|_1 \| u \|_{\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\leq C|b(\cdot,t)|_1 \| u \|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

□

3. <u>ELLIPTIESE RANDWAARDEPROBLEME</u>

Laat Ω 'n begrensde oop versameling in $\mathbb{R}^n$ met rand Γ wees. Γ voldoen aan die voorwaardes in paragraaf 1. Ons beskou weer die differensiaaloperator (1.1). In hierdie paragraaf neem ons aan dat die koëffisiënte slegs van x afhanklik is, dit wil sê ons beskou 'n operator A wat gedefinieer word deur

$$Au = \sum_{|p| \leq 2} a_p(x) \partial^p u \tag{3.1}$$

Vir elke vaste $x \in \Omega$ beskou ons die polinoom

$$A_0(x,\xi) = \sum_{|p|=2} a_p(x) \xi^p$$

waar $\xi \in \mathbb{R}^n$ en $\xi^p = \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}$.

Die operator A word *ellipties* by x genoem indien $A_0(x,\xi) \neq 0$ vir alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ met $\xi \neq 0$. Dit volg dan dat vir enige twee lineêr onafhanklike vektore ξ en ξ' het die vergelyking

$$A_0(x,\xi+\tau\xi') = 0$$

slegs komplekse wortels τ.

Indien $n \geqslant 3$ kan bewys word (kyk [4] p 110) dat presies een van die twee wortels 'n positiewe imaginêre deel het. In hierdie geval word die operator A *eg ellipties* by x genoem.

Ons beskou nou die randoperator (1.2) in paragraaf 1. In hierdie paragraaf neem ons aan dat die koëffisiënte slegs van x afhanklik is, dit wil sê ons beskou 'n operator B wat gedefinieer word deur

$$Bu = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j u + b_0(x)u \tag{3.2}$$

Ons sê die operator B is *normaal* op Γ indien $\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\xi_j \neq 0$ vir alle $x \in \Gamma$ en vir elke vektor ξ wat loodreg op Γ is by x.

Ons sê die operator B is *versoenbaar* met A op Γ indien vir alle $x \in \Gamma$, vir alle $\xi \neq 0$ wat raaklynig aan Γ is by x en vir alle $\xi' \neq 0$ wat loodreg op Γ is by x geld dat die polinome $\sum_{j=1}^{n} b_j(x)(\xi+\tau\xi')$ en $\tau - \tau_0(x,\xi,\xi')$ lineêr onafhanklik is, waar $\tau_0(x,\xi,\xi')$ die oplossing van die vergelyking $A_0(x,\xi+\tau\xi') = 0$ met positiewe imaginêre deel is.
Ons formuleer vervolgens die bekende a-priori afskattings vir elliptiese randwaardeprobleme: (kyk [4] paragraaf 5.1 hoofstuk 2).

Beskou die operatore A en B soos gedefinieer in vergelykings (3.1) en (3.2). Ons neem aan dat A eg ellipties is op $\bar{\Omega}$, dat B normaal is op Γ en dat B versoenbaar is met A op Γ.

Vir elke $k=0,1,2,\ldots$ bestaan daar 'n konstante $C_k > 0$ só dat

$$\| u \|_{2+k,\Omega} \leq C_k (\| Au \|_{k,\Omega} + \| Bu \|_{k+\frac{1}{2},\Gamma} + \| u \|_{k+1,\Omega}) \tag{3.3}$$

vir alle $u \in H^{2+k}(\Omega)$.

Dit is bekend (sien [4] hoofstuk 1 stelling 16.3) dat ons die norm $\| u \|_{k+1,\Omega}$ aan die regterkant van (3.3) deur $\| u \|_{0,\Omega}$ kan vervang.

4. A-PRIORI AFSKATTINGS

Laat $A(t)$ en $B(t)$ die operatore gedefinieer deur (1.1) en (1.2) vir elke $t \in [0,T]$ wees. In hierdie paragraaf formuleer ons voorwaardes waaronder vergelyking (1.3) 'n oplossing sal hê. (Kyk [4] hoofstuk 4, paragrawe 4.1 en 4.6 en [9] paragraaf 3.8).

Ons voer 'n hulpveranderlike $y \in \mathbb{R}_y$ in en definieer vir elke $\theta \in [\alpha,\beta]$ die operator $\Lambda_\theta(t)$ deur

$$\Lambda_\theta(t) = A(t) - e^{i\theta}\partial_y^2 .$$

By die toepassings sal die interval $[\alpha,\beta]$ gewoonlik bestaan uit $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ of $[-\frac{\pi}{2}-\theta_0, \frac{\pi}{2}+\theta_0]$ met $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Ons maak nou die volgende aannames:

4.1 Vir elke $\theta \in [\alpha,\beta]$ en $t \in [0,T]$ is die operator $\Lambda_\theta(t)$ eg ellipties op $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_y$.

4.2 Vir elke $\theta \in [\alpha,\beta]$ en $t \in [0,T]$ is $B(t)$ normaal op Γ en versoenbaar met $\Lambda_\theta(t)$ op $\Gamma \times \mathbb{R}_y$.

As gevolg van die aannames 4.1 en 4.2 kan ons ongelykheid (3.3) vir die operatore $\Lambda_\theta(t)$ en $B(t)$ neerskryf. Ons beskou voorlopig die geval waar $k = 0$:

Vir elke $\theta \in [\alpha,\beta]$ en $t \in [0,T]$ bestaan daar 'n konstante $C = C(t,\theta)$ só dat

$$\|w\|_{2,\Omega\times\mathbb{R}_y} \leq C(t,\theta)(\|\Lambda_\theta(t)w\|_{0,\Omega\times\mathbb{R}_y} + \|B(t)w\|_{\frac{1}{2},\Gamma\times\mathbb{R}_y} + \|w\|_{0,\Omega\times\mathbb{R}_y}) \tag{4.1}$$

vir alle funksies $w \in H^2(\Omega \times \mathbb{R}_y)$ waarvan die draers in y bevat is in 'n vaste begrensde oop deelversameling van $\mathbb{R}_y$, byvoorbeeld die interval $-1 < y < 1$. Die ongelykheid (4.1) kan gebruik word om belangrike eienskappe in verband met die resolventeversameling en -operator van $A(t)$ te bewys.

In [4] en [9] word sonder meer aanvaar dat ons die konstante C in (4.1) onafhanklik van $\theta \in [\alpha,\beta]$ en $t \in [0,T]$ kan kies. Ons toon dié feit kortliks aan deur van die eerste middelwaardestelling van die differensiaalrekening gebruik te maak.

4.3 <u>Lemma</u>

Vir elke $t_0 \in [0,T]$ en $\theta_0 \in [\alpha,\beta]$ bestaan daar omgewings van t_0 en θ_0 só dat (4.1) geldig is met dieselfde konstante C vir alle t en θ in die betrokke omgewings.

<u>Bewys</u>: Laat $\Omega_0 = \Omega \times \mathbb{R}_y$ en $\Gamma_0 = \Gamma \times \mathbb{R}_y$.

Uit (2.5) en die middelwaardestelling volg dat

$$\|\Lambda_{\theta_0}(t_0)w - \Lambda_\theta(t)w\|_{0,\Omega_0}$$

$$= \|\sum_{|p|\leq 2}[a_p(x,t_0) - a_p(x,t)]\partial^p w + (e^{i\theta} - e^{i\theta_0})\partial_y^2 w\|_{0,\Omega_0}$$

$$\leq K_1(|a|_{0,1}|t-t_0| + |\theta-\theta_0|)\|w\|_{2,\Omega_0} \tag{4.2}$$

Uit (2.6) en die middelwaardestelling volg dat

$$\| B(t_0)w - B(t)w \|_{\frac{1}{2},\Gamma_0}$$
$$\leq K_2 |b|_{1,1} |t - t_0| \| w \|_{2,\Omega_0} \tag{4.3}$$

Ons skryf vervolgens

$$\| w \|_{2,\Omega_0} \leq C(t_0,\theta_0)(\| (\Lambda_{\theta_0}(t_0) - \Lambda_\theta(t))w \|_{0,\Omega_0} + \| \Lambda_\theta(t)w \|_{0,\Omega_0}$$
$$+ \| (B(t_0) - B(t)w \|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + \| B(t)w \|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + \| w \|_{0,\Omega_0}).$$

Uit (4.2) en (4.3) volg dat ons die eerste en derde terme aan die regterkant van hierdie ongelykheid willekeurig klein kan maak vir $|t - t_0|$ en $|\theta - \theta_0|$ klein genoeg. In hierdie geval kan ons dié terme na links oorbring en bewys dat ongelykheid (4.1) geld met 'n konstante soos byvoorbeeld $2C(t_0,\theta_0)$ vir alle t en θ in geskikte omgewings van t_0 en θ_0 respektiewelik. □

Deur eenvoudige toepassing van Heine-Borel se stelling kan dan bewys word dat (4.1) geld vir alle $t \in [0,T]$ en $\theta \in [\alpha,\beta]$ met dieselfde konstante $C > 0$ vir al dié waardes van t en θ.

Ons kyk vervolgens na die invloed wat klein veranderings in die koëffisiënte van die operatore $A(t)$ en $B(t)$ op die ongelykheid (4.1) het.

4.4 <u>Stelling</u>

As (4.1) geld vir die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$, dan bestaan daar 'n $\delta > 0$ só dat (4.1) steeds geld vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a - a'|_{0,0} < \delta$ en $|b - b'|_{1,0} < \delta$. Dieselfde waarde van die konstantes C kan vir al hierdie operatore gekies word.

Bewys: Ons skryf $\Lambda_\theta'(t)w = (\Lambda_\theta'(t)w - \Lambda_\theta(t)w) + \Lambda_\theta(t)w$

$= (A'(t)w - A(t)w) + \Lambda_\theta(t)w.$

Uit (2.5) volg dan dat

$$\|\Lambda_\theta'(t)w\|_{0,\Omega_0} \leq K_1|a-a'|_{0,0}\|w\|_{2,\Omega_0} + \|\Lambda_\theta(t)w\|_{0,\Omega_0} \tag{4.4}$$

Ons skryf ook $B'(t)w = (B'(t)w - B(t)w) + B(t)w$.

Uit (2.6) volg dan dat

$$\|B'(t)w\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} \leq K_2|b-b'|_{1,0}\|w\|_{2,\Omega_0} + \|B(t)w\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0}. \tag{4.5}$$

Vervang (4.4) en (4.5) in (4.1) (toegepas op $\Lambda_0'(t)$ en $B'(t)$) en ons kry dat

$$\|w\|_{2,\Omega_0}$$

$$\leq C(\|\Lambda_\theta(t)w\|_{0,\Omega_0} + \|B(t)w\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + \|w\|_{0,\Omega_0} + (K_1|a-a'|_{0,0} + K_2|b-b'|_{1,0})\|w\|_{2,\Omega_0})$$

en dus is

$$(1 - K_1|a-a'|_{0,0} - K_2|b-b'|_{1,0})\|w\|_{2,\Omega_0}$$

$$\leq C(\|\Lambda_\theta(t)w\|_{0,\Omega_0} + \|B(t)w\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + \|w\|_{0,\Omega_0})$$

Indien ons $\delta > 0$ so kies dat $1 - K_1|a-a'|_{0,0} - K_2|b-b'|_{1,0} > \frac{1}{2}$ vir alle a en b met $|a-a'|_{0,0} < \delta$ en $|b-b'|_{1,0} < \delta$, dan geld (4.1) vir alle sodanige a en b met die konstante $2C$. □

Ons herlei vervolgens 'n ongelykheid wat gebruik sal word om die resolvente van die operatore $A(t)$ te bestudeer.

4.5 Stelling

Laat die operatore $A(t)$ en $B(t)$ aan aannames 4.1 en 4.2 voldoen. Dan bestaan daar konstantes $C_0 > 0$ en $K_0 > 0$ só dat

$$\|u\|_{2,\Omega} + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{1,\Omega} + |\lambda|\|u\|_{0,\Omega}$$
$$\leq C_0(\|(A(t)+\lambda)u\|_{0,\Omega} + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|B(t)u\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|B(t)u\|_{\frac{1}{2},\Gamma}) \qquad (4.6)$$

vir alle $u \in H^2(\Omega)$, $|\lambda| \geq K_0$, $\arg \lambda \in [\alpha,\beta]$ en alle $t \in [0,T]$.

<u>Opmerking</u> 'n Soortgelyke ongelykheid verskyn in [9] Lemma 3.8.1. In die Lemma word die tweede en derde terme aan die regterkant van (4.6) vervang deur die uitdrukkings $|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|g\|_{0,\Omega}$ en $\|g\|_{1,\Omega}$, waar g enige funksie in $H^1(\Omega)$ is wat gelyk is aan $B(t)u$ op Γ. Ons benodig egter die ongelykheid (4.6) aangesien ons in die stabiliteitstellings veranderings in randwaardes wil bestudeer. Afgesien van die hantering van die rand-terme, verloop die bewys van (4.6) presies soos die bewys van Lemma 3.8.1 in [9] . Ter wille van duidelikheid verskaf ons die volledige bewys.

<u>Bewys van stelling 4.5</u>:

Neem enige $u \in H^2(\Omega)$. Ons pas vergelyking (4.1) toe op die funksie w wat op $\Omega \times \mathbb{R}_y$ gedefinieer word deur $w(x,y) = z(y)e^{iry}u(x)$, r reëel, waar $z(y)$ 'n funksie in $C_0^\infty(\mathbb{R}_y)$ is met $z(y) = 0$ as $|y| > 1$ en $z(y) = 1$ vir $|y| < \frac{1}{2}$.

Ons herlei afskattings vir elk van die terme in (4.1).

$$\Lambda_\theta(t)w(x,y)$$
$$= (A(t) - e^{i\theta}\partial_y^2)z(y)e^{iry}u(x)$$
$$= z(y)e^{iry}(A(t)+r^2e^{i\theta})u(x) - e^{i\theta}u(x)(\partial_y^2 z(y)e^{iry} + 2\partial_y z(y)ire^{iry}).$$

Dus is

$$\|\Lambda_\theta(t)w\|_{0,\Omega_0}$$
$$\leq C_1(\|(A(t)+r^2e^{i\theta})u\|_{0,\Omega} + (1+|r|)\|u\|_{0,\Omega}) \qquad (4.7)$$

$B(t)w(x,y) = z(y)e^{iry}B(t)u(x).$

Om die randterm af te skat neem ons aan dat ons in 'n halfruimte $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ werk en dat $\Gamma = \mathbb{R}^{n-1}_{x'}$.

Ons skryf kortweg $B(t)u(x) = g(x')$ vir 'n vaste $t \in [0,T]$.

Nou is

$$\|B(t)w\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma_0} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}_{\xi'}\times\mathbb{R}_\eta} (1+\eta^2+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}|\hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi')|^2 d\xi'\,d\eta$$

waar $\hat{f}(\eta) = F(z(y)e^{iry})(\eta)$ en

$\hat{g}(\xi') = F(g(x'))(\xi')$.

Maar
$$(1+\eta^2+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+\eta^2+|\xi'|^2}{(1+\eta^2+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\leq \frac{1+\eta^2}{(1+\eta^2+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1+|\xi'|^2}{(1+\eta^2+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\leq \frac{1+\eta^2}{(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1+|\xi'|^2}{(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1+\eta^2}{(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}} + (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}$$

en dus is

$$\|z(y)e^{iry}g(x')\|^2_{\frac{1}{2},\mathbb{R}^{n-1}_{x'}\times\mathbb{R}_y}$$

$$\leq \|z(y)e^{iry}\|^2_{1,\mathbb{R}_y}\|g(x')\|_{-\frac{1}{2},\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} + \|z(y)e^{iry}\|^2_{0,\mathbb{R}_y}\|g(x')\|^2_{\frac{1}{2},\mathbb{R}^{n-1}_{x'}}$$

$$\leq C_2(|r|^2\|g(x')\|^2_{-\frac{1}{2},\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} + \|g(x')\|^2_{-\frac{1}{2},\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} + \|g(x')\|^2_{\frac{1}{2},\mathbb{R}^{n-1}_{x'}}).$$

Dus is

$$\|B(t)w\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} \leq C_3(|r|\|B(t)u\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|B(t)u\|_{\frac{1}{2},\Gamma}) \tag{4.8}$$

Verder is

$$\|w\|^2_{2,\Omega_0} = \sum_{|\alpha|+k\leq 2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega} |\partial_x^\alpha\partial_y^k w(x,y)|^2 dx\,dy$$

$$\geq \sum_{|\alpha|+k\leq 2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{\Omega} |\partial_x^\alpha\partial_y^k e^{iry}u(x)|^2\,dx\,dy$$

$$= \sum_{k=0}^{2} r^{2k} \sum_{|\alpha|\leqslant 2-k} \int_\Omega |\partial_x^\alpha u(x)|^2 \, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{2} r^{2k}\| u\|^2_{2-k,\Omega} = \sum_{j=0}^{2} r^{2(2-j)}\| u\|^2_{j,\Omega} \tag{4.9}$$

Ook is $\| w\|_{0,\Omega_0} \leqslant C_4\| u\|_{0,\Omega}$ (4.10)

As ons vergelykings (4.7) tot (4.10) in (4.1) vervang kry ons dat

$$\sum_{j=0}^{2} |r|^{2-j}\| u\|_{j,\Omega}$$

$$\leqslant C_5 (\| (A + r^2 e^{i\theta})u\|_{0,\Omega} + (1 + |r|)\| u\|_{0,\Omega}$$

$$+ |r|\| Bu\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \| Bu\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \| u\|_{0,\Omega}).$$

Vir $|r|$ groot genoeg, kan ons die tweede en vyfde terme regs ignoreer. Stel nou $\lambda = r^2 e^{i\theta}$ en (4.6) volg. □

Ons neem weer aan dat (4.1) en (4.2) geld vir die operatore $A(t)$ en $B(t)$. Ons beskou die a-priori afskattings soortgelyk aan (3.3) vir die operatore $\Lambda_\theta(t)$ en $B(t)$:
Vir elke $k=0,1,\ldots$ bestaan 'n konstante C_k só dat

$$\| w\|_{2+k,\Omega_0} \leqslant C_k (\| \Lambda_\theta(t)w\|_{k,\Omega_0} + \| B(t)w\|_{k+\frac{1}{2},\Gamma_0} + \| w\|_{0,\Omega_0}) \tag{4.11}$$

vir alle funksies $w \in H^{2+k}(\Omega_0)$ waarvan die draers in y bevat is in 'n vaste begrensde oop deelversameling van $\mathbb{R}_y$ soos byvoorbeeld die interval $-1 < y < 1$. Ons kan weer soos tevore bewys dat die konstante C_k onafhanklik van $t \in [0,T]$ en $\theta \in [\alpha,\beta]$ gekies kan word.

