DINAMIESE RANDWAARDEPROBLEME
EN
EVOLUSIE-ONGELYKHEDE

deur

JAN DIEDELEFF GERTENBACH

voorgelê ter vervulling van 'n deel
van die vereistes vir die graad

D.Sc.

IN DIE FAKULTEIT WIS- EN NATUURKUNDE

VAN DIE

UNIVERSITEIT VAN PRETORIA

PRETORIA

Mei 1981

Ter nagedagtenis aan my vader.

VOORWOORD

Aan my ouers, familie en vriende is ek groot dank verskuldig vir hulle hulp, belangstelling en geduld met my oor die jare. Aan my moeder 'n spesiale woord van dank, vir die baie wat sy vir my gedoen het en nog doen.

Prof. Grässer wil ek bedank vir die verwysings [20], [24], [41] en [48] in verband met variasierekening wat ek deur hom gekry het en Dr. Geveci vir die artikel [14] wat hy my geleen het.

Aan Prof. N. Sauer is ek groot dank verskuldig vir die hulp en leiding wat hy gegee het. Dankie ook dat u my oor die jare help ontwikkel het.

'n Woord van dank gaan aan die Universiteit van Pretoria vir 'n beurs vir 1978 (AVBOB-fondse) en die WNNR vir 'n beurs vir 1979.

Baie dankie, mev. Schickerling vir die mooi tikwerk en vriendelikheid.

Aan Hom, die lewende steen wat deur die mense afgekeur is, maar deur God vir die ereplek uitverkies is (1 Petrus 2:4), kom die hoogste dank toe.

DINAMIESE RANDWAARDEPROBLEME EN EVOLUSIE-ONGELYKHEDE

deur

Jan Diedeleff Gertenbach

Promotor: Prof. N. Sauer

Departement: Toegepaste Wiskunde

Graad: D.Sc.

SAMEVATTING

Hoofstuk een en twee skets 'n breë agtergrond vir randwaarde- en variasierekeningprobleme, met verwysing na die ontstaan van sekere Wiskundige modelle. Dit verwys na werk in verdere hoofstukke en bevat uittreksels uit die Literatuur.

Daar word soms afgewyk van die Literatuur en sekere beginsels word uitgebou. Sŏ 'n uitbreiding word op bladsye 3, 4 en 11 gevind. Sodoende word die verband tussen randwaarde- en variasierekeningprobleme, met verwysing na elliptiese operatore duidelik. Relasies op die rand in terme van ongelykhede, word in § 2.5.1. verklaar deur die benadering in [43], waar die rand as 'n medium, met sy eie behoudwette, beskou word. In paragraaf 2.11.3, word die resultaat van die Stelling op bladsy 38 beperk tot een dimensie. 'n Eendimensionale Wiskundige model vir lineêre elastisiteit met wrywing, in terme van 'n bekende variasie-ongelykheid (einde § 2.11.3), word sodoende verkry.

Die doel van hoofstuk twee is die bekendstelling van die variasie-ongelykheidprobleem en die bespreking van 'n paar standaard voorbeelde.

Bestaanstellings vir variasie-ongelykhede, in die konteks van monotone operatore in Banachruimtes, word in hoofstuk drie bewys. 'n Nuwe begrip, uiteindelik-positief, word ingevoer en 'n benadering van Browder [10], gebaseer op 'n Lemma van Minty [38], word gevolg en uitgebrei. Die uiteindelike resultaat (Stelling 3.1.10) is vergelykbaar met die bekende resultaat (Stelling 2.10.3) van Browder, maar die onderskeie bewyse verskil totaal.

In hoofstuk een, § 1.3.11.b, word die volgende swak formulering van probleme gesuggereer. In plaas van die inwendige produk van vergelyking 1.2 met funksies $\phi \in C_0^\infty(G)$ te neem, word inwendige produkte met $L\phi$ geneem, waar L 'n tweede orde elliptiese operator is. Dit word nodig om twee Hilbertruimtes V_0 en V_1 (§ 3.2) te ontwikkel. 'n Aantal belangrike eienskappe word afgelei. Lemma 3.2.4 en opmerkings 3.2.5.a, b toon duidelik waarom hierdie ruimtes, in plaas van die ruimte $H^2(G)$ gebruik word.

Twee voorbeelde word in § 3.3 gegee en die hoofstuk sluit af met twee regulariteitstellings. In die eerste stelling word die konvergensie van die differensiaalkwosiënt $\delta_h u$ (3.4.2.c) beskou en in die tweede word 'n ry $\{u_\varepsilon\} \subset V_1$ gekonstrueer, wat die oplossing in V_0 benader.

In hoofstuk vier word vrye-rand-tipe probleme in 'n abstrakte raamwerk geplaas. Sekere variasie-ongelykhede word in 'n abstrakte sin geïnterpreteer, sien byvoorbeeld Stelling 4.7.2. Hierdie stelling word gebruik in die bewys van Stelling 4.7.5, waarin die voorbeelde van § 3.3.2 interpreteer word. Stelling 4.7.2 is ook van toepassing op probleme in die ruimtes V_0 en V_1, sien § 4.7.7 en die resultate op bl. 123.

In hoofstuk vyf word evolusie-ongelykhede op twee maniere benader. In die eerste word die bestaan van tydafgeleides in 'n swak sin verseker. In die tweede word baie sterker resultate verkry. Die bestaan van die tydafgeleides in 5.6.1 a en b word in 'n sterk sin verseker, deurdat hierdie voorbeelde ooreenstem met 5.7.14.a en b, waarin die tweede benadering gevolg is.

'n Regulariteitstelling vir 5.6.1.c word gegee. 'n Ry $\{u_\varepsilon\} \subset V_1$ benader die oplossing.

Stelling 5.9 heg 'n interpretasie aan die betrokke evolusie-ongelykhede, via Stelling 4.7.2. Daar word gesien dat dinamiese voorwaardes op die rand opgelê moet word.

DYNAMIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND EVOLUTION INEQUALITIES

by

Jan Diedeleff Gertenbach

Promotor : Prof. N. Sauer

Department: Applied Mathematics

Degree : D.Sc.

SUMMARY

In the first two chapters, a thorough background for boundary value and variational problems, refering to the origin of certain mathematical models, can be found. Excerpts from the literature are included. There are some references to work done in subsequent chapters.

The approach differs from the usual in some cases, in order to extend some principles. Such an extension can be found on pages 3, 4 and 11. Thus the connection between boundary value and variational problems for elliptic operators becomes clear. In paragraph 2.5.1 relations on the boundary in the form of inequalities are explained by the approach in [43], where the boundary is considered a medium, with its own conservation laws. In § 2.11.3 the result of the theorem on page 38, is restricted to a one-dimensional problem, giving a one-dimensional mathematical model for linear elasticity with friction, in terms of a well known variational inequality (at the end of § 2.11.3).

The aim of chapter two is to introduce the concept of variational in-

equalities and to discuss some standard examples.

In chapter 3 the concept of monotone operators in Banach spaces, is used to obtain existence theorems for variational inequalities. A new concept, ultimately positive operator, is introduced. An approach of Browder [10], based on a lemma of Minty [38], is followed and extended. The final result, Theorem 3.1.10, is comparable to the known result (Theorem 2.10.3) of Browder, but the proofs differ totally.

The weak formulation of problems, suggested in chapter 1 (§ 1.3.11.b), is used here. Inner products of equation 1.2 with functions $L\phi$, $\phi \in C_0^\infty(G)$ and L a second order elliptic operator are used, whereas the usual weak formulation is obtained by using inner products with functions $\phi \in C_0^\infty(G)$. It becomes necessary to introduce two Hilbert spaces V_0 and V_1 (§ 3.2) and some important properties are derived. Lemma 3.2.4 and § 3.2.5.a, b, show why these spaces, instead of the usual $H^2(G)$, are used.

In § 3.3 two examples are given and two regularity theorems (§ 3.4) conclude the chapter. In the first theorem the convergence of the differential quotient, $\delta_h u$ (§ 3.4.2.c) is studied and in the second, a sequence $\{u_\varepsilon\} \subset V_1$ is constructed, to approximate the solution in the space V_0.

In chapter four free boundary problems are studied in an abstract sense. Certain variational inequalities are interpreted in an abstract sense, see for example Theorem 4.7.2. This theorem is needed in the proof of Theorem 4.7.5, which interprets the examples in § 3.3.2. Theorem 4.7.2 is also applicable to problems in the spaces V_0 and V_1 (the examples in 4.7.7 and the results on page 123).

In chapter five, two approaches in connection with evolution inequalities are followed. In the first, the existence of time derivitives, is assured in a weak sense. In the second, a much stronger result is obtained, so much so that the existence of time derivitives in 5.6.1 in a strong sense, can be proved by using the second approach (5.7.14). A regularity theorem for 5.6.1.c is given. The solution is approximated by a sequence $\{u_\varepsilon\} \subset V_1$. Theorem 4.7.2 is used in Theorem 5.9 in order to interpret the evolution inequalities concerned. It is shown that dynamic conditions on the boundary are needed.

NOTASIE

Die ruimtes $C^k(G)$, $C^k(\bar{G})$ vir $0 \leqslant k \leqslant \infty$, $H_o^m(G)$, $H^m(G)$ het hulle gewone betekenisse. G is 'n oop versameling in R^n met rand S. Die afsluiting van 'n versameling A word deur $\bar{A}$ en sy inwendige met A^o aangedui.

In § 4.1.3 word met $A - B$ bedoel die komplement van B in A soos in [18], maar meestal word bedoel $A \pm B = \{a \pm b : a \in A \text{ en } b \in B\}$.

Die begrip "paring" tussen twee ruimtes staan sentraal en word dikwels met $\langle \cdot , \cdot \rangle$ aangedui. Distribusies [47] word altyd so aangedui.

Indien X 'n Banachruimte is, met duaal X^* dan word die gebruiklike paring aangedui met (w,x), waar $w \in X^*$ en $x \in X$. In definisie 4.4.7, word dit egter (in ooreenstemming met die benadering in dié hoofstuk) met $\langle f,v \rangle$ aangedui.

Die paring van $L^2(G)$ met homself word met $(\cdot,\cdot)$ en die paring tussen $L^2(S)$ met homself word met $[\cdot,\cdot]$ aangedui.

Die sin: $\langle V, ((\cdot,\cdot)) \rangle$ is 'n Hilbertruimte, beteken dat $((\cdot,\cdot))$ 'n inwendige produk in V is, wat aanleiding gee tot 'n volledige metriek, via die norm $\|\cdot\|$, waar $\|v\| = ((v,v))^{\frac{1}{2}}$. Só dui

$((\cdot,\cdot))_m$ die inwendige produk in $H^m(G)$ aan en $\|\cdot\|_m$ die gebruiklike norm.

$\|\cdot\|_\alpha^S$ dui die norm in $H^\alpha(S)$ aan.

Sommasiekonvensie word deurgaans gebruik.

Byvoorbeeld

$$a_\alpha D^\alpha = \Sigma_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha .$$

Hierbo is $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 'n multi-indeks met lengte

$$|\alpha| = \Sigma_1^n \alpha_i .$$

Afgeleides word hoofsaaklik met D_k of D^α aangedui; soms met ∂_k.

Die Laplace-operator Δ, die gradiënt ∇ en divergensie div is die gebruiklike. So ook die Kronecker delta δ_{ij}.

Generiese konstantes c, M ... kom soms voor.

In hoofstuk een dui $\bar{a}$ die komplekse toegevoegde van $a \in C$ aan.

Die begrip antilineêr is soos in [22, Th. 14.1, p 41] maar kom selde voor. Meestal word met reële ruimtes gewerk.

Die simbool 2^H verwys na die klas van alle deelversamelings van H.

Paragrawe word deur i·j·k aangedui waar i die hoofstuknommer is. Vergelykings word met (i·j) aangedui, met i die hoofstuknommer.

INHOUDSOPGAWE

HOOFSTUK 3

BESTAANSTELLINGS EN REGULARITEITSRESULTATE VIR VARIASIE-ONGELYKHEDE

HOOFSTUK 4

VARIASIE-ONGELYKHEDE IN GEORDENDE HILBERTRUIMTES

HOOFSTUK 5

EVOLUSIE-ONGELYKHEDE MET DINAMIESE VOORWAARDES OP DIE RAND

HOOFSTUK 1

RANDWAARDEPROBLEME EN DIE VARIASIEREKENING

Die doel van hierdie hoofstuk is om die agtergrond van verdere werk te skets. 'n Volledige bespreking kan in [35, Hfs 2], [16], [42] gevind word.