Die volgende resultaat word presies soos stelling 4.4 bewys:

4.6 Stelling

As (4.11) geld vir die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$ dan bestaan daar 'n $\delta > 0$ só dat (4.11) steeds geld vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a - a'|_{k,0} < \delta$ en $|b - b'|_{k+1,0} < \delta$. Dieselfde waarde van die konstante C_k kan vir al hierdie operatore gekies word.

Ons toon vervolgens aan dat aannames 4.1 en 4.2 ook aanleiding gee tot ongelykheid (3.3) vir operatore $A(t)$ en $B(t)$.

4.7 Stelling

Laat die operatore $A(t)$ en $B(t)$ aan 4.1 en 4.2 voldoen. Dan bestaan daar vir elke $k=0,1,\ldots$ 'n konstant C_k só dat

$$\|u\|_{2+k,\Omega} \leq C_k (\|A(t)u\|_{k,\Omega} + \|B(t)u\|_{k+\frac{1}{2},\Gamma} + \|u\|_{0,\Omega}) \qquad (4.12)$$

vir alle $u \in H^{2+k}(\Omega)$. Die konstante C_k is onafhanklik van $t \in [0,T]$.

Bewys: Ons pas (4.11) toe op die funksie w wat op $\Omega_0 = \Omega \times \mathbb{R}_y$ gedefinieer word deur $w(x,y) = z(y)u(x)$ waar $z(y)$ 'n funksie in $C_0^\infty(\mathbb{R}_y)$ is met $z(y) = 0$ vir $|y| > 1$ en $z(y) = 1$ vir $|y| < \frac{1}{2}$. Dan is

$$\begin{aligned} \Lambda_\theta(t)w &= [A(t) - e^{i\theta}\partial_y^2]\, z(y)u(x) \\ &= z(y)A(t)u(x) - u(x)e^{i\theta}\partial_y^2 z(y) \end{aligned}$$

en dus is

$$\|\Lambda_\theta(t)w\|_{k,\Omega_0} \leq C_1[\|A(t)u\|_{k,\Omega} + \|u\|_{k,\Omega}] \qquad (4.13)$$

Ons beskou die geval van die randterm $B(t)w$ weer in 'n half-ruimte. Laat $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ en $\Gamma = \mathbb{R}_{x'}^{n-1}$.

Ons skryf
$$\begin{aligned} B(t)w(x,y) &= z(y)B(t)u(x) \\ &= z(y)g(x') \quad \text{sê.} \end{aligned}$$

Dan is $\| z(y)g(x')\|^2_{k+\frac{1}{2},\mathbb{R}^{n-1}_{x'}\times\mathbb{R}_y}$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}_{\xi'}\times\mathbb{R}_\eta} (1+\eta^2+|\xi'|^2)^{k+\frac{1}{2}} |\hat{z}(\eta)\hat{g}(\xi')|^2 d\xi'\, d\eta\,.$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}_\eta} (1+\eta^2)^{k+\frac{1}{2}}|\hat{z}(\eta)|^2 d\eta\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}_{\xi'}} (1+|\xi'|^2)^{k+\frac{1}{2}}|\hat{g}(\xi')|^2 d\xi'\right)$$

$$= C\|B(t)u\|^2_{k+\frac{1}{2},\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} \tag{4.14}$$

Nou beskou ons

$$\|w\|^2_{2+k,\Omega_0} = \sum_{j=0}^{2+k}\ \sum_{|\alpha|\leq 2+k-j} \left(\int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_y^j z(y)|^2\, dy\right)$$

$$\geq \sum_{|\alpha|\leq 2+k} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^2\, dx\, dy$$

$$= \|u\|^2_{2+k,\Omega} \tag{4.15}$$

Nou volg (4.12) uit (4.11) en (4.13) tot (4.15). □

Die volgende resultaat word presies soos stelling 4.4 bewys.

4.8 Stelling

As (4.12) geld vir die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$, dan bestaan daar 'n $\delta > 0$ sō dat (4.12) steeds geld vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a - a'|_{k,0} < \delta$ en $|b - b'|_{k+1,0} < \delta$. Dieselfde waarde vir die konstante C_k kan vir al hierdie operatore gekies word.

5. RESOLVENTE EN SEMIGROEPE

Laat A 'n geslote lineêre operator in 'n Banach-ruimte X wees met definisieversameling $D(A)$ dig in X. Ons sê 'n komplekse getal λ behoort aan die resolventeversameling van

A, geskryf $\lambda \in \rho(A)$ indien $\lambda I - A$ 'n 1-1-duidige afbeelding van $D(A)$ op X is en indien die inverse $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda;A)$ 'n begrensde lineêre operator in X is.

Laat die operatore $A(t)$ en $B(t)$ aan aannames (4.1) en (4.2) voldoen waar $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ of $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \theta_0]$ vir 'n vaste $\theta_0 \in (0,\frac{\pi}{2})$.
Ons beskou $A(t)$ as 'n onbegrensde lineêre operator in $L^2(\Omega)$ met definisieversameling

$$D(A(t)) = \{u \in H^2(\Omega) : B(t)u = 0 \text{ op } \Gamma\}.$$

Aangesien $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A(t))$, volg dat $D(A(t))$ dig is in $L^2(\Omega)$ en uit vergelykings (4.12), (2.5) en (2.6) met $k = 0$ volg dat $A(t)$ 'n geslote operator in $L^2(\Omega)$ is vir elke $t \in [0,T]$.
Uit vergelyking (4.6) volg dat

$$|\lambda| \|u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{2,\Omega} \leq C_0 \|(A(t) + \lambda)u\|_{0,\Omega}$$

vir alle $u \in D(A(t))$ en vir alle λ met $|\lambda| \geq K_0$ en $\arg \lambda \in [\alpha,\beta]$.
Met behulp van hierdie ongelykheid word bewys dat $\lambda \in \rho(-A(t))$ vir alle λ met $|\lambda| \geq K_0$ en $\arg \lambda \in [\alpha,\beta]$ en dat

$$\|R(\lambda;-A(t))u\|_{0,\Omega} \leq \frac{C_0}{1 + |\lambda|} \|u\|_{0,\Omega}$$

vir alle $u \in L^2(\Omega)$. (Sien [9] paragraaf 3.8).

Gestel ons beskou vaste operatore $A'(t)$ en $B'(t)$ wat aan aannames (4.1) en (4.2) voldoen. In stelling 4.4 het ons bewys dat ongelykheid (4.1) geldig sal bly vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a - a'|_{0,0}$ en $|b - b'|_{1,0}$ klein genoeg en met dieselfde keuse van die konstante C. Dit blyk uit die bewys van stelling 4.5 dat die konstantes C_0 en K_0 wat in vergelyking (4.6) voorkom slegs van die waarde van die konstante C

in (4.1) afhang (en natuurlik ook van die meetkunde van die gebied en eienskappe van polinome). Daar bestaan dus 'n $\delta > 0$ só dat (4.6) geldig is vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a-a'|_{0,0}$ en $|b-b'|_{1,0} < \delta$ met dieselfde waardes van die konstantes $C_0 > 0$ en $K_0 > 0$. Ons gebruik die notasie $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ om die versameling van begrensde lineêre operatore in $L^2(\Omega)$ aan te dui met die notasie $\|\cdot\|_0$ vir die operatornorm.

Ons vat die resultate soos volg saam:

5.1 <u>Stelling</u>

Laat aannames (4.1) en (4.2) geld vir die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$, $t \in [0,T]$. Dan bestaan daar 'n $\delta > 0$ só dat die volgende geld vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a-a'|_{0,0} < \delta$ en $|b-b'|_{1,0} < \delta$:

(a) Daar bestaan konstantes $C_0 > 0$ en $K_0 > 0$ só dat

$$\|u\|_{2,\Omega} + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{1,\Omega} + |\lambda|\|u\|_{0,\Omega}$$

$$\leqslant C_0(\|(A(t)+\lambda)u\|_{0,\Omega} + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|B(t)u\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|B(t)u\|_{\frac{1}{2},\Gamma})$$

vir alle $u \in H^2(\Omega)$, alle λ met $|\lambda| \geqslant K_0$ en $\arg\lambda \in [\alpha,\beta]$ en alle $t \in [0,T]$.

(b) Die versameling $\{\lambda : |\lambda| \geqslant K_0, \arg\lambda \in [\alpha,\beta]\}$ is bevat in $\rho(-A(t))$ en

$$\|R(\lambda;-A(t))u\|_{0,\Omega} \leqslant \frac{C_0}{1+|\lambda|}\|u\|_{0,\Omega}$$

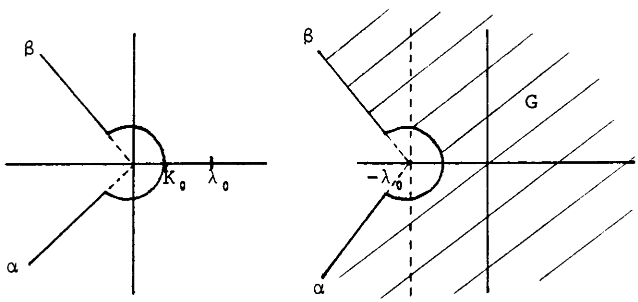
vir alle $u \in L^2(\Omega)$ en alle λ soos hierbo beskryf.

In die teorie van evolusievergelykings word normaalweg aanvaar dat ook $0 \in \rho(-A(t))$. Hierdie aanname sal bevredig word indien 'n geskikte positiewe veelvoud van die identiteitsoperator (byvoorbeeld $> K_0$) by $A(t)$ getel word.

Laat λ_0 enige vaste reële getal $> K_0$ wees. Dan volg uit stelling 5.1(a) dat

$$\|u\|_{2,\Omega} + |\lambda_0+\mu|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{1,\Omega} + |\lambda_0+\mu|\,\|u\|_{0,\Omega}$$
$$\leq C_0(\|(A(t)+\lambda_0+\mu)u\|_{0,\Omega} + |\lambda_0+\mu|^{\frac{1}{2}}\|B(t)u\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|B(t)u\|_{\frac{1}{2},\Gamma}) \qquad (5.1)$$

vir die versameling G van alle $\mu \in \mathbb{C}$ wat gevorm word deur die versameling van alle λ met $|\lambda| \geq K_0$, arg $\lambda \in [\alpha,\beta]$ deur die afstand λ_0 na links te verskuif. (Sien figuur)



Daar bestaan 'n konstante $K > 0$ só dat $|\lambda_0+\mu| = |\mu|\,|1+\frac{\lambda_0}{\mu}| \geq K|\mu|$ vir alle $\mu \in G$. Dit volg uit die feit dat die hoeveelheid $|1+\frac{\lambda_0}{\mu}|$ slegs nul word vir $\mu = -\lambda_0$, wat nie aan G behoort nie, en dat $\lim_{\mu\to\infty} 1+\frac{\lambda_0}{\mu} = 1$. Ook is $|\lambda_0+\mu| \leq |\lambda_0| + |\mu|$.

Ons kan dus nou vergelyking (5.1) skryf in die vorm

$$\|u\|_{2,\Omega} + |\mu|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{1,\Omega} + |\mu|\,\|u\|_{0,\Omega}$$
$$\leq C_0'(\|(A(t)+\lambda_0+\mu)u\|_{0,\Omega} + |\mu|^{\frac{1}{2}}\|B(t)u\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} + \|B(t)u\|_{\frac{1}{2},\Gamma}) \quad \text{vir}$$

alle $\mu \in G$.

Dit beteken dan dat $0 \in \rho(-A(t)-\lambda_0 I)$ en dat

$$\|R(\lambda;-(A(t)+\lambda_0 I))u\|_{0,\Omega} \leq \frac{C_0''}{1+|\lambda|}\|u\|_{0,\Omega} \quad \text{vir alle } \lambda \in G$$

Indien die funksie u 'n oplossing is van die probleem (1.3) dan volg deur differensiasie dat die funksie v gedefinieer deur $v(x,t) = e^{-\lambda_0 t}u(x,t)$ 'n oplossing is van die probleem

$$\begin{aligned} (A(t)+\lambda_0)v(x,t) + \partial_t v(x,t) &= e^{-\lambda_0 t}f(x,t) \quad \text{in} \quad Q \\ B(t)v(x,t) &= e^{-\lambda_0 t}g(x,t) \quad \text{op} \quad \Sigma \\ v(x,0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1.3'}$$

Omgekeerd, as v 'n oplossing is van (1.3'), dan is die funksie u gedefinieer deur $u(x,t) = e^{\lambda_0 t}v(x,t)$ 'n oplossing van (1.3).

Dit beteken dus dat die stabiliteitsteorie vir (1.3) uit dié van (1.3') afgelei kan word. In die res van die proefskrif aanvaar ons dat $0 \in \rho(-A(t))$ en dat stelling 5.1 ook vir $\lambda = 0$ geld.

Dit blyk uit die werk van hierdie paragraaf dat ons dié veelvoud dieselfde kan maak vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a-a'|_{0,0}$ en $|b-b'|_{1,0}$ klein genoeg. Ons neem dus aan dat $0 \in \rho(-A(t))$ vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ in stelling 5.1 beskryf.

Ons formuleer ten slotte die bekende voldoende voorwaarde vir 'n geslote operator om die infinitesimale generator van 'n holomorfe semigroep te wees. (Kyk byvoorbeeld [2] vir die teorie).

5.2 Stelling

Laat A 'n lineêre operator in die Banach-ruimte X wees wat aan die volgende eienskappe voldoen:

(a) A is 'n geslote operator met definisieversameling dig in X.

(b) Die resolventeversameling van A omvat 'n hoekgebied $S_\phi = \{\lambda : \lambda \neq 0, -\frac{\pi}{2}-\phi < \arg \lambda < \frac{\pi}{2}+\phi\}$, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ en daar bestaan 'n $M > 0$ só dat

$$\| R(\lambda;A) \|_0 \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{vir alle} \quad \lambda \in S_\phi.$$

Dan is A die infinitesimale generator van 'n kontinue semigroep $\{T(t)\}$ met die eienskap dat $T(t)u \in D(A)$ vir alle $u \in X$.

Waar geen verwarring kan voorkom nie, gebruik ons voortaan die volgende notasie vir die norms in $H^m(\Omega)$ en $H^s(\Gamma)$:

$$\| u \|_{m,\Omega} = \| u \|_m$$

en $\| u \|_{s,\Gamma} = |u|_s$.

In bewyse gebruik ons dikwels die simbool C vir 'n konstante wat van stap tot stap mag verander.

HOOFSTUK 2. EVOLUSIEVERGELYKINGS MET DIFFERENSIAAL- EN RANDOPERATORE SLEGS RUIMTE-AFHANKLIK

1. INLEIDING

Ons beskou die situasie in Hoofstuk 1, paragraaf 1 met die gebied Ω met rand Γ soos in dié paragraaf beskryf.

Laat die operatore A en B gedefinieer word deur

$$Au = \sum_{|p|\leq 2} a_p(x)\partial^p u \quad \text{met} \quad a_p \in C^\infty(\bar{\Omega}),\ |p| \leq 2$$

$$\text{en} \quad Bu = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j u + b_0(x)u$$

met $b_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j=0,\ldots,n$.

In hierdie hoofstuk beskou ons die stabiliteit van die probleem

$$\begin{aligned} Au(x,t) + \partial_t u(x,t) &= 0 \quad \text{in} \quad Q \\ Bu(x,t) &= 0 \quad \text{op} \quad \Sigma \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

met u_0 enige funksie in $L^2(\Omega)$.
Laat A' en B' differensiaaloperatore soortgelyk aan A en B met koëffisiënte a'_p en b'_j wees. Dan beskou ons die volgende probleem soortgelyk aan (1.1).

$$\begin{aligned} A'u'(x,t) + \partial_t u'(x,t) &= 0 \quad \text{in} \quad Q \\ B'u'(x,t) &= 0 \quad \text{op} \quad \Sigma \\ u'(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{1.2}$$

met u_0 dieselfde funksie as in (1.1).
Soos tevore beskou ons (1.2) as 'n vaste probleem en (1.1) as 'n veranderlike probleem.

Ons neem aan dat die operatore A' en B' aan aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 met $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ voldoen. Die resultate in paragraaf 5 van hoofstuk 1 is dus van toepassing. Daar bestaan dus 'n $\delta > 0$ só dat die volgende eienskappe geld vir alle operatore A en B met $|a - a'|_0 < \delta$ en $|b - b'|_1 < \delta$:

As $D(A) = \{u \in H^2(\Omega) : Bu = 0 \text{ op } \Gamma\}$, dan is A 'n geslote lineêre operator in $L^2(\Omega)$. Die resolventeversameling van $-A$ omvat die versameling $\{\lambda : \text{Re}\,\lambda \geq 0\}$ en daar bestaan 'n $K > 0$ só dat

$$\|R(\lambda;-A)\|_0 \leq \frac{K}{1+|\lambda|}, \quad \text{Re}\,\lambda \geq 0.$$

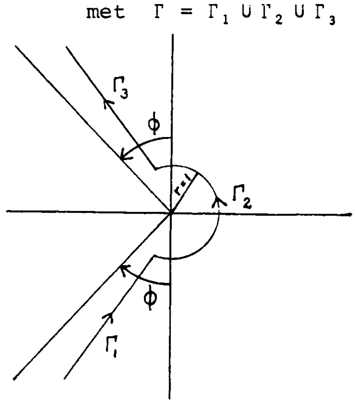
Deur die proses van analitiese voortsetting, kyk [10] bladsy 211, kan bewys word dat die resolventeversameling van $-A$ 'n hoekgebied

$$S_\phi = \{\lambda : \lambda \neq 0, -\frac{\pi}{2} - \phi < \arg\lambda < \frac{\pi}{2} + \phi\} \cup \{0\},$$

$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, omvat en dat 'n ongelykheid soos hierbo vir $R(\lambda,-A)$ in die gebied geld. Dan is $-A$ die infinitesimale generator van 'n semigroep e^{-tA} in $L^2(\Omega)$ wat gedefinieer word deur

$$e^{-tA}u = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda;-A)u\,d\lambda, \quad u \in L^2(\Omega),$$

met $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ soos in die figuur aangetoon.



Hoekgebied S_ϕ

Vir meer besonderhede verwys ons na [8] hoofstuk 4, paragraaf 6.

Hierdie semigroep het die verdere belangrike eienskap dat $e^{-tA}u \in D(A)$ vir elke $u \in L^2(\Omega)$. Ons assosieer met (1.1) en (1.2) die volgende beginwaardeprobleme in $L^2(\Omega)$:

$$AU(t) + \frac{dU(t)}{dt} = 0 \quad , \quad 0 < t < T \tag{1.3}$$
$$U(0) = u_0$$

en

$$A'U'(t) + \frac{dU'(t)}{dt} = 0 \ , \ 0 < t < T \tag{1.4}$$
$$U'(0) = u_0$$

U en U' is funksies van $(0,T)$ in $L^2(\Omega)$. Die afgeleide $\frac{dU}{dt}$ word geneem in die norm van $L^2(\Omega)$ en die begintoestand u_0 word in die sin van $L^2(\Omega)$-konvergensie aangeneem, dit wil sê $\lim_{t\to 0^+} \| U(t) - u_0 \|_0 = 0$.

Dit is bekend dat (1.3) die eenduidige oplossing $U(t) = e^{-tA}u_0$ het. Verder geld ook dat $U \in C^\infty((0,T); L^2(\Omega))$.
Uit [8] hoofstuk 4, paragraaf 7 volg dat daar 'n funksie $u \in C^\infty((0,T) \times \bar{\Omega}))$ bestaan só dat

$u(\cdot,t) = U(t)$ byna oral op $(0,T)$ en dat

$\frac{dU(t)}{dt} = \partial_t u(\cdot,t)$ byna oral op $(0,T)$,

waar die afgeleide $\partial_t u$ in klassieke sin geneem word. Die funksie $u(\cdot,\cdot)$ is dan 'n oplossing van (1.1). Uit die feit dat $e^{-tA}u_0 \in D(A)$, volg dat $Bu(x,t) = 0$ op Σ. In paragraaf 2 beskou ons die stabiliteit van die resolventoperatore en semigroepe en in paragraaf 3 beskou ons die stabiliteit van klassieke oplossings van vergelyking (1.1).

2. STABILITEIT VAN RESOLVENTE EN SEMIGROEPE

2.1 Stelling

Laat A' en B' die vaste operatore en A en B die veranderlike operatore soos in paragraaf 1 wees.

Dan is $\lim\limits_{\substack{a\to a' \\ b\to b'}} \| R(\lambda;-A) - R(\lambda,-A')\|_0 = 0$ gelykmatig vir $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ as $|a-a'|_0 \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$.

Bewys: Neem enige $v \in L^2(\Omega)$ en laat $u = R(\lambda;-A)v$ en $u' = R(\lambda;-A')v$.

Dus is

$$\begin{aligned} (A+\lambda)u &= v \text{ in } \Omega \\ Bu &= 0 \text{ op } \Gamma \end{aligned} \qquad \text{en} \qquad \begin{aligned} (A'+\lambda)u' &= v \text{ in } \Omega \\ B'u' &= 0 \text{ op } \Gamma . \end{aligned}$$

Uit stellings 4.5 en 5.1(a) van hoofstuk 1 volg dat daar 'n $\delta > 0$ en 'n $C > 0$ bestaan ső dat

$$\begin{aligned} &\|u\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_1 + |\lambda|\|u\|_0 \\ &\leqslant C(\|(A+\lambda)u\|_0 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}|Bu|_{-\frac{1}{2}} + |Bu|_{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

vir alle $u \in H^2(\Omega)$, alle λ met $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ en alle operatore A en B met $|a-a'|_0 < \delta$ en $|b-b'|_1 < \delta$. Ons pas (2.1) toe op die verskil $u-u'$. Dan volg uit vergelykings (2.5), (2.6) en (2.8) van hoofstuk 1 dat

$$\begin{aligned} &\|u-u'\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u-u'\|_1 + |\lambda|\,\|u-u'\|_0 \\ &\leqslant C(\|(A+\lambda)(u-u')\|_0 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}|B(u-u')|_{-\frac{1}{2}} + |B(u-u')|_{\frac{1}{2}}) \\ &= C(\|(A+\lambda)u - (A'+\lambda)u' + (A'+\lambda)u' - (A+\lambda)u'\|_0 \\ &\quad + |\lambda|^{\frac{1}{2}}|Bu - B'u' + B'u' - Bu'|_{-\frac{1}{2}} + |Bu - B'u' + B'u' - Bu'|_{\frac{1}{2}}) \\ &= C(\|(A'-A)u'\|_0 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}|(B'-B)u'|_{-\frac{1}{2}} + |(B'-B)u'|_{\frac{1}{2}}) \\ &\leqslant C(|a'-a|_0\|u'\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}|b'-b|_1\|u'\|_1 + |b'-b|_1\|u'\|_2) \end{aligned}$$

As ons vergelyking (2.1) op die operatore A' en B' en die funksie u' toepas volg dat die laaste uitdrukking

$$\leq C(|a'-a|_0 \|(A'+\lambda)u'\|_0 + |b'-b|_1 \|(A'+\lambda)u'\|_0)$$

$$= C(|a'-a|_0 + |b'-b|_1)\|v\|_0 .$$

Ons het dus bewys dat

$$\|(R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A'))v\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|(R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A'))v\|_1$$
$$+ |\lambda|\,\|(R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A'))v\|_0 \leq C(|a'-a|_0 + |b'-b|_1)\|v\|_0$$

en dus is

$$\|(R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A'))v\|_0 \leq \frac{C}{1+|\lambda|}(|a'-a|_0 + |b'-b|_1)\|v\|_0 .$$

Uit hierdie ongelykheid volg die resultaat van die stelling. □

2.2 Gevolg

Omdat die resolventoperatore begrensde lineêre operatore in $L^2(\Omega)$ is, volg deur toepassing van die produkreël dat vir elke $n=2,3,...$ is

$$\lim_{\substack{a\to a'\\ b\to b'}} R(\lambda;-A)^n = R(\lambda;-A')^n$$ in die operatornorm as

$|a-a'|_0 \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$.

Ons beskou steeds die vaste operatore A' en B' en die veranderlike operatore A en B. Uit stelling 5.1(b) van hoofstuk 1 volg dat daar 'n $\delta > 0$ en $K > 0$ bestaan sô dat

$$\|R(\lambda;-A)\|_0 \leq \frac{K}{1+|\lambda|} \tag{2.2}$$

vir alle λ met $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ en operatore A en B met $|a-a'|_0 < \delta$ en $|b-b'|_1 < \delta$.

Die analitiese voortsetting van die operator $R(\lambda;-A)$ word soos volg gekonstrueer: (Kyk [10] bladsy 211). Neem enige λ_0 op die imaginêre as en beskou die reeks

$$R(\lambda;-A) = R(\lambda_0;-A)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n(R(\lambda_0;-A))^n.$$

Vir elke vaste ρ met $0 < \rho < 1$ is hierdie reeks konvergent vir alle λ met $|\lambda_0 - \lambda| \dfrac{K}{1 + |\lambda_0|} \leqslant \rho$ (2.3)

Wanneer λ_0 die imaginêre as deurloop, omvat die versameling van alle λ wat aan (2.3) voldoen 'n hoekgebied

$$S_\phi = \{\lambda : \lambda \neq 0, -\tfrac{\pi}{2} - \phi < \arg\lambda < \tfrac{\pi}{2} + \phi\} \cup \{0\}$$

met $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$.

Hierdie hoekgebied hang af van die konstante K in vergelyking (2.2) en kan dus dieselfde gekies word vir alle operatore A en B met $|a - a'|_0 < \delta$ en $|b - b'|_1 < \delta$. Verder kan bewys word dat 'n ongelykheid soortgelyk aan (2.2) in die hoekgebied geld, dit wil sê daar bestaan 'n $K_0 > 0$ só dat

$$\|R(\lambda;-A)\|_0 \leqslant \frac{K_0}{1 + |\lambda|} \tag{2.4}$$

vir alle $\lambda \in S_\phi$ en operatore A en B met $|a - a'|_0 < \delta$ en $|b - b'|_1 < \delta$.

Ons beskou vervolgens die stabiliteit van die resolventoperatore in die hoekgebied S_ϕ.

2.3 <u>Stelling</u>

Laat A' en B' die vaste operatore en A en B die veranderlike operatore soos in paragraaf 1 wees. Ons neem aan dat $|a - a'|_0 < \delta$ en $|b - b'|_1 < \delta$ soos hierbo beskryf. Dan geld vir elke λ in die hoekgebied S_ϕ dat

$$\lim_{\substack{a\to a'\\ b\to b'}} \|R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A')\|_0 = 0 \quad \text{as} \quad |a - a'|_0 \to 0 \quad \text{en}$$

$|b - b'|_1 \to 0$.

<u>Bewys</u>: Neem enige vaste $\lambda \in S_\phi$. Dan bestaan daar 'n λ_0 met $\operatorname{Re}\lambda_0 = 0$ sô dat $|\lambda_0 - \lambda| \dfrac{K}{1 + |\lambda_0|} \leqslant \rho$.

Ons wil bewys dat

$$\lim_{\substack{a \to a' \\ b \to b'}} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; -A)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, -A')^{n+1} \qquad (2.5)$$

in die operatornorm as $|a - a'|_0 \to 0$ en $|b - b'|_1 \to 0$.

Om dit te kan doen, beskou ons die twee reekse hierbo as Lebesque-integrale met betrekking tot die telmaat μ van twee funksies gedefinieer op die versameling $M = \{0,1,2,\ldots\}$ met waardes in die ruimte $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ met die operatornorm.

Dus as ons die funksies f_A en $f_{A'}$ op M definieer deur

$$f_A(n) = (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; -A)^{n+1} \quad \text{en}$$

$$f_{A'}(n) = (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; -A')^{n+1}, \quad \text{dan is}$$

$$\int_M f_A d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; -A)^{n+1} \quad \text{en}$$

$$\int_M f_{A'} d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; -A')^{n+1}.$$

Uit stelling 2.1 en gevolg 2.2 volg dat vir elke $n \in M$ is

$$\lim_{\substack{a \to a' \\ b \to b'}} f_A(n) = f_{A'}(n) \qquad (2.6)$$

Dit beteken dat $\lim\limits_{\substack{a \to a' \\ b \to b'}} f_A = f_{A'}$ puntgewys op M. Maar vir elke paar operatore A en B met $|a - a'|_0 < \delta$ en $|b - b'|_1 < \delta$ is $|(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; -A)^{n+1}| \leqslant \dfrac{K}{1 + |\lambda_0|} \rho^n$ en $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty$.

Dus word die konvergensie in (2.6) gedomineer deur die integreerbare funksie g wat op M gedefinieer word deur

$$g(n) = \frac{K}{1 + |\lambda_0|} \rho^n.$$

Nou volg vergelyking (2.5) uit Lebesgue se gedomineerde konvergensiestelling.

Ons merk op dat om die stelling van Lebesgue te kan gebruik, ons eintlik moet vereis dat $a \to a'$ en $b \to b'$ langs enige ry van koëffisiënte. □

Ons beskou vervolgens die stabiliteit van die semigroepe wat voortgebring word deur die operator $-A$.

2.4 Stelling

Laat A' en B' die vaste operatore en A en B die veranderlike operatore soos in paragraaf 1 wees.

Dan is $\lim\limits_{\substack{a\to a' \\ b\to b'}} \| e^{-tA} - e^{-tA'} \|_0 = 0$ gelykmatig op enige interval $[t_0, T]$ met $t_0 > 0$ as $|a-a'|_0 \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$.

Bewys: Ons beskou operatore A en B waar $|a-a'|_0$ en $|b-b'|_1$ so klein is dat die situasie in stelling 2.3 geldig is. Laat Γ die kromme wees wat in paragraaf 1 beskryf is.

Ons neem enige $u \in L^2(\Omega)$ en beskou

$$\| (e^{-tA} - e^{-tA'}) u \|_0$$

$$= \| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda;-A) u \, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda;-A') u \, d\lambda \|_0$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t} \| R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A') \|_0 \|u\|_0 |d\lambda|$$

$$\leqslant \frac{C}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \| R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A') \|_0 \|u\|_0 |d\lambda|$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t_0} \| R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A') \|_0 \| u \|_0 |d\lambda| ,$$

want op $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ is $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$ en dus is $e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t} \leqslant e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t_0}$ vir $t \geqslant t_0$.

Uit stellings 2.1 en 2.3 volg dat die twee integrande hierbo puntsgewys na nul konvergeer as $|a-a'|_0 \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$

Uit vergelyking (2.4) volg dat die eerste integrand hierbo gedomineer word deur $\frac{C_1}{1+|\lambda|} = \frac{C_1}{2}$, wat 'n integreerbare funksie op Γ_2 is, en dat die tweede integrand gedomineer word deur

$\frac{e^{(\mathrm{Re}\,\lambda)t_0}}{1+|\lambda|}$ wat integreerbaar is op $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$.

Nou volg die stelling uit Lebesgue se gedomineerde konvergensiestelling. □

2.5 Gevolg

Beskou vergelykings (1.3) en (1.4). As $U(t) = e^{-tA}u_0$ en $U'(t) = e^{-tA'}u_0$, volg uit 2.4 dat

$$\lim_{\substack{a\to a'\\ b\to b'}} \| U(t) - U'(t) \|_0 = 0$$

gelykmatig op $[t_0, T]$ as $|a - a'|_0 \to 0$ en $|b - b'|_1 \to 0$.

3. STABILITEIT VAN KLASSIEKE OPLOSSINGS

Ons het reeds opgemerk dat die funksie U gedefinieer deur $U(t) = e^{-tA}u_0$ aan $C^\infty((0,T);L^2(\Omega))$ behoort. Deur differensiasie onder die integraalteken volg dat vir elke $t > 0$ en $k=1,2,\dots$ is

$$\frac{d^k}{dt^k} U(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d^k}{dt^k} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda;-A) u_0 d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^k e^{\lambda t} R(\lambda;-A) u_0 \, d\lambda$$

$$= (-A)^k U(t).$$

(Kyk [8] hoofstuk 4 paragraaf 6)

Vir elke $k=1,2,\dots$ geld dus dat $\frac{d^k}{dt^k} U(t) \in D(A)$ en dat

$$(-A)\frac{d^k}{dt^k} U(t) = (-A)(-A)^k U(t)$$

$$= (-A)^{k+1} U(t)$$

$$= \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} U(t) .$$

Ons beskou nou die stabiliteit van oplossings van vergelyking (1.3).

3.1 <u>Stelling</u>

Laat A' en B' die vaste operatore en A en B die veranderlike operatore soos in paragraaf 1 wees. Laat $U(t) = e^{-tA}u_0$ en $U'(t) = e^{-tA'}u_0$ vir $t > 0$. Dan geld vir elke $k=1,2,...$ dat

$$\lim_{\substack{a\to a'\\ b\to b'}} \left\| \frac{d^k}{dt^k}U(t) - \frac{d^k}{dt^k}U'(t) \right\|_0 = 0$$

gelykmatig op $[t_0,T]$ vir elke $t_0 > 0$ as $|a-a'|_0 \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$.