1.1. Dirichlet se beginsel [42, p 305 ff] en [16, p 1-38]. Sedert Gauss die grondstelling van die algebra bewys het, het Wiskundiges in toenemende mate die belang van bestaanstellings ingesien. Die bestaan van oplossings vir ekstreme probleme in die Variasierekening, het sedert die begin van die vorige eeu baie aandag geniet. Riemann se geometriese funksie teorie, soos in sy doktorale proefskrif (1851) uiteengesit, asook sy werk in verband met Abelse funksies (1857), toon watter moontlikhede hierdie benadering inhou.

Veronderstel S is 'n oppervlak met of sonder rande, wat met 'n geleidende materiaal oordek is. 'n Stasionêre elektriese stroom word daarop aangebring. Die potensiaal van só 'n stroom, is die oplossing van 'n sekere randwaardeprobleem. Hierdie randwaardeprobleem is gekoppel aan die volgende variasieprobleem:

Vind die vloed wat die minimum hittevrystelling verteenwoordig.

Indien hierdie variasieprobleem oplosbaar is, volg die bestaanstellings van die Riemann funksieteorie.

Laat $$D(v) = \iint_G (v_x^2 + v_y^2)\, dxdy. \qquad (1.1)$$

Die volgende <u>minimeringsprobleem</u> moet opgelos word:

Vind uit 'n sekere klas K van funksies, 'n u sodanig dat

$$D(u) = \min\{D(v):\ v \in K\}.$$

C.F. Gauss en W. Thompson het opgemerk dat die randwaarde-probleem vir die harmoniese differensiaalvergelyking,

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \text{ in } G \subset R^2,$$

gereduseer kan word tot die probleem $D(v) = \min.$, met v 'n funksie wat die randwaardes bevredig. Riemann het dit <u>Dirichlet se beginsel</u> genoem en met groot sukses gebruik. Weierstrass het egter in 1869 daarop gewys, dat daar nie noodwendig 'n toelaatbare funksie u bestaan, wat D minimeer nie. Eers in 1900 is hierdie probleem deur Hilbert opgelos.

<u>Plateau se probleem</u> is 'n ander bekende minimeringsprobleem. Die kleinste oppervlak, wat 'n gegewe kromme onderspan, moet gevind word.

1.2. <u>Beginsels van die Variasierekening</u>. [42, Hfs I, II, X], [20], [24], [41], [48].

Die fundamentele probleem in die Variasierekening is:

Vind 'n toelaatbare funksie $v(x)$, $x \in R$ met

$$v(X) = A \quad \text{en} \quad v(Y) = B$$

wat die integraal

$$I = \int_X^Y F(x,v(x),v'(x))\,dx$$

minimeer. (Die notasie is effens gewysig ten opsigte van dié in [42]).

'n Nodige voorwaarde vir die bestaan van 'n kromme $v(x)$ wat I minimeer, is dat dit Euler se vergelyking, van 1744, moet bevredig:

$$d\, F_3\,(x,v(x),v'(x))/dx = F_2\,(x,v(x),v'(x)),$$

waar $\quad F_3\,(x,y,z) = \partial F(x,y,z)/\partial z$

en $\quad F_2\,(x,y,z) = \partial F(x,y,z)/\partial y.$

Variasierekeningprobleem in R^n [25, p 271], [24].

Laat $G \subset R^n$ 'n gegewe oop versameling wees en $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ 'n multi-indeks. Laat A 'n ordening van al die multi-indekse α met lengte $|\alpha| = \Sigma\alpha_i \leqslant m$ wees. 'n Funksie $F : R^{m+1} \to R$ word gegee. Wat nou volg, stuur af op vergelyking (1.2). [25] of [24] is nie noodwendig van toepassing nie. Die probleem wat opgelos moet word is:

Vind 'n toelaatbare funksie $y = y(x)$ sodanig dat

$$I = \int_G F(\{y_\alpha\}_{\alpha \in A},\ t)\,dx = \min.,$$

met $\quad y_\alpha = D^\alpha y(x) \quad \text{en} \quad t = y(x).$

Stel $I(s) = \int_G F(\{(y+sw)_\alpha\}_{\alpha \in A}, \; y+sw)dx.$

Indien $w \in C_0^\infty(G)$ en $F_\alpha = \partial F/\partial y_\alpha$ kontinu is vir $\alpha \in A$, dan is

$$I'(0) = \int_G w((-1)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha F_\alpha + F_t)\, dx = 0$$

'n nodige voorwaarde vir die bestaan van 'n funksie y wat I minimeer. Hierbo is $F_t = \partial F/\partial t$ en die argumente van F_α en F_t is

$$(\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}, \; y).$$

<u>Voorbeeld</u> (Sommasiekonvensie word gebruik).

Laat $F(\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}, \; t) = a_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, y_\beta - 2\, f\, t,$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \quad \text{en} \quad f = f(x).$$

Dan is $F_\alpha = 2a_{\alpha\beta}\, y_\beta$ en $F_t = -2\, f.$

Aangesien $w \in C_0^\infty(G)$ willekeurig, volg

$$(-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta y(x)) = f(x) \text{ in } G. \tag{1.2}$$

Indien y 'n toelaatbare funksie is, moet dit verder sekere randwaardes bevredig.

1.3. <u>Randwaardeprobleme</u> [35 , Hfs 2]

1.3.1. <u>Elliptiese operatore</u>

Laat $A(x,D)u = \Sigma_{|\alpha| \leqslant \ell}\; a_\alpha\, D^\alpha\, u; \qquad \ell = 2\,m.$ (1.3)

Dan word $A_o(x,\xi) = \Sigma_{|\alpha|=\ell}\ a_\alpha\ \xi^\alpha$ (1.4)

die karakteristieke deel van A genoem.

Afspraak. In ooreenstemming met verdere hoofstukke, word die simbole Ω en Γ, soos gebruik in [35] vervang met G en S onderskeidelik.

1.3.2. Definisies. [35, Hfs 2]

a. Die operator A is ellipties in G as vir elke $x \in G$ geld dat $A_o(x,\xi) \neq 0$ vir alle $\xi \in R^n$, $\xi \neq 0$.

b. A is sterk ellipties in G as vir elke $x \in G$ geld dat 'n komplekse $\gamma(x)$ en 'n $\alpha(x) > 0$ bestaan sodanig dat

$$\mathrm{Re}(\gamma(x)A_o(x,\xi)) \geqslant \alpha(x)|\xi|^{2m} \quad \text{vir alle} \quad \xi \in R^n.$$

c. Soortgelyke definisies word gemaak met $\bar{G}$ in die plek van G.

d. 'n Sterk elliptiese operator heet gelykmatig sterk ellipties in $\bar{G}$ indien $\gamma(x) = \gamma$ en $\alpha(x) = \alpha$ onafhanklik van $x \in \bar{G}$.