<u>Bewys</u>: Beskou $\left\|\frac{d^k}{dt^k}U(t) - \frac{d^k}{dt^k}U'(t)\right\|_0$

$$= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^k e^{\lambda t}R(\lambda;-A)u_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^k e^{\lambda t}R(\lambda;-A')u_0 d\lambda\right\|_0$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |\lambda|^k e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t}\|R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A')\|_0 \|u_0\|_0 |d\lambda|$$

$$\leq \frac{C}{2\pi}\int_{\Gamma_2} \|R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A')\|_0 \|u_0\|_0 |d\lambda|$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_3} |\lambda|^k e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t_0}\|R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A')\|_0 \|u_0\|_0 |d\lambda| .$$

Uit stellings 2.1 en 2.3 volg dat die twee integrande hierbo puntgewys na nul konvergeer as $|a-a'|_0 \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$. Uit vergelyking (2.4) volg dat die eerste integrand gedomineer word deur 'n konstante wat integreerbaar is op Γ_2, en dat die tweede integrand gedomineer word deur $\frac{e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)t_0}|\lambda|^k}{1+|\lambda|}$ wat integreerbaar is op $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$.

Die resultaat volg dan uit die gedomineerde konvergensiestelling. □

Ons het in paragraaf 1 opgemerk dat daar funksies $u(\cdot,\cdot)$ en $u'(\cdot,\cdot)$ in $C^\infty((0,T)\times\bar{\Omega})$ bestaan só dat $u(\cdot,t) = U(t)$ en $u'(\cdot,t) = U'(t)$ byna oral op $(0,T)$ en dat u en u'

klassieke oplossings van vergelykings (1.1) en (1.2) respektiewelik is.

3.2 <u>Stelling</u>

Laat k en ℓ twee positiewe heelgetalle wees en laat m die kleinste heelgetal wees só dat $m > \ell + \frac{n}{2}$. Laat α enige multi-indeks wees met $|\alpha| \leq \ell$. Dan geld vir enige $t_0 > 0$ dat

$$\lim_{\substack{a \to a' \\ b \to b'}} \partial_x^\alpha \partial_t^k u(x,t) = \partial_x^\alpha \partial_t^k u'(x,t) \quad \text{gelykmatig op}$$

$\bar{\Omega} \times [t_0, T]$ as $|a - a'|_{m-2} \to 0$ en $|b - b'|_{m-1} \to 0$.

<u>Bewys</u>: Neem enige $t \in [t_0, T]$. Volgens Sobolev se lemma bestaan daar 'n $C_0 > 0$ só dat

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |\partial_x^\alpha \partial_t^k u(x,t) - \partial_x^\alpha \partial_t^k u'(x,t)|$$
$$\leq C_0 \| \partial_t^k u(\cdot,t) - \partial_t^k u'(\cdot,t) \|_m .$$

Uit die feit dat $(-A)\frac{d^k}{dt^k} U(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} U(t)$ en $\frac{d^k}{dt^k} U(t) \in D(A)$ volg die vergelykings

$$A\partial_t^k u(\cdot,t) = -\partial_t^{k+1} u(\cdot,t) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3.1}$$

$$B\partial_t^k u(\cdot,t) = 0 \quad \text{op} \quad \Gamma$$

en

$$A'\partial_t^k u'(\cdot,t) = -\partial_t^{k+1} u'(\cdot,t) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3.2}$$

$$B'\partial_t^k u'(\cdot,t) = 0 \quad \text{op} \quad \Gamma$$

Uit stellings 4.7 en 4.8 van hoofstuk 1 volg dat daar 'n $\delta > 0$ en 'n $C > 0$ bestaan só dat

$$\|v\|_m \leq C(\|Av\|_{m-2} + |Bv|_{m-1-\frac{1}{2}} + \|v\|_0)$$

vir alle $v \in H^m(\Omega)$ en alle operatore A en B met

$|a - a'|_{m-2} < \delta$ en $|b - b'|_{m-1} < \delta$.

As ons hierdie ongelykheid toepas op $A(\partial_t^k u(\cdot,t) - \partial_t^k u'(\cdot,t))$ dan volg uit vergelykings (3.1) en (3.2) asook vergelykings (2.5) en (2.6) van hoofstuk 1 dat

$$\begin{aligned}
&\| \partial_t^k u(\cdot,t) - \partial_t^k u'(\cdot,t) \|_m \\
\leqslant\ & C(\| A(\partial_t^k u(\cdot,t) - \partial_t^k u'(\cdot,t)) \|_{m-2} \\
&+ |B(\partial_t^k u(\cdot,t) - \partial_t^k u'(\cdot,t))|_{m-1-\frac{1}{2}} \\
&+ \| \partial_t^k u(\cdot,t) - \partial_t^k u'(\cdot,t) \|_0) \\
\leqslant\ & C(\| A\partial_t^k u(\cdot,t) - A'\partial_t^k u'(\cdot,t) \|_{m-2} \\
&+ \| (A' - A)\partial_t^k u'(\cdot,t)\|_{m-2} + |B\partial_t^k u(\cdot,t) - B'\partial_t^k u'(\cdot,t)|_{m-1-\frac{1}{2}} \\
&+ |(B' - B)\partial_t^k u'(\cdot,t)|_{m-1-\frac{1}{2}} + \|\partial_t^k u(\cdot,t) - \partial_t^k u'(\cdot,t)\|_0) \\
\leqslant\ & C(\| \partial_t^{k+1} u(\cdot,t) - \partial_t^{k+1} u'(\cdot,t) \|_{m-2} \\
&+ |a' - a|_{m-2} \| \partial_t^k u'(\cdot,t)\|_m + |b' - b|_{m-1} \| \partial_t^k u'(\cdot,t)\|_{m-2} \\
&+ \| \partial_t^k u(\cdot,t) - \partial_t^k u'(\cdot,t) \|_0).
\end{aligned}$$

Ons herhaal die proses vir die eerste uitdrukking in die laaste sommasie hierbo.

Ons beskou die twee vergelykings

$$\begin{aligned}
A\partial_t^{k+1} u(\cdot,t) &= -\partial_t^{k+2} u(\cdot,t) \quad \text{in} \quad \Omega \\
B\partial_t^{k+1} u(\cdot,t) &= 0 \quad \text{op} \quad \Gamma
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
A'\partial_t^{k+1} u'(\cdot,t) &= -\partial_t^{k+2} u'(\cdot,t) \quad \text{in} \quad \Omega \\
B'\partial_t^{k+1} u'(\cdot,t) &= 0 \quad \text{op} \quad \Gamma .
\end{aligned}$$

Op dieselfde wyse as tevore volg nou dat

$$\| \partial_t^{k+1} u(\cdot,t) - \partial_t^{k+1} u'(\cdot,t) \|_{m-2}$$

$$\leqslant C(\| \partial_t^{k+2} u(\cdot,t) - \partial_t^{k+2} u'(\cdot,t) \|_{m-4}$$

$$+ |a' - a|_{m-4} \| \partial_t^{k+1} u'(\cdot,t)\|_{m-2} + |b' - b|_{m-3} \|\partial_t^{k+1} u'(\cdot,t)\|_{m-4}$$

$$+ \| \partial_t^{k+1} u(\cdot,t) - \partial_t^{k+1} u'(\cdot,t)\|_0).$$

Ons sit die proses voort totdat ons regs 'n uitdrukking kry van die vorm

$$\| \partial_t^p u(\cdot,t) - \partial_t^p u'(\cdot,t)\|_0$$

$$= \| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^p e^{\lambda t}(R(\lambda;-A) - R(\lambda;-A'))u_0 \, d\lambda \|_0$$

Uit stelling 3.1 volg dat hierdie uitdrukking gelykmatig op $[t_0,T]$ na nul neig as $|a - a'|_0 \to 0$ en $|b - b'|_1 \to 0$. Hiermee is die resultaat bewys. □

HOOFSTUK 3. EVOLUSIEVERGELYKINGS MET DIFFERENSIAAL-OPERATORE OOK TYDAFHANKLIK

1. INLEIDING

Ons beskou die situasie in Hoofstuk 1, paragraaf 1 met die gebied Ω en rand Γ soos daar beskryf. Vir elke $t \in [0,T]$ definieer ons die tweede orde differensiaaloperator $A(t)$ deur

$$A(t) = \sum_{|p|\leq 2} a_p(x,t)\partial^p u .$$

Ons neem aan dat die koëffisiëntfunksies a_p oneindig veel keer differensieerbaar is op $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0,T]$. Ons definieer ook 'n eerste orde randoperator B deur

$$Bu = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j u + b_0(x)u \quad \text{met} \quad b_j \in C^\infty(\Gamma),\ j=0,\ldots,n.$$

In hierdie hoofstuk beskou ons die stabiliteit van die probleem

$$\begin{aligned} A(t)u(x,t) + \partial_t u(x,t) &= 0 \quad \text{in} \quad Q \\ Bu(x,t) &= 0 \quad \text{op} \quad \Sigma \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

met u_0 enige funksie in $L^2(\Omega)$.

Laat $A'(t)$ en B' operatore soortgelyk aan $A(t)$ en B met koëffisiënte a'_p en b'_j wees.

Dan beskou ons die volgende probleem soortgelyk aan (1.1):

$$\begin{aligned} A'(t)u'(x,t) + \partial_t u'(x,t) &= 0 \quad \text{in} \quad Q \\ B'u'(x,t) &= 0 \quad \text{op} \quad \Sigma \\ u'(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{1.2}$$

met u_0 dieselfde funksie as in (1.1).

Soos tevore beskou ons (1.2) as 'n vaste probleem en (1.1) as 'n veranderlike probleem.

Ons neem aan dat die operatore $A'(t)$ en B' aan aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 met $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ voldoen. Die resultate in paragraaf 5 van hoofstuk 1 is dus van toepassing.
Daar bestaan 'n $\delta > 0$ só dat die volgende eienskappe geld vir alle operatore $A(t)$, $t \in [0,T]$, en B met $|a - a'|_{0,0} < \delta$ en $|b - b'|_1 < \delta$.
As $D(A(t)) = \{u \in H^2(\Omega) : Bu = 0$ op $\Gamma\}$, dan is $A(t)$ 'n geslote lineêre operator in $L^2(\Omega)$ vir elke $t \in [0,T]$.
(In hierdie hoofstuk beskou ons dus $D(A(t))$ onafhanklik van $t \in [0,T]$).
Die resolventeversameling van $-A(t)$ omvat die versameling $\{\lambda : \text{Re}\,\lambda \geqslant 0\}$ en daar bestaan 'n $K > 0$ só dat

$$\|R(\lambda,-A(t))\|_0 \leqslant \frac{K}{1+|\lambda|} \quad , \text{ Re}\,\lambda \geqslant 0 \tag{1.3}$$

Deur analitiese voortsetting word bewys dat die resolventeversameling van $-A(t)$ 'n hoekgebied

$$S_\phi = \{\lambda : \lambda \neq 0, -\frac{\pi}{2} - \phi < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \phi\} \cup \{0\} \quad \text{met} \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

omvat en dat daar 'n $K > 0$ bestaan só dat vergelyking (1.3) geld vir alle $\lambda \in S_\phi$.
Ons assosieer met (1.1) en (1.2) die volgende beginwaardeprobleme in $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} A(t)U(t) + \frac{dU(t)}{dt} &= 0 \ , \ 0 < t < T \\ U(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

en

$$\begin{aligned} A'(t)U'(t) + \frac{dU'(t)}{dt} &= 0 \ , \ 0 < t < T \\ U'(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dit is bekend (kyk [9] paragraaf 5.2) dat (1.4) die eenduidige oplossing $U(t) = V(t,0)u_0$ het waar $V(t,s)$ die fundamentele oplossing (kyk [9] paragraaf 4.1) van (1.4) is wat vir $0 \leq s \leq t \leq T$ gedefinieer word deur:

$$V(t,s) = e^{-(t-s)A(s)} + \int_s^t e^{-(t-\tau)A(\tau)} R(\tau,s)d\tau$$

waar $R(t,s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s)$

$$\text{met} \quad R_1(t,s) = -(A(t) - A(s))e^{-(t-s)A(s)} \tag{1.6}$$

en $R_m(t,s) = \int_s^t R_1(t,\tau)R_{m-1}(\tau,s)d\tau$

vir $m=2,3,\ldots$.

Ons noem $V(t,s)$ ook die evolusie-operator geassosieer met probleem (1.4). Laat $V'(t,s)$ die fundamentele oplossing van (1.5) soortgelyk aan (1.6) wees. In hierdie hoofstuk beskou ons die stabiliteit van die evolusie-operatore $V(t,s)$.

Volgens [8] hoofstuk 4, stelling 7A bestaan daar 'n meetbare funksie $u(\cdot,\cdot) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{C}$ só dat $U(t) = u(\cdot,t)$ vir byna alle $t \in (0,T)$ en dat $\frac{dU(t)}{dt} = \partial_t u(\cdot,t)$ vir byna alle $t \in (0,T)$, waar die afgeleide $\partial_t u$ geneem word in die sin van distribusies in $\Omega \times (0,T)$. Die funksie $u(\cdot,\cdot)$ is dan 'n swak oplossing van vergelyking (1.1).
Aangesien $U(t) \in D(A(t)) \subset H^2(\Omega)$ vir elke $t \in (0,T)$, word die randwaardes in (1.1) in die sin van spooroperatore in Sobolev-ruimtes aangeneem. Die begintoestand word in die sin van $L^2(\Omega)$-konvergensie aangeneem. Die resultate van hierdie hoofstuk oor die stabiliteit van die evolusie-operatore gee dus uitspraak oor die stabiliteit van swak oplossings van (1.1).
Ons benodig die volgende ongelykhede vir die bewyse in paragraaf 2. As C 'n konstante is, gebruik ons die notasie

$C[|a|_{k,\ell},|b|_m]$ om aan te dui dat ons dié konstantes dieselfde kan kies vir alle operatore $A(t)$ en B met $|a-a'|_{k,\ell}$ en $|b-b'|_m$ klein genoeg. Vir elke $r,s,t \in [0,T]$ is

$$\| (A(t)-A(s))A(r)^{-1} \|_0 \leqslant C[|a|_{0,1},|b|_1]\,|t-s| \tag{1.7}$$

Vir elke s en $t \in [0,T]$ is $\| e^{-tA(s)} \|_0 \leqslant C[|a|_{0,0},|b|_1]$ (1.8)

en

$$\| A(s)e^{-tA(s)} \|_0 \leqslant \tfrac{1}{t}C[|a|_{0,0},|b|_1] \tag{1.9}$$

Vir $t > s$ en $n=1,2,\ldots$ is

$$\| R_n(t,s) \|_0 \leqslant C[|a|_{0,1},|b|_1]\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{1.10}$$

Vir $t > s$ is

$$\| R(t,s) \|_0 \leqslant C[|a|_{0,1},|b|_1] \exp\,(C[|a|_{0,1},|b|_1](t-s)) \tag{1.11}$$

Om hierdie ongelykhede te bewys, benodig ons die volgende ongelykheid wat volg uit stellings 4.7 en 4.8 van hoofstuk 1.

Daar bestaan 'n $\delta > 0$ en 'n konstante $C_0 > 0$ só dat $\| u \|_2 \leqslant C_0(\| A(t)u \|_0 + |Bu|_{\frac{1}{2}} + \| u \|_0)$ vir alle $u \in H^2(\Omega)$ en alle operatore $A(t)$ en B met $|a-a'|_{0,0} < \delta$ en $|b-b'|_1 < \delta$.

Aangesien $0 \in \rho(-A(t))$ vir alle $A(t)$ soos hierbo genoem, kan ons met behulp van kompakte inbeddings van Sobolev-ruimtes bewys (kyk bv [4] volume 1, hoofstuk 2, proposisie 5.2 vir die metode) dat ons die term $\| u \|_0$ hierbo kan weglaat, dit wil sê

$$\| u \|_2 \leqslant C(\| A(t)u \|_0 + |Bu|_{\frac{1}{2}}) \tag{1.12}$$

vir alle $u \in H^2(\Omega)$ en alle operatore $A(t)$ en B met

$|a-a'|_{0,0} < \delta$ en $|b-b'|_1 < \delta$.

(Ons kan (1.12) ook vind deur $\lambda = 0$ te stel in stelling 5.1(a) van hoofstuk 1.)

Ons bewys nou ongelykheid (1.7).

Uit die eerste middelwaardestelling van die differensiaalrekening volg dat vir enige $v \in H^2(\Omega)$ is

$$\|(A(t)-A(s))v\|_0 = \|\sum_{|p|\leq 2}(a_p(x,t)-a_p(x,s))\partial^p v\|_0$$

$$\leq C|a|_{0,1}|t-s|\|v\|_2.$$

Nou volg uit hierdie ongelykheid en uit (1.12) dat vir enige $u \in L^2(\Omega)$ is

$$\|(A(t)-A(s))A(r)^{-1}u\|_0$$

$$\leq C|a|_{0,1}|t-s|\|A(r)^{-1}u\|_2$$

$$\leq C[|a|_{0,1},|b|_1]|t-s|\|u\|_0$$

(Let op dat as $v = A(r)^{-1}u$, dan is $A(r)v = u$ in Ω en $Bv = 0$ op Γ).

Hiermee is (1.7) bewys.

Ongelykhede (1.8) en (1.9) is standaardresultate uit die teorie van analitiese semigroepe. (Kyk byvoorbeeld [8] hoofstuk 4, paragraaf 6). Die konstantes aan die regterkante van (1.8) en (1.9) is afhanklik van die konstante K in (1.3) wat dieselfde gekies kan word vir $|a-a'|_{0,0}$ en $|b-b'|_1$ klein genoeg. Vir die bewyse van (1.10) en (1.11) verwys ons na [10] bladsy 440. Ons kyk net kortliks na die bewys van (1.10) vir $n = 1$.

Ons skryf

$$R_1(t,s) = -(A(t)-A(s))A(s)^{-1}A(s)e^{-(t-s)A(s)}$$

en gebruik (1.7) en (1.9).

Die algemene geval volg dan deur induksie.

2. STABILITEIT VAN DIE OPLOSSINGS

In hierdie paragraaf beskou ons die stabiliteit van die evolusie-operatore wat in vergelyking (1.6) gedefinieer is.

2.1 Stelling

Laat $A'(t)$, $t \in [0,T]$, en B' die vaste operatore en $A(t)$, $t \in [0,T]$, en B die veranderlike operatore soos in paragraaf 1 wees. Laat $A'(t)$ en B' aan aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 met $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ voldoen. Dan geld vir elke $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ dat

$$\lim_{\substack{a\to a'\\ b\to b'}} V(t,s) = V'(t,s) \quad \text{in die } L^2(\Omega)\text{-operatornorm}$$

as $|a-a'|_{0,1} \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$.

Bewys: Die geval $s = t$ is triviaal. Ons beskou die konvergensie-eienskappe van elke van die terme in (1.6) vir $s < t$. Dit volg uit stelling 2.4 van hoofstuk 2 dat

$$e^{-(t-s)A(s)} \to e^{-(t-s)A'(s)} \quad \text{in die operatornorm}$$

as $|a-a'|_{0,0} \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$.

Ons beskou vervolgens die konvergensie-eienskappe van

$$\begin{aligned} R_1(t,s) &= -(A(t)-A(s))e^{-(t-s)A(s)} \\ &= A(s)e^{-(t-s)A(s)} - A(t)e^{-(t-s)A(s)} \\ &= A(s)e^{-(t-s)A(s)} - A(t)A(s)^{-1}A(s)e^{-(t-s)A(s)} \end{aligned}$$

Aangesien

$$A(s)e^{-(t-s)A(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda e^{\lambda(t-s)}R(\lambda;-A(s))d\lambda,$$

waar Γ die kromme soos in hoofstuk 2 is, volg soos in die bewys van stelling 3.1 hoofstuk 2, dat

$$A(s)e^{-(t-s)A(s)} \to A'(s)e^{-(t-s)A'(s)} \quad \text{in die operatornorm}$$

as $|a-a'|_{0,0} \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$.

Vervolgens beskou ons die konvergensie van

$$A(t)A(s)^{-1}A(s)e^{-(t-s)A(s)} \text{ na } A'(t)A'(s)^{-1}A'(s)e^{-(t-s)}A'(s).$$

Ons neem 'n vaste $u_0 \in L^2(\Omega)$ en stel

$$u' = A'(s)e^{-(t-s)A'(s)}u_0$$

$$u = A(s)e^{-(t-s)A(s)}u_0$$

$$w' = A'(s)^{-1}u'$$

$$w = A(s)^{-1}u.$$

Dan het ons die twee vergelykings

$$\begin{aligned} A'(s)w' &= u' \quad \text{in } \Omega \\ B'w' &= 0 \quad \text{op } \Gamma \end{aligned} \tag{2.1}$$

en

$$\begin{aligned} A(s)w &= u \quad \text{in } \Omega \\ Bw &= 0 \quad \text{op } \Gamma \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dan volg uit (1.12), (2.1) en (2.2) asook (2.5) en (2.6) van hoofstuk 1 dat

$$\begin{aligned} &\|w - w'\|_2 \\ \leq\ & C(\|A(s)(w-w')\|_0 + |B(w-w')|_{\frac{1}{2}}) \\ =\ & C(\|A(s)w - A'(s)w' + A'(s)w' - A(s)w'\|_0 \\ &+ |Bw - B'w' + B'w' - Bw'|_{\frac{1}{2}}) \\ \leq\ & C(\|u-u'\|_0 + |a-a'|_{0,0}\|w'\|_2 + |b-b'|_1\|w'\|_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nou is

$$\| u - u' \|_0$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |\lambda| e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)(t-s)} \| R(\lambda;-A(s)) - R(\lambda;-A'(s)) \|_0 \| u_0 \|_0 |d\lambda| \quad (2.4)$$

en uit (1.12) volg dat

$$\| w' \|_2 \leq C \| u' \|_0$$

$$\leq \frac{C}{2\pi} \int_\Gamma |\lambda| e^{(\mathrm{Re}\ \lambda)(t-s)} \| R(\lambda;-A'(s)) \|_0 \| u_0 \|_0 |d\lambda| \quad (2.5)$$

Verder skryf ons

$$A'(t)w' - A(t)w = (A'(t) - A(t))w' + A(t)(w' - w)$$

en dan is

$$\| A'(t)w' - A(t)w \|_0$$

$$\leq \| (A'(t) - A(t))w' \|_0 + \| A(t)(w' - w) \|_0$$

$$\leq C(|a' - a|_{0,0} \| w' \|_2 + |a|_{0,0} \| w' - w \|_2) \quad (2.6)$$

Nou volg uit vergelykings (2.3) tot (2.6) dat

$$A(t)A(s)^{-1}A(s)e^{-(t-s)A(s)} \to A'(t)A'(s)^{-1}A'(s)e^{-(t-s)A'(s)}$$

en dus ook dat

$$R_1(t,s) \to R_1'(t,s) \quad \text{in die operatornorm}$$

as $|a - a'|_{0,0} \to 0$ en $|b - b'|_1 \to 0$.

Vervolgens kyk ons na die konvergensie van

$$R_2(t,s) = \int_s^t R_1(t,\tau)R_1(\tau,s)d\tau \quad \text{na}$$

$$R_2'(t,s) = \int_s^t R_1'(t,\tau)R_1'(\tau,s)d\tau \ .$$

Die operatore $R_1(t,s)$ is vir elke vaste s en t begrensde operatore in $L^2(\Omega)$. Die produkreël kan dus op dié operatore van toepassing gemaak word. Dus geld vir elke τ met $s < \tau < t$ dat

$$R_1(t,\tau)R_1(\tau,s) \to R_1'(t,\tau)R_1'(\tau,s) \quad \text{as} \quad |a-a'|_{0,0} \to 0$$

en $|b-b'|_1 \to 0$.

Uit vergelyking (1.10) volg dat dië konvergensie gedomineer word deur 'n integreerbare funksie op $[s,t]$ en dus volg uit die gedomineerde konvergensiestelling dat $R_2(t,s) \to R_2'(t,s)$ in die operatornorm as $|a-a'|_{0,1} \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$. Deur induksie volg dan dat vir $n=3,4,\ldots$ sal $R_n(t,s) \to R_n'(t,s)$ as $|a-a'|_{0,1} \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$.

Vervolgens kyk ons na die konvergensie van

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(t,s) \quad \text{na} \quad \sum_{n=1}^{\infty} R_n'(t,s) \quad \text{vir elke} \quad s,t \in [0,T]$$

met $s < t$. Ons gebruik dieselfde metode as in die bewys van stelling 2.3 in hoofstuk 2. Ons beskou die twee reekse hierbo as Lebesgue-integrale met betrekking tot die telmaat van twee funksies gedefinieer op die natuurlike getalle $\mathbb{N}$ met waardes in die ruimte $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

Vir elke n is $\lim_{\substack{a\to a'\\ b\to b'}} R_n(t,s) = R_n'(t,s)$.

Uit vergelyking (1.10) volg dat hierdie konvergensie gedomineer word deur die funksie

$$g : n \to C[|a|_{0,1},|b|_1]\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$$

wat integreerbaar is oor $\mathbb{N}$ met betrekking tot die telmaat. Dan volg uit die gedomineerde konvergensiestelling dat

$$\lim_{\substack{a\to a'\\ b\to b'}} \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n'(t,s)$$

in die operatornorm as $|a-a'|_{0,1} \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$.

Laastens volg uit die produkreël, vergelykings (1.8) en (1.11), en die gedomineerde konvergensiestelling dat

$$\int_s^t e^{-(t-\tau)A(\tau)}R(\tau,s)d\tau \to \int_s^t e^{-(t-\tau)A'(\tau)}R'(\tau,s)d\tau$$

as $|a-a'|_{0,1} \to 0$ en $|b-b'|_1 \to 0$. $\square$

HOOFSTUK 4. EVOLUSIEVERGELYKINGS MET DIFFERENSIAAL- EN RANDOPERATORE BEIDE RUIMTE- EN TYDAFHANKLIK

1. INLEIDING

In hierdie hoofstuk beskou ons die gebied Ω met rand Γ en die operatore $A(t)$ en $B(t)$ soos in paragraaf 1 van hoofstuk 1 gedefinieer. Dus definieer ons vir elke $t \in [0,T]$ 'n tweede orde differensiaaloperator $A(t)$ deur

$$A(t)u = \sum_{|p|\leq 2} a_p(x,t)\partial^p u, \quad \text{waar die funksies } a_p$$

oneindig veel keer differensieerbaar is op $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0,T]$.
Vir elke $t \in [0,T]$ definieer ons 'n eerste orde randoperator $B(t)$ deur

$$B(t)u = \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\partial_j u + b_0(x,t)u, \quad \text{waar die funksies}$$

b_j oneindig veel keer differensieerbaar is op $\Gamma \times [0,T] = \bar{\Sigma}$.
In hierdie hoofstuk beskou ons die stabiliteit van die probleem

$$\begin{aligned} A(t)u(x,t) + \partial_t u(x,t) &= 0 \quad \text{in } Q \\ B(t)u(x,t) &= 0 \quad \text{op } \Sigma \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

met u_0 enige funksie in $L^2(\Omega)$.
Laat $A'(t)$ en $B'(t)$ operatore soortgelyk aan $A(t)$ en $B(t)$ met koëffisiënte a'_p en b'_j wees. Dan beskou ons die volgende probleem soortgelyk aan (1.1):

$$\begin{aligned} A'(t)u'(x,t) + \partial_t u'(x,t) &= 0 \quad \text{in } Q \\ B'(t)u'(x,t) &= 0 \quad \text{op } \Sigma \\ u'(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \tag{1.2}$$

met u_0 dieselfde funksie as in $L^2(\Omega)$.

Soos tevore beskou ons (1.2) as 'n vaste probleem en (1.1) as 'n veranderlike probleem. Ons neem aan dat die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$ aan aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 met $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2}-\theta_0, \frac{\pi}{2}+\theta_0]$ voldoen, met $\theta_0 \in (0,\frac{\pi}{2})$.

Die resultate in paragraaf 5 van hoofstuk 1 is dus van toepassing. Ons sal telkens wanneer nodig na dié resultate verwys. Ons merk egter reeds dat in hierdie hoofstuk die versameling

$$D(A(t)) = \{u \in H^2(\Omega) : B(t)u = 0 \quad \text{op } \Gamma\}$$

ook tydafhanklik is. Hierdie feit het 'n invloed op die konstruksie van die fundamentele oplossings asook die bewyse van die stabiliteitstellings.

Ons assosieer met (1.1) en (1.2) die volgende beginwaardeprobleme in $L^2(\Omega)$:

$$A(t)U(t) + \frac{dU(t)}{dt} = 0 \quad , \; 0 < t < T \qquad (1.3)$$

$$U(0) = u_0$$

en

$$A'(t)U'(t) + \frac{dU'(t)}{dt} = 0 \; , \; 0 < t < T \qquad (1.4)$$

$$U'(0) = u_0 .$$

Dit is bekend (kyk [9] paragraaf 5.3) dat (1.3) die eenduidige oplossing $U(t) = V(t,0)u_0$ het waar $V(t,s)$ die fundamentele oplossing van (1.3) is wat vir $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ gedefinieer word deur

$$V(t,s) = e^{-(t-s)A(t)} + \int_s^t e^{-(t-\tau)A(t)} R(\tau,s)d\tau$$

waar $\quad R(t,s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s) \qquad (1.5)$

met $\quad R_1(t,s) = -(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s})e^{-(t-s)A(t)}$

en $\quad R_m(t,s) = \int_s^t R_1(t,\tau)R_{m-1}(\tau,s)d\tau$ vir $m=2,3,\ldots$.

Laat $V'(t,s)$ die fundamentele oplossing van (1.4) soortgelyk aan (1.5) wees. In hierdie hoofstuk beskou ons die stabiliteit van die operatore $V(t,s)$.

Soos in hoofstuk 3 merk ons op dat daar 'n meetbare funksie $u(\cdot,\cdot):\Omega\times(0,T)\to\mathbb{C}$ bestaan sô dat $U(t) = u(\cdot,t)$ byna oral op $(0,T)$ en dat die funksie u dan 'n swak oplossing van (1.1) is in die sin soos in hoofstuk 3 paragraaf 1 beskryf. In die res van hierdie paragraaf herlei ons 'n aantal ongelykhede vir terme wat in (1.5) voorkom.

Volgens stelling 5.1 van hoofstuk 1 en die opmerking wat daarop volg, bestaan daar 'n $\delta > 0$ en 'n konstante $C > 0$ sô dat

$$\|u\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_1 + |\lambda|\|u\|_0$$

$$\leq C(\|(A(t)+\lambda)u\|_0 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}|B(t)u|_{-\frac{1}{2}} + |B(t)u|_{\frac{1}{2}}) \qquad (1.6)$$

vir alle $u \in H^2(\Omega)$, alle λ in die hoekgebied S_{θ_0}, alle $t \in [0,T]$ en alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a-a'|_{0,0} < \delta$ en $|b-b'|_{1,0} < \delta$.

Ons beskou vervolgens vir elke vaste $\lambda \in S_{\theta_0}$ die eienskappe van die operatorwaardige funksie $t \to R(\lambda;-A(t)) = (A(t)+\lambda)^{-1}$, $t \in [0,T]$.

Neem enige $f \in L^2(\Omega)$ en laat $u(t) = R(\lambda;-A(t))f$, $t \in [0,T]$. Dan geld die vergelykings

$$(A(t)+\lambda)u(t) = f \quad \text{in} \quad \Omega$$
$$B(t)u(t) = 0 \quad \text{op} \quad \Gamma$$

en dan volg uit (1.6) dat

$$\|u(t)\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|_1 + |\lambda|\,\|u(t)\|_0 \leq C\|f\|_0 \qquad (1.7)$$

In [9] bladsy 143 word bewys dat die funksie $t \to R(\lambda;-A(t)) = (A(t)+\lambda)^{-1}$ 'n kontinu-differensieerbare funksie van $[0,T]$ in $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ is, dit wil sê dat

$\lim_{h\to 0} h^{-1}[(A(t+h)-\lambda)^{-1} - (A(t)+\lambda)^{-1}]$ bestaan in die operator-norm. Hierdie limiet word aangedui deur

$$\frac{\partial}{\partial t}(A(t)+\lambda)^{-1} \quad \text{of} \quad \frac{\partial}{\partial t}R(\lambda;-A(t))$$ en is 'n begrensde lineêre operator in $L^2(\Omega)$.

Daar word ook bewys dat die operator $\frac{\partial}{\partial t}(A(t)+\lambda)^{-1}$ soos volg gedefinieer kan word:

Neem enige $f \in L^2(\Omega)$ en laat $u(t) = (A(t)+\lambda)^{-1}f$.

Dan is $\frac{\partial}{\partial t}(A(t)+\lambda)^{-1}f = w(t)$ waar $w(t)$ die oplossing is van die probleem

$$(A(t)+\lambda)w(t) = -\dot{A}(t)u(t) \quad \text{in} \quad \Omega$$
$$B(t)w(t) = -\dot{B}(t)u(t) \quad \text{op} \quad \Gamma,$$

waar die operatore $\dot{A}(t)$ en $\dot{B}(t)$ gedefinieer word deur

$$\dot{A}(t) = \sum_{|p|\leq 2} [\partial_t a_p(x,t)]\partial^p$$

en $$\dot{B}(t) = \sum_{j=1}^{n} [\partial_t b_j(x,t)]\partial_j + \partial_t b_0(x,t).$$

Nou volg uit vergelykings (1.6) en (1.7) asook vergelykings (2.5), (2.6) en (2.8) van hoofstuk 1 dat

$$\begin{aligned}
&\|w(t)\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|w(t)\|_1 + |\lambda|\,\|w(t)\|_0 \\
\leq\ & C(\|\dot{A}(t)u(t)\|_0 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}|\dot{B}(t)u(t)|_{-\frac{1}{2}} + |\dot{B}(t)u(t)|_{\frac{1}{2}}) \\
\leq\ & C(|a|_{0,1}\|u(t)\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}|b|_{1,1}\|u(t)\|_1 + |b|_{1,1}\|u(t)\|_2) \\
\leq\ & C(|a|_{0,1}\|f\|_0 + |b|_{1,1}\|f\|_0) \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Uit (1.8) volg dat vir enige $f \in L^2(\Omega)$ is

$$\| \frac{\partial}{\partial t} (A(t)+\lambda)^{-1} f \|_0 + |\lambda| \| \frac{\partial}{\partial t} (A(t)+\lambda)^{-1} f \|_0$$

$$\leqslant \; C(|a|_{0,1} + |b|_{1,1}) \| f \|_0$$

en dus kry ons die volgende afskatting vir die operatornorm van $\frac{\partial}{\partial t} (A(t) + \lambda)^{-1}$:

$$\| \frac{\partial}{\partial t} (A(t)+\lambda)^{-1} \|_0 \leqslant \frac{C(|a|_{0,1} + |b|_{1,1})}{1 + |\lambda|}$$

$$= \frac{C[|a|_{0,1}, |b|_{1,1}]}{1 + |\lambda|} \tag{1.9}$$

Deur differensiasie onder die integraalteken (kyk [9] bladsy 131) volg dat

$$R_1(t,s) = -(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}) e^{-(t-s)A(t)}$$

$$= -(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}) \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda(t-s)} (A(t) + \lambda)^{-1} \, d\lambda$$

$$= - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda(t-s)} \frac{\partial}{\partial t} (A(t) + \lambda)^{-1} \, d\lambda$$

en dan volg uit (1.9) op dieselfde manier as by die gelykmatige begrensdheid van analitiese semigroepe (kyk [8] hoofstuk 4 paragraaf 6) dat

$$\| R_1(t,s) \|_0 \leqslant C[|a|_{0,1}, |b|_{1,1}] \tag{1.10}$$

Nou volg op dieselfde manier as in hoofstuk 3 dat

$$\| R_n(t,s) \|_0 \leqslant C[|a|_{0,1}, |b|_{1,1}] \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{1.11}$$

vir $n=2,3,...$ en

$$\| R(t,s) \|_0 \leqslant C[|a|_{0,1}, |b|_{1,1}] \exp\,(C[|a|_{0,1}, |b|_{1,1}](t-s)) \tag{1.12}$$

2. STABILITEIT VAN DIE OPLOSSINGS

In hierdie paragraaf beskou ons die stabiliteit van die operatore $V(t,s)$ wat in vergelyking (1.5) gedefinieer word.