Veronderstel $G \subset R^n$ is oop en begrens. Gestel die rand S van G is van klas C^∞ en G is lokaal aan een kant van S.

Laat $Au = \Sigma_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|}\ D^\alpha(a_{\alpha\beta}\ D^\beta u)$ (1.5)

met $a_{\alpha\beta} \in C_o^\infty(\bar{G})$.

In ooreenstemming met (1.4) word

$$A_o(x,\xi) = \Sigma_{|\alpha|,|\beta|=m}(-1)^{|\alpha|}a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\xi^{\beta}.$$

Aanvaar nou die bestaan van 'n $C > 0$ sodanig dat

$$\operatorname{Re} A_o(x,\xi) \geqslant C|\xi|^{2m} \quad \text{vir alle} \quad \xi \in R^n, \quad x \in \bar{G}.$$

A is dan 'n gelykmatig sterk elliptiese operator. Dit is duidelik dat vergelyking (1.2) geskryf kan word in die vorm

$$A(x,D)y = f \text{ in } G.$$

1.3.3. Definisie [35, p 113]

Laat $B_j u = \Sigma_{|h|\leqslant m_j} b_{jh}(x)D^h u;\quad 0 \leqslant j \leqslant \nu - 1$

randoperatore wees.

$\{B_j\}_{j=o}^{\nu-1}$ is 'n normale sisteem op $S_1 \subset S$ as

a. $\Sigma_{|h|=m_j} b_{jh}(x)\xi^h \neq 0$ vir alle $x \in S_1$ en vir alle $\xi \neq 0$ en normaal op S by x.

b. $m_j \neq m_i$ vir $j \neq i$.

1.3.4. Definisie [35, p 113]

Die sisteem $\{B_j\}_{j=o}^{m-1}$ is versoenbaar met die operator A op S_1 as vir elke $x \in S_1$ en alle $\xi \in R^n$ ongelyk aan nul en raaklynig aan S by x, en vir elke $\xi' \in R^n$ ongelyk aan nul en normaal op S by x, die polinome in die komplekse veranderlike τ:

$$\Sigma_{|h|=m_j} b_{jh}(x)(\xi + \tau\xi')^h, \quad j=0,\ldots, m-1,$$

lineêr onafhanklik modulo die polinoom

$$\Pi_{i=1}^{m}(\tau - \tau_i^+(x,\xi,\xi')) \text{ is, } \quad \text{waar}$$

$\tau_i^+(x,\xi,\xi')$ die wortels van die polinoom $A_o(x,\xi + \tau\xi')$ met positiewe imaginêre deel is.

1.3.5. <u>Die volgende vereistes word gestel</u>

a. Die operator A is gelykmatig sterk ellipties in $\bar{G}$ en het koëffisiënte in $C^\infty(\bar{G})$.

b. Daar is m operatore B_j.

c. Die koëffisiënte van B_j is in $C^\infty(S)$.

d. Die sisteem $\{B_j\}_{j=o}^{m-1}$ is normaal op S.

e. Die sisteem $\{B_j\}_{j=o}^{m-1}$ is versoenbaar met A op S.

f. Die orde m_j van B_j is $\leqslant 2m-1$.

Indien aan hierdie ses vereistes voldoen word, word die probleem

$$\begin{aligned} Au &= f \text{ in } G \\ B_j u &= g_j \text{ op } S, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

'n <u>reguliere elliptiese probleem</u> genoem.

1.3.6. <u>Definisie</u> [35, p 114]

Die sisteem $\{B_j\}_{j=o}^{\nu-1}$ is 'n <u>Dirichlet sisteem van orde ν</u> op $S_1 \subset S$ as dit normaal op S_1 is en as die orde m_j presies die waardes $0, 1, \ldots, \nu-1$, aanneem, wanneer j die waardes $0, 1, \ldots, \nu-1$ deurloop.

1.3.7. <u>Variasieformulering en Green se formule</u>. [35, pp.120, 204].

Laat $a(u,v) = \Sigma_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \int_G a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u \overline{D^{\beta} v}\, dx.$ (1.7)

As $\{F_j\}_{j=o}^{m-1}$ 'n Dirichlet sisteem van orde m met koëffisiënte in $C^{\infty}(S)$ is, dan kan 'n sisteem $\{\Phi_j\}_{j=o}^{m-1}$ wat normaal op S is, met koëffisiënte ook in $C^{\infty}(S)$, met: orde van F_j + orde van $\phi_j = 2m-1$ gekry word, sodanig dat

$$a(u,v) = \int_G Au\bar{v}\, dx - \Sigma_{j=o}^{m-1} \int_S \Phi_j u \overline{F_j v}\, dS \text{ vir alle } u, v \in C_o^{\infty}(\bar{G}). \tag{1.8}$$

Neem die B_j's met orde $m_j < m$ en noem hulle $B_o, \ldots, B_{p-1}$, $0 \leqslant p \leqslant m-1$. Vorm 'n Dirichlet sisteem $\{B_o, \ldots, B_{p-1}, B_p', \ldots, B_{m-1}'\}$ van die orde m op S.

Laat $V = \{v \in H^m(G) : B_o v=0, \ldots, B_{p-1} v=0\}$ (1.9)

Uit Green se formule word operatore Φ_j verkry sodanig dat

$$a(u,v) = \int_G Au\bar{v}\, dx - \Sigma_{j=p}^{m-1} \int_S \Phi_j u \overline{B_j' v}\, dS, \quad \text{vir } v \in V. \tag{1.10}$$

Indien u 'n oplossing is van

$$a(u,v) = \int_G f\bar{v}\, dx \quad \text{vir alle } v \in V, \tag{1.11}$$

dan volg

$$Au = f \text{ in } G \text{ en } \Sigma_{j=p}^{m-1} \int_S \Phi_j u \overline{B_j' v}\, dS = 0$$

$$\text{vir alle } v \in V. \qquad (1.12)$$

Hieruit volg $\Phi_j u = 0$, $j = p,\ldots,m-1$. [35, p205] en die volgende stelling.