2.1 Stelling

Laat $A'(t)$ en $B'(t)$, $t \in [0,T]$ die vaste operatore en $A(t)$ en $B(t)$, $t \in [0,T]$ die veranderlike operatore soos in paragraaf 1 wees. Laat die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$ aan aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 met $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2}-\theta_0, \frac{\pi}{2}+\theta_0]$, $\theta_0 \in (0,\frac{\pi}{2})$ voldoen. Dan geld vir elke $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ dat

$$\lim_{\substack{a\to a'\\ b\to b'}} V(t,s) = V'(t,s) \quad \text{in die } L^2(\Omega)\text{-operatornorm as}$$

$$|a-a'|_{0,1} \to 0 \quad \text{en} \quad |b-b'|_{1,1} \to 0.$$

Bewys: Ons beskou eerstens die konvergensie-eienskappe van die operatore $R_1(t,s)$.

Ons neem enige $f \in L^2(\Omega)$ en stel $u(t) = (A(t)+\lambda)^{-1}f$, $u'(t) = (A'(t)+\lambda)^{-1}f$, $w(t) = \frac{\partial}{\partial t}(A(t)+\lambda)^{-1}f$ en $w'(t) = \frac{\partial}{\partial t}(A'(t)+\lambda)^{-1}f$.

Ons kry dus die volgende vergelykings:

$$\begin{aligned}(A(t)+\lambda)u(t) &= f \quad \text{in } \Omega \\ B(t)u(t) &= 0 \quad \text{op } \Gamma,\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}(A'(t)+\lambda)u'(t) &= f \quad \text{in } \Omega \\ B'(t)u'(t) &= 0 \quad \text{op } \Gamma,\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}(A(t)+\lambda)w(t) &= -\dot{A}(t)u(t) \quad \text{in } \Omega \\ B(t)w(t) &= -\dot{B}(t)u(t) \quad \text{op } \Gamma\end{aligned} \tag{2.3}$$

en

$$\begin{aligned} (A'(t)+\lambda)w'(t) &= -\dot{A}'(t)u'(t) \quad \text{in} \quad \Omega \\ B'(t)w'(t) &= -\dot{B}'(t)u'(t) \quad \text{op} \quad \Gamma \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ons beskou nou eers die verskil $u(t) - u'(t)$.

Uit vergelyking (1.6) volg dat

$$\begin{aligned} &\| u(t) - u'(t) \|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}} \| u(t) - u'(t) \|_1 + |\lambda| \| u(t) - u'(t) \|_0 \\ \leq\ & C(\| (A(t)+\lambda)(u(t)-u'(t)) \|_0 + |\lambda|^{\frac{1}{2}} |B(t)(u(t)-u'(t))|_{-\frac{1}{2}} \\ &\qquad + |B(t)(u(t)-u'(t))|_{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dan volg uit (2.1) en (2.2) dat

$$\begin{aligned} &(A(t)+\lambda)u(t) - (A(t)+\lambda)u'(t) \\ =\ & (A(t)+\lambda)u(t) - (A'(t)+\lambda)u'(t) + (A'(t)+\lambda)u'(t) \\ &\qquad - (A(t)+\lambda)u'(t) \\ =\ & (A'(t) - A(t))u'(t) \end{aligned}$$

en dan volg uit vergelyking (2.5) van hoofstuk 1 dat

$$\| (A(t)+\lambda)(u(t)-u'(t)) \|_0 \leq C|a'-a|_{0,0} \| u'(t) \|_2 \tag{2.6}$$

Op dieselfde manier volg uit (2.1) en (2.2) dat

$$B(t)(u(t)-u'(t)) = (B'(t) - B(t))u'(t)$$

en dan volg uit vergelykings (2.6) en (2.8) van hoofstuk 1 dat

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}} |B(t)(u(t)-u'(t))|_{-\frac{1}{2}} \leq C|\lambda|^{\frac{1}{2}} |b'-b|_{1,0} \| u'(t) \|_1 \tag{2.7}$$

en

$$|B(t)(u(t)-u'(t))|_{\frac{1}{2}} \leq C|b'-b|_{1,0} \| u'(t) \|_2 \tag{2.8}$$

Nou volg uit vergelykings (1.7) en (2.5) tot (2.8) dat

$$\begin{aligned} &\| u(t) - u'(t) \|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}} \| u(t) - u'(t) \|_1 + |\lambda| \| u(t) - u'(t) \|_0 \\ \leq\ & C(|a'-a|_{0,0} \| u'(t) \|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}} |b'-b|_{1,0} \| u'(t) \|_1 + |b'-b|_{1,0} \| u'(t) \|_2) \\ \leq\ & C(|a'-a|_{0,0} + |b'-b|_{1,0}) \| f \|_0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ons beskou vervolgens die verskil $w(t) - w'(t)$.

Uit vergelyking (1.6) volg dat

$$\|w(t)-w'(t)\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|w(t)-w'(t)\|_1 + |\lambda|\|w(t)-w'(t)\|_0$$

$$\leq C(\|(A(t)+\lambda)(w(t)-w'(t))\|_0 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}|B(t)(w(t)-w'(t))|_{-\frac{1}{2}}$$

$$+ |B(t)(w(t)-w'(t))|_{\frac{1}{2}}) \qquad (2.10)$$

Nou volg uit vergelykings (2.3) en (2.4) dat

$$(A(t)+\lambda)w(t) - (A(t)+\lambda)w'(t)$$

$$= (A(t)+\lambda)w(t) - (A'(t)+\lambda)w'(t) + (A'(t)+\lambda)w'(t) - (A(t)+\lambda)w'(t)$$

$$= \dot{A}'(t)u'(t) - \dot{A}(t)u(t) + (A'(t)-A(t))w'(t)$$

$$= (\dot{A}'(t)-\dot{A}(t))u'(t) + \dot{A}(t)(u'(t)-u(t)) + (A'(t)-A(t))w'(t)$$

en dan volg uit vergelykings (1.7), (1.8) en (2.9) asook vergelyking (2.5) van hoofstuk 1 dat

$$\|(A(t)+\lambda)(w(t)-w'(t))\|_0$$

$$\leq C(|a'-a|_{0,1}\|u'(t)\|_2 + |a|_{0,1}\|u'(t)-u(t)\|_2$$

$$+ |a'-a|_{0,0}\|w'(t)\|_2$$

$$\leq C\{|a'-a|_{0,1}\|f\|_0 + |a|_{0,1}(|a'-a|_{0,0} + |b'-b|_{1,0})\|f\|_0$$

$$+ |a'-a|_{0,0}(|a|_{0,1} + |b|_{1,1})\|f\|_0\}$$

$$\leq C[|a|_{0,1},|b|_{1,1}](|a'-a|_{0,1} + |b'-b|_{1,0})\|f\|_0 \qquad (2.11)$$

Op dieselfde manier as hierbo volg uit vergelykings (2.3) en (2.4) dat

$$B(t)w(t) - B(t)w'(t)$$

$$= (\dot{B}'(t)-\dot{B}(t))u'(t) + \dot{B}(t)(u'(t)-u(t)) + (B'(t)-B(t))w'(t).$$

Nou volg uit vergelykings (2.6) en (2.8) van hoofstuk 1 dat

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}}|B(t)(w(t) - w'(t))|_{-\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \; C\{|b' - b|_{1,1}|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u'(t)\|_1 + |b|_{1,1}|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u'(t) - u(t)\|_1 + |b' - b|_{1,0}|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|w'(t)\|_1\}$$

en

$$|B(t)(w(t) - w'(t))|_{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \; C\{|b' - b|_{1,1}\|u'(t)\|_2 + |b|_{1,1}\|u'(t) - u(t)\|_2 + |b' - b|_{1,0}\|w'(t)\|_2\}$$

en dan volg uit vergelykings (1.7), (1.8) en (2.9) dat

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}}|B(t)(w(t) - w'(t))|_{-\frac{1}{2}} + |B(t)(w(t) - w'(t))|_{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \; C[|a|_{0,1}, |b|_{1,1}](|a' - a|_{0,1} + |b' - b|_{1,1})\|f\|_0 \tag{2.12}$$

Uit vergelykings (2.10), (2.11) en (2.12) volg dan dat

$$\|w(t) - w'(t)\|_2 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|w(t) - w'(t)\|_1 + |\lambda|\|w(t) - w'(t)\|_0$$

$$\leqslant \; C[|a|_{0,1}, |b|_{1,1}](|a' - a|_{0,1} + |b' - b|_{1,1})\|f\|_0 \tag{2.13}$$

Aangesien $w(t) = \frac{\partial}{\partial t}(A(t) + \lambda)^{-1}f$ en $w'(t) = \frac{\partial}{\partial t}(A'(t) + \lambda)^{-1}f$, kan ons uit (2.13) aflei dat

$$\lim_{\substack{a \to a' \\ b \to b'}} \frac{\partial}{\partial t}(A(t) + \lambda)^{-1} = \frac{\partial}{\partial t}(A'(t) + \lambda)^{-1}$$

in die operatornorm as $|a' - a|_{0,1} \to 0$ en $|b' - b|_{1,1} \to 0$.

Ons het gevind dat

$$R_1(t,s) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda(t-s)} \frac{\partial}{\partial t}(A(t) + \lambda)^{-1}\, d\lambda.$$

Deur van vergelyking (1.9) gebruik te maak vind ons op presies dieselfde manier as in die bewys van stelling 2.4 in hoofstuk 2 dat

$$\lim_{\substack{a \to a' \\ b \to b'}} R_1(t,s) = R_1'(t,s) \quad \text{in die operatornorm as}$$

$|a'-a|_{0,1} \to 0$ en $|b'-b|_{1,1} \to 0.$

Die konvergensie-eienskappe van die res van die terme in vergelyking (1.5) volg op presies dieselfde manier as in die bewys van stelling 2.1 van hoofstuk 3.

Hiermee is die bewys van die stelling voltooi. $\square$

HOOFSTUK 5 ISOMORFIESTELLINGS EN STABILITEIT VAN NIE-HOMOGENE EVOLUSIEVERGELYKINGS

1. INLEIDING

In hierdie hoofstuk beskou ons die gebied Ω met rand Γ en die operatore $A(t)$ en $B(t)$ soos in paragraaf 1 van hoofstuk 1 gedefinieer.

Dus vir elke $t \in [0,T]$ definieer ons 'n tweede orde differensiaaloperator $A(t)$ deur

$$A(t)u = \sum_{|p|\leq 2} a_p(x,t)\partial^p u,$$ waar die funksies a_p oneindig veel keer differensieerbaar is op $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0,T]$.

Vir elke $t \in [0,T]$ definieer ons 'n eerste orde randoperator $B(t)$ deur

$$B(t)u = \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\partial_j u + b_0(x,t)u,$$ waar die funksies b_j oneindig veel keer differensieerbaar is op $\Gamma \times [0,T] = \bar{\Sigma}$.

In hierdie hoofstuk beskou ons die stabiliteit van die probleem

$$\begin{aligned} A(t)u(x,t) + \partial_t u(x,t) &= f(x,t) \quad \text{in} \quad Q \\ B(t)u(x,t) &= g(x,t) \quad \text{op} \quad \Sigma \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Laat $A'(t)$ en $B'(t)$ operatore soortgelyk aan $A(t)$ en $B(t)$ met koëffisiënte a'_p en b'_j wees. Dan beskou ons die volgende probleem soortgelyk aan (1.1).

$$\begin{aligned} A'(t)u'(x,t) + \partial_t u'(x,t) &= f'(x,t) \quad \text{in} \quad Q \\ B'(t)u'(x,t) &= g'(x,t) \quad \text{op} \quad \Sigma \\ u'(x,0) &= u'_0(x) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Soos tevore beskou ons (1.2) as 'n vaste probleem en (1.1) as 'n veranderlike probleem.

Ons neem aan dat die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$ aan aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 met $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ voldoen.

Ons beskou die stabiliteit van probleem (1.2) onder veranderings in die koëffisiënte van die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$ en die funksies f', g' en u_0'. Die funksieruimtes wat vir die oplossings van probleme (1.1) en (1.2) gebruik word, word kortliks in paragraaf 2 beskryf.

Anders as in vorige hoofstukke, waar ons met die eksplisiete vorm van die oplossings gewerk het om stabiliteit te bewys, gaan ons in hierdie hoofstuk van isomorfiestellings en die bekende oop afbeeldingstelling van die funksionaalanalise gebruik maak om ongelykhede af te lei, met behulp waarvan ons die stabiliteit van die oplossings sal bewys.

2. FUNKSIERUIMTES

In hierdie paragraaf beskou ons die Sobolev-funksieruimtes $H^{r,s}(Q)$ en $H^{r,s}(\Sigma)$ waar r en s reële getalle is. Ons gee slegs die definisies en basiese eienskappe sonder bewys. Vir volledige besonderhede verwys na [4] volume 2 hoofstuk 4, paragraaf 2.

Ons het reeds in hoofstuk 1 die definisies gegee van $H^m(\Omega)$, $m=0,1,\ldots$ en $H^s(\Gamma)$, s reëel. In hierdie paragraaf werk ons met die ruimte $H^s(\Omega)$, s reëel en ≥ 0. As gevolg van die gladheidsaannames vir die rand Γ en Ω kan ons $H^s(\Omega)$ definieer as die versameling van alle restriksies tot Ω van funksies in $H^s(\mathbb{R}^n)$ met norm

$$\|u\|_{s,\Omega} = \inf \|U\|_{s,\mathbb{R}^n}$$

waar die infimum geneem word oor alle $U \in H^s(\mathbb{R}^n)$ wat byna oral gelyk is aan u op Ω.

Ons kan al ons definisies van die verskillende Sobolev-ruimtes uitbrei na funksies (of distribusies) met waardes in 'n Hilbert-ruimte. Die absolute waardes van die funksiewaardes word dan oral vervang deur die norm in die betrokke Hilbert-ruimte. Kyk byvoorbeeld [4] volume 1, hoofstuk 1, paragraaf 1.

Ons gebruik die notasie $H^s(0,T;X)$ vir die Sobolev-ruimte H^s van funksies gedefinieer op 'n oop interval $(0,T)$ met waardes in 'n Hilbert-ruimte X. Vir enige $r \geqslant 0$ en $s \geqslant 0$ definieer ons nou

$$H^{r,s}(Q) = H^0(0,T;H^r(\Omega)) \cap H^s(0,T;H^0(\Omega)).$$

Dan is $H^{r,s}(Q)$ 'n Hilbert-ruimte met norm gedefinieer deur

$$\left(\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{H^r(\Omega)}\,dt + \|u\|^2_{H^s(0,T;H^0(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1)$$

As gevolg van die gladheidsaannames vir Ω en Γ, kan ons $H^{r,s}(Q)$ ook beskou as die versameling van alle restriksies tot Q van funksies in $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$. Laasgenoemde ruimte kan ook met behulp van Fourier-transformasies gedefinieer word deur

$$H^{r,s}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$$
$$= \{v : [(1+|\xi|^2)^{r/2} + (1+\tau^2)^{s/2}]Fv \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi \times \mathbb{R}_\tau)\}$$

waar $Fv(\xi,\tau)$ die Fourier-transformasie van v in x en t is.

Die norm in $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ word gedefinieer deur

$$\|u\|^2_{r,s} = \int_{\mathbb{R}^n_\xi \times \mathbb{R}_\tau} [(1+|\xi|^2)^{r/2} + (1+\tau^2)^{s/2}]^2 |Fv(\xi,\tau)|^2 d\xi\, d\tau \qquad (2.2)$$

In die geval waar $Q = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ is die norms gedefinieer deur (2.1) en (2.2) ekwivalent.

Vir 'n algemene $Q = \Omega \times (0,T)$ (met die nodige gladheidsaannames) kan ons die norm $\|u\|_{r,s,Q}$ ook definieer as die kwosiëntnorm

$$\|u\|_{r,s,Q} = \inf \|U\|_{r,s} \tag{2.3}$$

waar die infimum geneem word oor alle $U \in H^{r,s}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t)$ met $U = u$ byna oral op Q. In die geval waar $r = s$ is $H^{r,s}(Q)$ dieselfde as die gewone Sobolev-ruimte $H^r(Q)$.

Ons benodig 'n resultaat oor die interpolasie tussen die Sobolev-ruimtes $H^{r,s}$. Vir die definisie en eienskappe van die interpolasieruimtes $[X,Y]_\theta$ waar X en Y Hilbert-ruimtes is en $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ verwys ons na [4] volume 1, hoofstuk 1, paragraaf 2.

2.1 Interpolasiestelling

Vir elke r,s met $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ en $\theta \in [0,1]$ is

$$[H^{r,s}(Q), L^2(Q)]_\theta = H^{(1-\theta)r,(1-\theta)s}(Q).$$

(Kyk [4] volume 2, hoofstuk 4, proposisie 2.1)

Ons benodig die volgende ongelykheid in $H^{r,s}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t)$.

2.2 Stelling

Laat ϕ enige funksie gedefinieer op $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ met begrensde eerste orde afgeleides wees. Dan geld vir alle $u \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t)$ dat

$$\|\phi u\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4}} \leqslant C|\phi|_{1,1}\|u\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4}} \tag{2.4}$$

waar $|\phi|_{1,1} = \sup\{|\partial_x^\alpha \partial_t^j \phi(x,t)| : |\alpha| \leqslant 1; j=0,1; (x,t) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t\}$

Bewys: Dit volg maklik uit vergelyking (2.2) dat die norms

$\|u\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}$ en $(\|u\|^2_{\frac{1}{2},0} + \|u\|^2_{0,\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$ ekwivalent is.

Ons werk dus afsonderlik met die ruimtes $H^{\frac{1}{2},0}$ en $H^{0,\frac{1}{4}}$. Uit stelling 2.1 volg dat $H^{\frac{1}{2},0}$ 'n interpolasieruimte tussen $H^{1,0}$ en $H^{0,0}$ is, naamlik $[H^{1,0}, H^{0,0}]_{\frac{1}{2}}$. Vir enige $u \in H^{1,0}$ is

$$\|\phi u\|^2_{1,0} = \int_{\mathbb{R}^n_\xi \times \mathbb{R}_\tau} (1 + |\xi|^2)\,|F(\phi u)(\xi,\tau)|^2 \, d\xi\, d\tau .$$

Uit die feit dat hierdie norm ekwivalent is aan die norm wat gedefinieer word deur

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t} |\partial^\alpha_x(\phi u)(x,t)|^2 \, dx\, dt\Big)^{\frac{1}{2}},$$

volg dat die afbeelding $u \to \phi u$ kontinu is van $H^{1,0}$ na $H^{1,0}$ en dat

$$\|\phi u\|_{1,0} \leq C|\phi|_{1,0}\|u\|_{1,0} \quad \text{vir alle} \quad u \in H^{1,0}.$$

Op dieselfde manier volg dat die afbeelding $u \to \phi u$ ook kontinu is van $H^{0,0}(=L^2)$ na $H^{0,0}$ en dat $\|\phi u\|_{0,0} \leq C|\phi|_{0,0}\|u\|_{0,0}$ vir alle $u \in H^{0,0}$.

Dan volg uit 'n bekende stelling oor interpolasieruimtes (kyk [4] volume 1, hoofstuk 1, stelling 5.1) dat die afbeelding $u \to \phi u$ kontinu is van $H^{\frac{1}{2},0}$ na $H^{\frac{1}{2},0}$ en dat

$$\begin{aligned} \|\phi u\|_{\frac{1}{2},0} &\leq C \text{ maks } (|\phi|_{1,0}, |\phi|_{0,0})\|u\|_{\frac{1}{2},0} \\ &= C|\phi|_{1,0}\|u\|_{\frac{1}{2},0} \end{aligned} \qquad (2.5)$$

vir alle $u \in H^{\frac{1}{2},0}$.

Uit stelling 2.1 volg ook dat

$H^{0,\frac{1}{4}} = [H^{0,1}, H^{0,0}]_{\frac{3}{4}}$ en dan volg op dieselfde

wyse as hierbo dat

$$\|\phi u\|_{0,\frac{1}{4}} \leq C|\phi|_{0,1}\|u\|_{0,\frac{1}{4}} \tag{2.6}$$

vir alle $u \in H^{0,\frac{1}{4}}$.

Nou volg (2.4) uit (2.5) en (2.6). □

Ons beskou vervolgens die Sobolev-funksieruimtes $H^{r,s}(\Sigma)$ met $r \geq 0$ en $s \geq 0$. Ons definieer

$$H^{r,s}(\Sigma) = H^0(0,T;H^r(\Gamma)) \cap H^s(0,T;H^0(\Gamma)).$$

In die geval waar Ω 'n halfruimte

$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x',x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ is kan ons

ook die volgende ekwivalente definisie gee.

Ons definieer eers die norm $\|U\|_{r,s}$ in $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1}_{x'} \times \mathbb{R}_t)$ met behulp van die Fourier-transformasie soos in (2.2) en dan is

$\|u\|_{r,s,\Sigma} = \inf \|U\|_{r,s}$ waar die infimum

geneem word oor alle U in $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1}_{x'} \times \mathbb{R}_t)$ met $U = u$ byna oral op $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Vir 'n algemene $Q = \Omega \times (0,T)$ (met die nodige gladheidsaannames) geld die volgende twee belangrike stellings.

2.3 <u>Stelling</u>

Beskou die ruimte $H^{r,s}(Q)$ met $r \geq 0$, $s \geq 0$. Dan geld vir elke heelgetal j met $0 \leq j \leq r$ dat die afbeelding $u \to \partial^\alpha_x u$, $|\alpha| \leq j$, kontinu is vanaf $H^{r,s}(Q)$ in

$H^{r-j,\frac{r-j}{r}\cdot s}(Q)$, en vir elke heelgetal k met $0 \leqslant k \leqslant r$ dat die afbeelding $u \to \partial_t^k u$ kontinu is vanaf $H^{r,s}(Q)$ in $H^{\frac{s-k}{s}\cdot r, s-k}(Q)$. (Kyk [4] volume 2, hoofstuk 4, proposisie 2.3).

2.4 <u>Spoorstelling</u>

(a) Neem enige $u \in H^{r,s}(Q)$ met $r > \frac{1}{2}$ en $s \geqslant 0$ en laat ν die inwaartsgerigte normaaleenheidsvektor op Σ wees. Vir elke getal j met $0 \leqslant j < r - \frac{1}{2}$ kan ons die spoor $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$ van u op Σ definieer. Verder geld dat die afbeelding $u \to \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$ kontinu is vanaf $H^{r,s}(Q)$ na $H^{r-j-\frac{1}{2},\frac{r-j-\frac{1}{2}}{r}\cdot s}(\Sigma)$.

(b) Neem enige $u \in H^{r,s}(Q)$ met $s > \frac{1}{2}$, $r \geqslant 0$. Vir elke heelgetal k met $0 \leqslant k < s - \frac{1}{2}$ kan ons die spoor $\partial_t^k u(x,0)$ van u op Ω definieer. Verder geld dat die afbeelding $u \to \partial_t^k u(x,0)$ kontinu is vanaf $H^{r,s}(Q)$ na $H^{\frac{s-k-\frac{1}{2}}{s}\cdot r}(\Omega)$.

(Kyk [4] volume 2, hoofstuk 4, stelling 2.1).

Ons gaan oplossings van probleem (1.1) in die ruimte $H^{2,1}(Q)$ beskou. As $u \in H^{2,1}(Q)$ dan volg uit stelling 2.3 dat $A(t)u \in H^{0,0}(Q) = L^2(Q)$. Verder volg uit 2.3 dat vir enige $i=1,2,\ldots,n$ is

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{1,\frac{1}{2}}(Q) \quad \text{en dan volg uit stelling 2.4(a)}$$

dat die spoor van $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ op Σ aan $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ behoort.

Ons sien dus dat $B(t)u \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ vir elke $u \in H^{2,1}(Q)$. Ook volg uit stelling 2.4(b) dat $u(x,0) \in H^1(\Omega)$ vir elke $u \in H^{2,1}(Q)$.

Na aanleiding van hierdie opmerkings herlei ons die volgende ongelykhede vir die operatore $A(t)$ en $B(t)$.

2.5 Stelling

(a) $\|A(t)u\|_{0,0,Q} \leq C|a|_{0,0}\|u\|_{2,0,Q}$ (2.7)

vir elke $u \in H^{2,1}(Q)$ en $t \in [0,T]$.

(b) $\|B(t)u\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\Sigma} \leq C|b|_{1,1}\|u\|_{2,1,Q}$ (2.8)

vir elke $u \in H^{2,1}(Q)$ en $t \in [0,T]$.

Bewys: Die geldigheid van (a) volg direk uit die feit dat 'n ekwivalente norm vir u in $H^{2,0}(Q)$ gedefinieer kan word deur

$$\left(\int_{\Omega}\int_{0}^{T} \sum_{|\alpha|\leq 2} |\partial_x^{\alpha}u(x,t)|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Om (b) te bewys mag ons aanneem dat $Q = \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_t$ en

$\Sigma = \mathbb{R}_{x'}^{n-1} \times \mathbb{R}_t$.

Dan volg uit stellings 2.2, 2.3 en 2.4 dat

$$\begin{aligned}\|b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\Sigma} &\leq C|b|_{1,1}\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\Sigma} \\ &\leq C|b|_{1,1}\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{1,\frac{1}{2},Q} \\ &\leq C|b|_{1,1}\|u\|_{2,1,Q} \qquad \square\end{aligned}$$

3. STABILITEIT VAN DIE OPLOSSINGS

In hierdie paragraaf beskou ons die stabiliteit van oplossings van vergelyking (1.1) in die ruimte $H^{2,1}(Q)$. Ons begin met 'n vermelding van die betrokke bestaanstelling.

3.1 Stelling

Laat die operatore $A(t)$ en $B(t)$, $t \in [0,T]$ aan aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 met $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ voldoen. Dan het vergelyking (1.1) 'n eenduidige oplossing $u \in H^{2,1}(Q)$ vir elke gegewe $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ en $u_0 \in H^1(\Omega)$. (Kyk [4] volume 2, hoofstuk 4, stelling 6.1). Dit blyk uit die aangehaalde stelling in [4] dat daar vir vergelykings van hoër orde sekere versoenbaarheidsvoorwaardes bestaan waaraan die funksies f, g en u_0 moet voldoen vir die oplossing om te bestaan. (Kyk vergelyking (6.9) op bladsy 33).

By vergelykings van die tweede orde is hierdie voorwaardes nie van toepassing nie en ons kry dus die bestaan van oplossings vir enige keuse van die funksies f, g en u_0 in die betrokke ruimtes.

In hierdie paragraaf wil ons die volgende stabiliteitstelling bewys.

3.2 Stelling

Laat $A'(t)$ en $B'(t)$, $t \in [0,T]$ die vaste operatore en $A(t)$ en $B(t)$, $t \in [0,T]$ die veranderlike operatore soos in paragraaf 1 wees. Laat die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$ aan aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 met $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ voldoen.

(a) Dan bestaan daar 'n $\delta > 0$ sô dat vergelyking (1.1) 'n eenduidige oplossing $u \in H^{2,1}(Q)$ het vir elke $f \in L^2(Q)$, $g \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$ en vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a - a'|_{0,0} < \delta$ en $|b - b'|_{1,0} < \delta$

(b) As u' die eenduidige oplossing van (1.2) is, dan geld dat $u \to u'$ in $H^{2,1}(Q)$ as $|a - a'|_{0,0} \to 0$, $|b - b'|_{1,1} \to 0$, $f \to f'$ in $L^2(Q)$, $g \to g'$ in $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ en $u_0 \to u_0'$ in $H^1(\Omega)$.

Die res van hierdie paragraaf word aan die bewys van stelling 3.2 gewy. Ons gee eers aandag aan 3.2(a) wat oor die bestaan van die oplossings handel. Dit blyk uit die teorie van paraboliese evolusievergelykings (kyk [4] volume 2, hoofstuk 4, paragrawe 3 tot 6) dat die bestaan van oplossings van vergelyking (1.1) alleenlik berus op die geldigheid van ongelykheid (4.1) van hoofstuk 1. In stelling 4.4 van hoofstuk 1 word bewys dat die ongelykheid geldig bly vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a - a'|_{0,0}$ en $|b - b'|_{1,0}$ klein genoeg. Hiermee is die bewys van stelling 3.2(a) dus afgehandel.

Uit stellings 2.3, 2.4, 2.5 en 3.1 volg dat die afbeelding

$$u \to \{A'(t)u + \partial_t u,\ B'(t)u,\ u(x,0)\}$$

'n kontinue een-een-duidige lineêre afbeelding van $H^{2,1}(Q)$ op die produkruimte

$$L^2(Q) \times H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma) \times H^1(\Omega) \quad \text{is.}$$

Dan volg deur toepassing van die oop afbeeldingstelling (kyk [1] volume 1, hoofstuk 2, paragraaf 2, stellings 1 en 2) dat die inverse afbeelding ook kontinu is. Daar bestaan dus 'n konstante $C > 0$ só dat

$$\|u\|_{2,1,Q} \leqslant C(\|(A'(t)+\partial_t)u\|_{0,Q} + \|B'(t)u\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\Sigma} + \|u(x,0)\|_{1,\Omega}) \qquad (3.1)$$

vir alle $u \in H^{2,1}(Q)$.

Ons gaan van (3.1) gebruik maak om die stabiliteit van die oplossings te bewys. Ons benodig eers die volgende resultaat:

3.3 Lemma

As (3.1) geld vir die operatore $A'(t)$ en $B'(t)$, dan bestaan daar 'n $\delta > 0$ sô dat 'n soortgelyke ongelykheid geld vir alle operatore $A(t)$ en $B(t)$ met $|a-a'|_{0,0} < \delta$ en $|b-b'|_{1,1} < \delta$. Dieselfde waarde vir die konstante C kan vir al hierdie operatore gekies word.

Bewys: Die bewys verloop presies soos dié van stelling 4.4 in hoofstuk 1.

Ons skryf

$$\begin{aligned}(A'(t)+\partial_t)u &= [(A'(t)+\partial_t) - (A(t)+\partial_t)]u + (A(t)+\partial_t)u \\ &= (A'(t)-A(t))u + (A(t)+\partial_t)u.\end{aligned}$$

Uit vergelyking (2.7) volg dan dat

$$\begin{aligned}&\|(A'(t)+\partial_t)u\|_{0,Q} \\ \leqslant\ & K_1|a'-a|_{0,0}\|u\|_{2,0,Q} + \|(A(t)+\partial_t)u\|_{0,Q} \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Ook skryf ons

$$B'(t)u = B'(t)u - B(t)u + B(t)u$$

en dan volg uit vergelyking (2.8) dat

$$\| B'(t)u \|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\Sigma} \leqslant K_2 |b' - b|_{1,1} \| u \|_{2,1,Q} + \| B(t)u \|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\Sigma} \tag{3.3}$$

Nou volg die resultaat op dieselfde manier as in stelling 4.4 van hoofstuk 1 uit vergelykings (3.1), (3.2) en (3.3). □

Ons is nou gereed om stelling 3.2(b) te bewys.

Laat u en u' die oplossings van vergelykings (1.1) en (1.2) respektiewelik wees. Dan volg uit lemma 3.3 dat

$$\| u - u' \|_{2,1,Q}$$

$$\leqslant C(\| (A(t) + \partial_t)(u - u') \|_{0,Q} + \| B(t)(u - u') \|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\Sigma}$$

$$+ \| u(x,0) - u'(x,0) \|_{1,\Omega}) \tag{3.4}$$

Nou skryf ons

$$(A(t) + \partial_t)(u - u')$$

$$= (A(t) + \partial_t)u - (A'(t) + \partial_t)u' + (A'(t) + \partial_t)u' - (A(t) + \partial_t)u'$$

$$= (f - f') + (A'(t) - A(t))u'$$

en

$$B(t)(u - u')$$

$$= B(t)u - B'(t)u' + B'(t)u' - B(t)u'$$

$$= (g - g') + (B'(t) - B(t))u'.$$

Dan volg uit vergelykings (2.7), (2.8) en (3.4) dat

$$\| u - u' \|_{2,1,Q}$$

$$\leqslant C(\| f - f' \|_{0,Q} + |a' - a|_{0,0} \| u' \|_{2,0,Q}$$

$$+ \| g - g' \|_{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\Sigma} + |b' - b|_{1,1} \| u' \|_{2,1,Q} + \| u_0 - u_0' \|_{1,\Omega}).$$

Hiermee is die resultaat bewys. □

HOOFSTUK 6 ENKELE VOORBEELDE EN OPMERKINGS

1. VOORBEELDE

Laat $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{(x',x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ en

$\Gamma = \{(x',0) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$.

Ons beskou die operator A gedefinieer deur

$$Au = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j(a_{jk}(x)\partial_k u) + a_0(x)u \tag{1.1}$$

en die randoperator B gedefinieer deur

$$Bu = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j u + b_0(x)u \tag{1.2}$$

Ons aanvaar dat alle aannames van hoofstuk 1 ook hier geldig is. In hierdie geval word die polinoom $A_0(x,\xi)$ gedefinieer deur

$$A_0(x,\xi) = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

Uit [4] hoofstuk 2 opmerking 1.2 volg dit dat indien A ellipties is, dit voldoende is vir A om eg ellipties te wees, indien die voorwaardes vir die wortels van die tweedegraadse polinoom $A_0(x,\xi + \tau\xi')$ geldig is vir slegs een punt van Γ en vir een tweetal lineêr onafhanklike vektore ξ en ξ'. Ons neem dus die twee vektore $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},0)$ en $(0,0,\ldots,0,1)$. In hierdie geval kry ons die tweedegraadse polinoom

$$A_0(x,\xi,\tau) = -a_{nn}\tau^2 - \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{jn}\xi_j + \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}\xi_k\right)\tau - \sum_{j,k=1}^{n-1} a_{jk}\xi_j\xi_k \; .$$

Die operator A is eg ellipties indien die polinoom $A_0(x,\xi,\tau)$ presies een wortel met positiewe imaginêre deel en presies een wortel met negatiewe imaginêre deel het. As $n > 2$ is elke elliptiese operator ook eg ellipties volgens [4] hoofstuk 2, proposisie 1.2. As $n = 2$ moet vir ellipties en eg ellipties getoets word.