1.3.8. Stelling

Veronderstel $B_p', \ldots, B_{m-1}'$ kan so gekies word dat

$$\Phi_j = B_j, \ j = p,\ldots, m-1$$

dan is die probleem

$$\begin{aligned} Au &= f \text{ in } G \\ B_j u &= 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1 \text{ op } S \end{aligned} \qquad (1.13)$$

formeel ekwivalent aan die variasieprobleem

$$u \in V : a(u,v) = (f,v) \text{ vir alle } v \in V \qquad (1.14)$$

waar $(f,v) = \int_G f \bar{v}\, dx$ en V gegee word deur (1.9).

1.3.9. Stelling

Laat H 'n (komplekse) Hilbertruimte wees en

$a : H \times H \to C$ 'n bilineêre vorm op H.

Veronderstel a is Hermities $(a(u,v) = \overline{a(v,u)})$ en nie negatief $(a(u,u) \geqslant 0)$. Gestel $(f,\cdot)$ is begrens en antilineêr op H. Dan is u 'n oplossing van

$$u \in H : a(u,v) = (f,v) \text{ vir alle } v \in H$$

as en slegs as

$$Q(u) = \inf\{Q(v) : v \in H\},$$

waar $\quad Q(v) = a(v,v) - 2\,\mathrm{Re}(f,v).$

Bewys

Laat eerstens $u \in H$ 'n oplossing wees van

$$a(u,v) = (f,v) \quad \text{vir alle} \quad v \in H.$$

$$Q(u+v) = a(u,u) + a(u,v) + a(v,u) + a(v,v) - 2\,\mathrm{Re}(f,u) - 2\,\mathrm{Re}(f,v)$$

$$= Q(u) + (f,v) + (\overline{f,v}) + a(v,v) - 2\,\mathrm{Re}(f,v)$$

$$= Q(u) + a(v,v)$$

$$\geqslant Q(u).$$

Laat tweedens $Q(u) = \inf\{Q(v) : v \in H\}$.

$$Q(u) \leqslant Q(u+\alpha v) = Q(u) + \bar{\alpha}\, a(u,v) + \alpha\, a(v,u) + |\alpha|^2 a(v,v) - 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\alpha}(f,v).$$

$\alpha = t \in R$ lewer $t^2 a(v,v) + 2t\,\mathrm{Re}\,a(u,v) - 2t\,\mathrm{Re}(f,v) \geqslant 0.$

Deur met t te deel en t na nul te laat neig volg aangesien v willekeurig geneem is

$$\mathrm{Re}\,a(u,v) = \mathrm{Re}\,(f,v), \quad v \in H.$$

$\alpha = it$ lewer $t^2 a(v,v) + 2t\,\mathrm{Im}\,a(u,v) - 2t\,\mathrm{Im}(f,v) \geqslant 0.$

Dus is $\mathrm{Im}\,a(u,v) = \mathrm{Im}(f,v)$, $v \in H$ en die stelling is bewys.

1.3.10 Opmerkings

(a) Beskou weer die variasierekeningprobleem in R^n (paragraaf 1.2), soos in die voorbeeld toegelig. Veronderstel die klas van toelaatbare funksies word bepaal deur die randwaardes

$$B_j\, y = 0 \quad \text{vir} \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1 \quad \text{op} \quad S.$$

Indien $B_j = \partial^j/\partial\nu^j$, waar $\partial/\partial\nu$ die afgeleide in die rigting van die uitwaartse normaal op S aandui, dan is dit volgens Lemmas 13.2 en 13.3 [22, p 39] sinvol om die klas van toelaatbare funksies te neem as $H_o^m(G)$.

Deur die funksie F met

$$a_{\alpha\beta}\, y_\alpha\, y_\beta - 2\, f\, t\,,$$

waar $\quad y_\alpha = D^\alpha\, y(x)$ en $t = y(x)$,

in die integraal I te vervang, word gevind dat

$$I = a(y,y) - 2\,(f,y),$$

waar $a(u,v)$ gegee word deur (1.7) en

$$(f,v) = \int_G f\, v\, dx.$$

Stelling 1.3.9. toon aan dat die variasierekeningprobleem ekwivalent is aan die probleem:
vind $y \in H_o^m(G)$ sodanig dat $a(y,v) = (f,v)$ vir alle $v \in H_o^m(G)$. Stelling 1.3.8. lewer weer die vergelyking $Ay = f$ soos in 1.2 afgelei.

b. Die orde van die operator A is ewe ($\ell = 2m$) aangesien in [35, p 109] (byvoorbeeld) bewys word dat vir $n > 2$ elke elliptiese operator van ewe orde is.

c. Laat $g \in H^m(G)$ en $f \in L^2(G)$. Gestel

$$B : H \times H \to C \quad \text{met} \quad H = H^m(G).$$

Die probleem

$$u - g \in H_o^m(G) : B(v,u) = (v,f) \quad \text{vir alle} \quad v \in C_o^\infty(G)$$

word die <u>veralgemeende Dirichletprobleem</u> genoem [1, p 98].

d. Laat $u, f \in L^2_{lok}(G)$ en $A(x,D)$ soos in vergelyking (1.3) met $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(G)$ vir $|\alpha| > 0$.

u word 'n swak oplossing in G vir $Au = f$ genoem as

$$(f,v) = (u, A^* v) \text{ vir alle } v \in C_o^\infty(G),$$

waar $A^* v = \Sigma_{|\alpha| \leq \ell} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\bar{a}_\alpha v)$. [1, p 52]

e. Indien $a(u,v) = \int_G \nabla u \cdot \nabla v \, dx$, $f \in L^2(G)$ en $H = H_o^1(G)$ in Stelling 1.3.9, dan is u die oplossing van die klassieke Dirichletprobleem:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad G \\ u &= 0 \quad \text{op} \quad S. \end{aligned}$$

f. In [51, p 8ff] is $Q(v) = \int_o^\pi (p(v')^2 + qv^2 - 2fv)dx$.

Enige funksie v wat die limiet is van 'n ry $\{v_n\} \subset H^2(G)$, wat die randwaardes bevredig (byvoorbeeld $v_n = g$ op S vir elke n) is toelaatbaar, mits met limiet bedoel word konvergensie in die sin

$\int_0^\pi p(v' - v_n')^2 + q(v - v_n)^2 \to 0$ as $n \to \infty$.

Gevolglik word slegs vereis dat $v \in H^1(G)$. In die numeriese analise is dit van groot belang, aangesien daar met funksies gewerk kan word wat stuksgewys kontinue afgeleides het. Sulke funksies kan maklik gekonstrueer word en vergemaklik die berekeninge. Stuksgewys lineêre funksies, byvoorbeeld die "hoedfunksie", word dikwels gebruik.

g. In die variasieformulering word twee tipes randwaardes onderskei:

$B_j u = 0$, $j = 0,\ldots,p-1$, met $m_j < m$, genoem stabiele randwaardes

en $B_j u = 0$, $j = p,\ldots,m-1$ met $m_j \geq m$, genoem natuurlike randwaardes.