1.1 Voorbeeld

Laat $Au = -\partial_1^2 u - \partial_2^2 u$. As $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ dan is

$$A_0(\xi) = -\xi_1^2 - \xi_2^2 = -|\xi|^2.$$

Dit is duidelik dat A ellipties is.

Beskou nou $\xi = (\xi_1, 0)$. Dan is

$$A_0(x,\xi,\tau) = -\xi_1^2 - \tau^2$$

en as $A_0(x,\xi,\tau) = 0$ volg dat $\tau = \pm i|\xi_1|$.

A is dus ook eg ellipties. □

1.2 Opmerking

Enige elliptiese operator met reële koëffisiënte is eg ellipties.

Ons beskou vervolgens die versoenbaarheidsvoorwaarde. 'n Raaklynige vektor aan Γ is altyd van die vorm $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$ en 'n normaalvektor op Γ is altyd van die vorm $(0, 0, \ldots, 0, \xi_n)$. Ons neem eenvoudigheidshalwe die vektor $(0, 0, \ldots, 1)$.

Beskou die polinoom $B(x,\xi,\tau)$ gedefinieer deur

$$B(x,\xi,\tau) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j \xi_j + b_n \tau .$$

Die versoenbaarheidsvoorwaarde beteken in hierdie geval dat indien τ_0 dié wortel van $A_0(x,\xi,\tau)$ met positiewe imaginêre deel is, dan is

$$B(x,\xi,\tau_0) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j \xi_j + b_n \tau_0 \neq 0.$$

1.3 Opmerking

Enige eerste orde randoperator met reële koëffisiënte wat normaal is op Γ is versoenbaar met A op Γ.

Ons beskou vervolgens die voorwaardes 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1.

1.4 Voorbeeld

Laat $\Omega = \mathbb{R}^+$ en $Au = -\partial_x^2 u$. (Hierdie operator kom voor in die eendimensionale hittevergelyking $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$.
Vir $\theta \in [\alpha,\beta]$ beskou ons die operator Λ_θ gedefinieer deur

$$\Lambda_\theta u = -\partial_x^2 u - e^{i\theta}\partial_y^2 u.$$

Om die elliptisiteit van Λ_θ te toets beskou ons die polinoom

$$\Lambda_\theta(\xi,\eta) = -\xi^2 - e^{i\theta}\eta^2 \quad , \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}$$

Dit is duidelik dat $\Lambda_\theta(\xi,\eta) \neq 0$ as $(\xi,\eta) \neq (0,0)$ vir enige θ.

Om te toets of Λ_θ eg ellipties is beskou ons die polinoom $\Lambda_\theta(\tau,\eta) = -\tau^2 - e^{i\theta}\eta^2$.

As $\theta = 0$ en $\Lambda_\theta(\tau,\eta) = 0$ dan is $\tau = \pm i|\eta|$.

As $\theta \neq 0$ en $\Lambda_\theta(\tau,\eta) = 0$ dan is

$$\begin{aligned}\tau^2 &= e^{i\theta}\eta^2 \\ &= e^{i(\pi+2k\pi)}e^{i\theta}\eta^2\end{aligned}$$

en dan is

$$\tau = e^{(i\frac{\pi+\theta}{2})}|\eta|, \quad e^{i(\frac{\pi+\theta}{2}+\pi)}\cdot|\eta| .$$

Aangesien $\theta \neq \pi$ volg dat die twee wortels aan die nodige voorwaardes voldoen. □

Vir die algemene operatore A en B in (1.1) en (1.2) word die operator Λ_θ gegee deur

$$\Lambda_\theta u = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j(a_{jk}\partial_k u) + a_0 u - e^{i\theta}\partial_y^2 u .$$

Ons neem aan dat $n > 1$. Omdat Λ_θ 'n operator in $\mathbb{R}^{n+1}$ is met $n+1 > 2$ is dit slegs nodig om Λ_θ vir elliptisiteit te toets. Vir $\xi \in \mathbb{R}^n$ en $\eta \in \mathbb{R}$ beskou ons die polinoom

$$\Lambda_\theta(\xi,\eta) = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\xi_k - e^{i\theta}\eta^2 \qquad (1.4)$$

1.5 <u>Definisie</u>

Die operator A heet gelykmatig sterk ellipties indien daar 'n konstante $c > 0$ bestaan só dat $\mathrm{Re}(-A_0(\xi)) \geq c|\xi|^2$ vir alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

1.6 <u>Bewering</u>

As A gelykmatig sterk ellipties is dan is Λ_θ ellipties vir enige $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

<u>Bewys</u> Ons moet aantoon dat $\Lambda_\theta(\xi,\eta) \neq 0$ as $(\xi,\eta) \neq (0,0)$. Die gevalle $(\xi,0)$ met $\xi \neq 0$ en $(0,\eta)$ met $\eta \neq 0$ is triviaal. Beskou ons die uitdrukking

$$\mathrm{Re}\,\Lambda_\theta(\xi,\eta) = \mathrm{Re}(-\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\xi_j\xi_k) - \cos\theta\eta^2 \qquad (1.5)$$

volg uit definisie 1.5 en vergelyking (1.3) dat beide terme regs streng negatief is vir $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$. □

As A gelykmatig sterk ellipties is met reële koëffisiënte dan is Λ_θ ellipties vir enige $\theta \in [-\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \theta_0]$ want omdat die a_{jk}'s reëel is en die tweede term in (1.4) kompleks is vir $\theta = 0$ is $\Lambda_\theta(\xi,\eta) \neq 0$ vir $\theta \neq 0$. Vir die geval $\theta = 0$ gebruik ons weer definisie 1.5 en vergelykings (1.3) en (1.5).

Wat die versoenbaarheidsvoorwaarde betref, volg weer soos tevore dat enige eerste orde randoperator met reële koëffisiënte wat normaal is op Γ versoenbaar is met Λ_θ op $\Gamma \times \mathbb{R}_y$.

2. 'N BESPREKING VAN DIE AANNAMES

Ons aanvaar in hoofstukke 2 en 3 dat aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 geld vir die interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Uit hierdie aannames volg dat die hoekgebied $S_0 = \{\lambda : \lambda \neq 0, -\frac{\pi}{2} < \arg \lambda < \frac{\pi}{2}\}$ bevat is in $\rho(-A(t))$ en dat

$$\| R(\lambda; -A(t)) \|_0 \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{vir alle} \quad \lambda \in S_0 \tag{2.1}$$

Deur die proses van holomorfe voorsetting, soos in hoofstuk 2 paragraaf 2 beskryf, kan dan bewys word dat 'n hoekgebied $S_\phi = \{\lambda : \lambda \neq 0, -\frac{\pi}{2} - \phi < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \phi\}$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ bestaan wat ook bevat is in $\rho(-A(t))$ en dat ongelykheid (2.1) geld vir alle $\lambda \in S_\phi$. Hierdie laaste feit is noodsaaklik vir die konstruksie van die semigroepe en evolusie-operatore van hoofstukke 2 en 3.

In hoofstuk 4 lei die feit dat die randoperatore ook tydafhanklik is tot 'n nuwe konstruksie van die evolusie-operatore. Vir hierdie konstruksie benodig ons die operator $\frac{\partial}{\partial t}(A(t) + \lambda)^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} R(\lambda ; -A(t))$ waarvan die definisie en konstruksie in hoofstuk 4 paragraaf 1 beskryf word. Ons benodig verder die ongelykheid (1.9) van hoofstuk 4 wat uit vergelyking (1.6) afgelei word. Vergelyking (1.6) word op sy beurt afgelei uit aannames 4.1 en 4.2 van hoofstuk 1 vir $[\alpha, \beta] = [-\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \theta_0]$. Die rede vir hierdie sterker aanname is dat daar vir die operator $\frac{\partial}{\partial t} R(\lambda; -A(t))$ skynbaar geen proses van analitiese voortsetting bestaan waardeur dit vanaf 'n hoekgebied S_0 na 'n hoekgebied S_{θ_0} uitgebrei kan word nie.

In hoofstuk 5 waar die algemene nie-homogene probleem met alle koëffisiënte tydafhanklik behandel word, word egter weer aanvaar dat aannames 4.1 en 4.2 slegs geld vir $[\alpha,\beta] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die resultate in hierdie hoofstuk is egter nie heeltemal vergelykbaar met dié van die ander hoofstukke nie, aangesien die konstruksie van die oplossings in hoofstuk 5 vereis dat die begintoestand u_0 aan $H^1(\Omega)$ moet behoort. Dit is natuurlik 'n sterker aanname as $u_0 \in L^2(\Omega)$ wat in die ander hoofstukke vereis word. In stelling 3.2, hoofstuk 5 vereis ons dat $|a - a'|_{0,0} \to 0$ aangesien daar gebruik gemaak word van die ongelykheid

$$\|A(t)u\|_{0,0,Q} \leq C|a|_{0,0}\|u\|_{2,0,Q} .$$

In stelling 2.1 van hoofstuk 4 word vereis dat $|a - a'|_{0,1} \to 0$ omdat daar in die konstruksie van die fundamentele oplossing gebruik gemaak word van die afskattings vir die operator $\frac{\partial}{\partial t} R(\lambda\, ; -A(t))$ wat eerste orde tydafgeleides van die koëffisiënte van $A(t)$ bevat.

3. TOEKOMSTIGE NAVORSING

Ons het in hoofstuk 2 die stabiliteit van klassieke oplossings beskou. In hoofstukke 3 en 4, waar die koëffisiënte ook tydafhanklik mag wees, het ons slegs swak oplossings beskou. Die stabiliteit van klassieke oplossings van die probleme in hoofstukke 3 en 4 is 'n stuk navorsing wat nog uitgevoer moet word. Ons voorsien aansienlike tegniese probleme in hierdie verband. Om dit te kan sien beskou ons eers die wyse waarop die regulariteit van oplossings in hoofstuk 2 bepaal is. (Kyk hoofstuk 2 paragraaf 3). Die funksie U gedefinieer deur $U(t) = e^{-tA}u_0$ behoort aan $C^{\infty}((0,T); L^2(\Omega))$ en die tydafgeleides word maklik gevind deur die integraal vir die semigroep te differensieer. Uit die feit dat $U(t) \in D(A^k)$ vir enige $k=1,2,...$ volg dan dat die funksie $u(\cdot,\cdot)$ gedefinieer deur $u(\cdot,t) = U(t)$ byna oral op $(0,T)$ oneindig veel ruimte-afgeleides besit. In die stabiliteitsbewyse vir klassieke oplossings word 'n belangrike rol gespeel deur die stabiliteit van tydafgeleides van enige orde (kyk stelling 3.1 van hoofstuk 2) en daarna deur die a-priori afskattings vir elliptiese vergelykings. In die geval van vergelykings met tydafhanklike koëffisiënte is die vorm van die fundamentele oplossings baie ingewikkeld en die uitdrukkings vir tydafgeleides van enige orde van die fundamentele oplossings word dan uiters ingewikkeld. (Kyk [9] paragraaf 5.7). Daarna moet nog na die regulariteit ten opsigte van die ruimteveranderlikes gekyk word.

LITERATUUR

1. DUNFORD, N en SCHWARTZ, J T. "Linear operators", Part I. Interscience Publishers, New York, 1963.

2. FRIEDMAN, A. "Partial differential equations" Holt, Rinehart and Winston 1969.

3. KOK, B en PENNING, F D. "Continuous dependence of the solution of elliptic boundary value problems on the coefficients, right hand sides and boundary conditions." Quaestiones Mathematicae 4(1981), 167 - 183.

4. LIONS, J L en MAGENES, E. "Non-homogeneous boundary value problems and applications." Volume I and II. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.

5. PENNING, F D. "Stability of semigroups and evolution operators generated by elliptic partial differential operators." Tydskrif vir Natuurwetenskappe 15, 79 - 90, 1975.

6. SAUER, N. "Properties of bilinear forms on Hilbert spaces related to stability properties of certain partial differential operators". J Math Anal Appl 20, 1967, 124 - 144.

7. SCHECHTER M. "Modern methods in partial differential equations". McGraw-Hill, 1977.

8. SHOWALTER, R E. "Hilbert space methods for partial differential equations". Pitman Publishing Limited, 1977.

9. TANABE H. "Equations of evolution". Pitman Publishing Limited. 1979

10. YOSIDA, K. "Functional analysis". Springer-verlag, 1965

SAMEVATTING

STEURINGSTEORIE VIR EVOLUSIEVERGELYKINGS

Naam: Willem George Greybe

Promotor: Prof F D Penning

Departement: Wiskunde

Graad: DSc

Beskou 'n vaste $T > 0$ en skryf $Q = \Omega \times (0,T)$ en $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, waar Ω 'n begrensde oop versameling in $\mathbb{R}^n$ is met rand Γ, 'n oneindig keer differensieerbare $(n-1)$-dimensionale variëteit en met Ω lokaal aan een kant van Γ.

Vir elke $t \in [0,T]$ definieer ons die tweede orde differensiaal-operator $A(t)$ deur

$$A(t)u = \sum_{|p|\leqslant 2} a_p(x,t)\partial^p u \text{ , met die}$$

koëffisiëntfunksies $a_p \in C^\infty(\bar{Q})$, en die eerste orde randoperator $B(t)$ deur

$$B(t)u = \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\partial_j u + b_0(x,t)u, \text{ met die}$$

koëffisiëntfunksies $b_j \in C^\infty(\bar{\Sigma})$.

Ons neem aan dat $A(t)$ en $B(t)$ aan die bekende versoenbaarheidsvoorwaardes in die teorie van elliptiese vergelykings voldoen.

In hierdie proefskrif beskou ons die stabiliteitseienskappe van die probleem

$$\begin{aligned} A(t)u(x,t) + \partial_t u(x,t) &= f(x,t) \quad \text{in } Q \\ B(t)u(x,t) &= g(x,t) \quad \text{op } \Sigma \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

ten opsigte van klein veranderings in die koëffisiënte en die regterkante.

Die steuringsprobleem kom daarop neer om voorwaardes te vind waaronder die oplossing van 'n veranderlike probleem soos hierbo na dié van 'n vaste probleem sal konvergeer indien die koëffisiënte en regterkante van die veranderlike probleem na dié van die vaste konvergeer. Die funksieruimtes waarin hierdie konvergensies plaasvind word in hoofstuk 1 paragraaf 2 bespreek. Alle begrippe in verband met elliptiese en paraboliese vergelykings wat gebruik word, word in paragrawe 3 en 4 van hoofstuk 1 beskryf.

In hoofstukke 2, 3 en 4 gebruik ons die metodes van semigroepe en evolusie-operatore om die stabiliteit van die probleem vir die geval waar f en $g = 0$ te bestudeer. In hoofstuk 2 beskou ons die geval waar die operatore A en B slegs ruimte-afhanklik is, in hoofstuk 3 is die operator A ook tydafhanklik en in hoofstuk 4 is die operatore A en B beide ruimte- en tydafhanklik.

In hoofstuk 5 gebruik ons die teorie van paraboliese evolusie-operatore om die stabiliteit van die algemene nie-homogene paraboliese probleem te bestudeer.

SUMMARY

PERTURBATION THEORY FOR EVOLUTION EQUATIONS

Name: Willem George Greybe

Promotor: Prof F D Penning

Department: Mathematics

Degree: DSc

Let Ω be an open set in $\mathbb{R}^n$; we assume Ω to be bounded and to have an $(n-1)$ dimensional, infinitely differentiable boundary Γ such that Ω is locally on one side of Γ.

For each $t \in [0,T]$ we define the second order differential operator $A(t)$ by

$$A(t) = \sum_{|p|\leq 2} a_p(x,t)\partial^p u \quad \text{with} \quad a_p \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

and $Q = \Omega \times (0,T)$.

We also define the first order boundary operator $B(t)$ by

$$B(t)u = \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\partial_j u + b_0(x,t)u \quad \text{with}$$

$b_j \in C^\infty(\bar{\Sigma})$ and $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

We assume A and B to satisfy the well known compatibility relations of the theory of elliptic equations.

In this thesis we consider the stability of the problem

$$A(t)u(x,t) + \partial_t u(x,t) = f(x,t) \quad \text{in} \quad Q$$

$$B(t)u(x,t) = q(x,t) \quad \text{on} \quad \Sigma$$

$$u(x,0) = u_0(x).$$

under small changes in the coefficients and right hand sides.

We obtain conditions under which the solution of a perturbed problem converges to the solution of a fixed problem as mentioned above, when the coefficients and right hand sides of the perturbed problem converges to that of the fixed problem. The function spaces in which the convergence takes place is defined in paragraph 2 of chapter 1.

In chapters 2, 3 and 4 we use the method of semigroups and evolution operators to study the stability of the problem in which f and $g = 0$. The case where A and B are dependant only on space variables are studied in chapter 2. In chapter 3 the operator A is also time dependant and in chapter 4 the operators A and B are both space and time dependant.

The study of the non-homogeneous case is done in chapter 5 by the method of parabolic evolution operators.