Stelling 1.3.8. toon aan dat die eerste tipe uit die voorwaarde $u \in V$ volg en die tweede uit die vorm van Green se formule wat gebruik word.

1.3.11. <u>Voorbeelde</u>

a. In [35, p 208] word aangetoon dat verskillende vorms $a(u,v)$ en dus verskillende Greenformules, met dieselfde operator gekoppel kan word. Laat Δ die Laplace-operator in twee dimensies voorstel.

$$\Delta u = D_1^2 u + D_2^2 u \tag{1.15}$$

of ook

$$\Delta u = D_1^2 u + D_2^2 u + D_1 (c D_2 u) - D_2 (c D_1 u)$$

$$+ D_2 c D_1 u - D_1 c D_2 u, \tag{1.16}$$

waar $c \in C^1(\bar{G})$ reëlwaardig is.

Die twee Green-formules is:

$$\int_G \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx = - \int_G \Delta u \bar{v} \, dx + \int_S T_1 u \bar{v} \, dS \tag{1.17}$$

en $\int_G [\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + c D_1 u \overline{D_2 v} - c D_2 u \overline{D_1 v}$

$$+ \{D_2 c D_1 u - D_1 c D_2 u\} \bar{v}] \, dx$$

$$= - \int_G \Delta u \bar{v} \, dx - \int_S [T_1 u + c T_2 u] \bar{v} \, dS , \tag{1.18}$$

waar T_1 en T_2 respektiewelik die uitwendige normaal afgeleide op S $(\partial/\partial\nu)$ en die raaklynige afgeleide aan S $(\partial/\partial\sigma)$ voorstel.

Twee Neumann tipe probleme word verkry:

$$- \Delta u = f \text{ in } G, \quad T_1 u = 0 \text{ op } S \tag{1.19}$$

en $$- \Delta u = f \text{ in } G, \quad T_1 u + c T_2 u = 0 \text{ op } S. \tag{1.20}$$

b. Beskou die probleem

$$\begin{aligned} Au &= \Delta^2 u + u = f \text{ in } G \\ B_o u &= u = 0 \quad \text{en} \quad B_1 u = T_1 (\Delta u) = 0 \text{ op } S \end{aligned} \tag{1.21}$$

waar T_1 weer soos in 1.3.11.a die normaal afgeleide voorstel.

In [35, p 206] word aangetoon dat hierdie probleem nie in die variasieformulering pas nie, hoewel dit 'n reguliere elliptiese probleem in die sin van 1.3.5. is.

Hierdie probleem kan egter in die vorm

$$\int_G A u \overline{\Lambda v}\, dx = \int_G f \overline{\Lambda v}\, dx \quad \text{vir alle} \quad v \in V \tag{1.22}$$

geskryf word. Die ruimte V hang af van die keuse van die operator Λ.

Sulke ruimtes word in Hoofstukke 3 en 5 gebruik. Bestaan- en regulariteitstellings vir sekere tipes probleme word bewys. Daar sal gesien word dat die keuse van Λ aanleiding gee tot verskillende tipes randwaardes. Die probleme wat bestudeer word, word in hoër orde Sobolevruimtes geformuleer as wat in die gewone swak formulering gedoen word. Sekere regulariteitresultate volg dan sonder dat van die Sobolevruimtes $H^{-s}(G)$ en $H^{-s}(S)$ gebruik gemaak word.

Die voorbeeld [35, p 214] word aangehaal. Laat $H = H_0^1(G)$ en $|v|^2 = \Sigma\,|D_i v|_0^2$ die norm van H wees. $|\cdot|_0$ is die $L^2(G)$ norm.

Laat $V = \{v \in H : D_i \Delta v \in L^2(G), \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$

en $\quad \|v\|^2 = \Sigma |D_i v|_0^2 + |D_i \Delta v|_0^2$

die norm van V wees. Indien

$$a(u,v) = \int_G [\nabla(\Delta u)\cdot\nabla(\Delta\bar{v}) + \nabla u\cdot\nabla\bar{v}]\, dx$$

dan is $\operatorname{Re} a(u,u) = \|u\|^2$ sodat die variasieprobleem, vergelyking 1.14, 'n eenduidige oplossing het [35 , p 201].

Daar bestaan dus 'n $u \in V$ sodanig dat

$$\int_G [\nabla(\Delta u)\cdot\nabla(\Delta\bar{v}) + \nabla u\cdot\nabla\bar{v}]\, dx = \int_G \nabla f \cdot \nabla\bar{v}\, dx \quad \text{vir alle} \quad v \in V.$$

Green se formule impliseer

$$\int_G \nabla(\Delta u)\cdot\nabla(\Delta\bar{v})\, dx = \int_G (u - f)\,\Delta\bar{v}\, dx \quad \text{vir alle} \quad v \in V.$$

Aangesien $H^1(G) \subset \{\Delta v : v \in V\}$ volg

$$-\Delta^2 u = u - f \quad \text{in} \quad G \quad \text{en}$$

$$T_1(\Delta u) = 0 \quad \text{op } S, \quad u = 0 \text{ op } S.$$

1.3.12. Opmerkings

a. Indien $\Lambda = \Delta$ in vergelyking 1.22 gekies word, dan pas probleem 1.21 in die variasieformulering.

b. Indien afgeleides in hierdie bespreking nie in die klassieke sin bestaan nie, is dit in die sin van Schwartz distribusies [44, Hfs 6] en [47]. Randwaardes is in die sin van die spoorstellings [35, p 41] indien S regulier genoeg is, andersins in die variasiesin.

HOOFSTUK 2

VARIASIE-ONGELYKHEDE

2.1. Inleiding

In hoofstuk 1 is sekere differensiaalvergelykings, randwaardeprobleme, minimeringsprobleme en variasieprobleme bespreek. Hierdie probleme het verband met sekere Wiskundige modelle. Die volgende vrae word as riglyn in hierdie hoofstuk gebruik.

a. Hoe ontstaan differensiaalvergelykings, of die beherende vergelykings, gekoppel aan 'n gegewe probleem?

b. Is daar 'n sistematiese manier om hierdie vergelykings te verkry?

c. Indien 'n Wiskundige model opgestel moet word, word daar benewens beherende vergelykings ook ander beperkings opgelê? Watter beperkings lei tot goed gestelde probleme, met ander woorde, probleme wat eenduidig bepaalde oplossings het?

d. In hoofstuk 1 het randwaardes beperkinge op die oplossings gelê. Is daar ook ander maniere om goed gestelde probleme te verkry?

Die doel van hierdie hoofstuk is om op hierdie vrae in te gaan, asook om sekere aspekte van variasie-ongelykhede te bestudeer.

2.2. Behoudwette [43]

Laat G 'n gebied in R^n wees en $\Omega \subset G$ 'n willekeurige gebied met gladde rand Γ. Die uitwaartse normaalvektor op Γ is $n(x)$.

Die volgende funksies word benodig.

$u(x,t)$: 'n Reëlwaardige funksie, wat die digtheid van die hoeveelheid wat behoue moet bly, gee.

$\phi(x,t) \in R^n$: die vloedvektor.

$b(x,t) \in R$: die tempo waarteen kontinue bronne in Ω die hoeveelheid vrystel.

$\beta(x,t) \in R$: die tempo waarteen kontinue randbronne die hoeveelheid vrystel.

$B_i(x_i,t) \in R$: die tempo waarteen puntbronne in Ω die hoeveelheid vrystel.

$R_i(x_i,t) \in R$: die tempo waarteen puntbronne (wat toevallig, as gevolg van die keuse van Γ, randbronne is) die hoeveelheid vrystel in Ω.

Soos in [43] word die term <u>behoudwet</u> gebruik, ook as <u>balanswet</u> bedoel word.

Veronderstel die tempo waarteen u in Ω verander is gelyk aan die vloed ϕ oor die rand Γ + (-) die tempo waarteen bronne (putte) die hoeveelheid in Ω vrystel (absorbeer). $\Omega \subset G$ willekeurig.

Die behoudwet volg as [43,p4]

$$d/dt \int_\Omega u(x,t)dx = -\int_\Gamma \phi\cdot n\, ds + \int_\Omega b\, dx + \int_\Gamma \beta\, ds + \Sigma_1^k B_i + \Sigma_1^\ell R_i \quad \text{vir alle } \Omega \subset G \tag{2.1}$$

of in differensiaalvorm

$$\partial u/\partial t + \operatorname{div} \phi = b + \operatorname{div} \tau, \qquad (2.2)$$

waar $\beta = \tau \cdot n = \tau_i \, n_i$ en $\operatorname{div} \phi = D_i \, \phi_i$ (2.3)

Deur middel van die sogenaamde <u>samestellingsvergelykings</u>, word differensiaalvergelykings, wat die beherende vergelykings is, verkry.

'n Aantal voorbeelde word nou gegee.

2.2.1. <u>Die meganika van vloeistowwe in poreuse media</u> [19, p 12].

<u>Massabehoudwet</u>: $\phi \partial \rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho v) = g,$ (2.4)

waar ϕ = poreusiteit van medium en v = snelheidsveld.

<u>Darcy se wet</u>: $v = -K \operatorname{grad} u ,$ (2.5)

waar K = deurlaatbaarheid van medium en

u = druk.

<u>Twee gevalle word onderskei</u>.

a. <u>Vloeistof</u>. (effens samedrukbaar)

Die verband tussen digtheid ρ en druk u word gegee deur

$$\rho = \rho_o(1 + c(u - u_o)),$$

waar c = samedrukbaarheidskoëffisiënt,

$c \ll 1$.

Daar word aanvaar $\rho v \approx \rho_o v$ en u bevredig

$$c\phi\partial u/\partial t - \mathrm{div}(K\,\mathrm{grad}\,u) = g/\rho_o \qquad (2.6)$$

b. <u>Ideale gas in isotermiese beweging</u>

<u>Wet van Mariotte</u>: $u = C\rho$, C is konstant.

<u>Massabehoudwet</u>: $\phi\partial\rho/\partial t - \mathrm{div}(C\rho K\,\mathrm{grad}\,\rho) = g$,

of $\phi\partial u/\partial t - \mathrm{div}(K u\,\mathrm{grad}\,u) = Cg \qquad (2.7)$

2.2.2. <u>Eendimensionale golfvergelyking</u> [43, p 32]

Laat 'n punt x in die onuitgerekte konfigurasie van 'n veer, se posisie op tydstip t, soos gemeet vanaf die staties uitgerekte konfigurasie, met $u(x,t)$ aangedui word.

Vertikale beweging word bestudeer.

<u>Samestellingsvergelykings:</u>

$\rho\partial u/\partial t$ verteenwoordig momentumdigtheid;

momentumvloed is 0;

ρg (gewig per eenheidlengte) is 'n kontinue momentumbron;

$\lambda(dX/dx + \partial u/\partial x)$, met $X(x)$ die posisie van x in die statiese konfigurasie, is 'n kontakbron vir momentum (spankrag volgens Hooke se wet).

<u>Die behoudwet</u>:

$$\partial(\rho\partial u/\partial t)/\partial t = \rho g + \partial[\lambda(dX/dx + \partial u/\partial x)]/\partial x$$

Die statiese situasie lewer $\rho g + \lambda X'' = 0$ en gevolglik is

$$\partial^2 u/\partial t^2 - \frac{\lambda}{\rho}\,\partial^2 u/\partial x^2 = 0. \qquad (2.8)$$

2.2.3. Hittevergelyking [43, p 33]

Veronderstel hitte word in $\Omega \subset R^n$, $n = 2$ of 3 gelei.

$c\rho u$ is hittedigtheid waar c = spesifieke warmte,
ρ = digtheid,
u = temperatuur van materiaal.

$-K \operatorname{grad} u$ is die hittevloed soos in (2.5); K = warmtegeleidingskoëffisiënt.

Geen bronne kom voor nie.

Die behoudwet:

$$\partial(c\rho u)/\partial t + \operatorname{div}(-K \operatorname{grad} u) = 0 \qquad (2.9)$$

of

$$\partial u/\partial t - k\Delta u = 0; \quad k = K/c\rho, \qquad (2.10)$$

Δ = Laplace operator.

2.3. Stasionêre probleme

Die probleme wat in hoofstuk 1 bespreek is, is tydonafhanklik. Die beherende differensiaalvergelykings van hoofstuk 1, kan verkry word uit 'n behoudwet, deur die ewewigsituasie of stasionêre probleem te beskou. Só reduseer vergelykings (2.10) en (2.9), byvoorbeeld, onderskeidelik tot die volgende:

die harmoniese vergelyking $\Delta u = 0$ van paragraaf 1.2 en die vergelyking $-\operatorname{div}(K \operatorname{grad} u) = 0$. Indien die medium nie noodwendig isotropies en homogeen is nie, is K 'n matriks (K_{ij}) en indien

$$K_{ij}\xi_i\xi_j \geq c|\xi|^2 \quad \text{vir alle } \xi \in R^n \qquad (2.11)$$

volg die elliptiese differensiaalvergelyking

$$A(x,D)u = - D_i(K_{ij}(x)D_ju) = 0, \qquad (2.12)$$

waar A ooreenstem met die operator van vergelyking 1.5 met $m = 1$.

Dit is ook bekend dat die oplossing van die hitteprobleem byvoorbeeld, in 'n sekere sin konvergeer na die oplossing van 'n stasionêre probleem. Hierbo is dit 'n elliptiese probleem.

Die statiese situasie $\rho g + \lambda X'' = 0$ is ook benodig om die golfvergelyking in die vorm 2.8 te skryf.

Hierdie bespreking dien as motivering vir die bestudering van elliptiese probleme. Die tydafhanklike probleme word in hoofstuk 5 bespreek; slegs paraboliese probleme word daar bestudeer.

2.4. Randmodelle [43]

In hoofstuk 1 het Dirichletrandwaardes en Neumannrandwaardes die klas van toelaatbare funksies bepaal. In hoofstuk 5 word gekoppelde randprobleme, waarin tyd- en ruimtelike afgeleides 'n rol speel, bestudeer. Kombinasies van hierdie drie moontlikhede word ook gekry. In [43] word aangetoon dat die oorsprong van randwaardes gevind kan word deur die rand self as 'n medium, met sy eie behoudwette te beskou. Tussen die randgebied en die gebied G wat bestudeer word, vind daar koppeling plaas. 'n Resultaat van hierdie beskouing word nou benodig.

Meerdimensionale randmodel [43, pp 8,9]

'n Hoeveelheid u_1 bevredig 'n behoudwet in 'n gebied G_1. Die randgebied G_2 is van dieselfde dimensie as G_1. Die twee behoudwette vir G_1 en G_2

$$\partial u_i/\partial t + \operatorname{div} \phi_i = b_i + \operatorname{div} \tau_i, \quad i = 1,2 \qquad (2.13)$$

tesame met die koppelvoorwaarde

$$\phi_1 \cdot n - \phi_2 \cdot n - \tau_1 \cdot n + \tau_2 \cdot n + R_1 + R_2 = 0 \qquad (2.14)$$

lewer die volledige Wiskundige model.

Die klassieke Neumann-tipe en Dirichlet-tipe randwaardes word in [43, p 15ff] gegee.

2.5. Variasie-ongelykhede

Indien die rand S van G 'n halfdeurlaatbare membraan is, wat slegs 'n vloed in G in toelaat en alle uitvloei keer, word 'n nuwe benadering ten opsigte van randwaardes nodig. Dieselfde geld ten opsigte van "vrye-rand-probleme", aangesien klassieke randwaardes nie op 'n vooraf bekende deel van die rand, opgelê kan word nie. "Plateau se probleem", paragraaf 1.1, kan ook tot 'n nuwe probleem lei. Veronderstel 'n konvekse obstruksie word onder 'n membraan geplaas. 'n Geslote kromme word gegee. 'n Nuwe minimeringsprobleem kan nou geformuleer word: vind die kleinste oppervlakte wat die gegewe kromme onderspan en terselfdertyd bo die konvekse obstruksie lê. Die minimeringsprobleme of variasieprobleme wat tot dusver bespreek is, kan nou aan gegewe "konvekse" beperkinge onderwerp word. Die studieveld van Variasie-ongelykhede word nou betree.

In hierdie hoofstuk word slegs 'n paar aspekte van Variasie-ongelykhede aangeraak. 'n Paar voorbeelde word gegee. Die doel hiervan is soos in die eerste hoofstuk, om die agtergrond te skets, waarteen verdere werk gedoen word. In hoofstukke 3 en 4 word 'n formulering van Lions [33], asook die benadering van Sauer [45] ten opsigte van randwaardes, gebruik om 'n nuwe benadering ten opsigte van Variasie-ongelykhede te ondersoek. Die idee van Lions soos geskets in 1.3.11.b hoofstuk 1 help met die hantering van randwaardes. In hoofstuk 5 word hierdie benadering ten opsigte van "evolusieprobleme" gevolg. Die doel van hierdie en verdere hoofstukke, is geensins om 'n verteenwoordige behandeling van Variasie-ongelykhede, of Evolusie-ongelykhede te gee nie.

2.5.1. Halfdeurlaatbare wande [19, p 14ff].

'n Gebied $G \subset R^n (n \leqslant 3)$ met rand S en uitwendige normaal n bevat 'n poreuse medium. Die druk van 'n viskeuse vloeistof wat vergelyking (2.6) bevredig, word aangedui met u. Aanvaar

$$c\phi = K = \rho_0 = 1.$$

a. Wand met eindige dikte [19, p 16]

'n Funksie h word gegee. Die randvoorwaardes het die vorm

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\ h(x) < u(x,t) \text{ impliseer } \partial u/\partial n = 0\\&\text{(ii)}\ h(x) \geqslant u(x,t) \text{ impliseer } -\partial u/\partial n = k(u-h),\end{aligned} \qquad (2.15)$$

k is die geleidingsvermoë van die wand.

Die druk van binne op S, kan groot wees, maar indien dit 'n gegewe hoeveelheid oorskry, word invloei van buite af gekeer. Indien die druk kleiner as 'n gegewe waarde is, word vloeistof van buite af binnegelaat, met 'n tempo eweredig aan die verskil tussen die druk en die gegewe hoeveelheid.

Die koppelvoorwaarde [43, p 15] by Neumanntipe randwaardes word gegee deur

$$(\phi_1 - \tau_1)\cdot n = - R_1 \text{ op } S. \tag{2.16}$$

Veronderstel $(\phi_1 - \tau_1)\cdot n = - \partial u/\partial n/k$ uit (2.5) en

$$- R_1 = \begin{cases} 0 \text{ as } h < u \\ u-h \text{ as } h \geqslant u \end{cases} \tag{2.17}$$

Die randvoorwaardes (2.15) volg nou.

(b) <u>Wand met weglaatbare dikte</u> [19, p 15]

'n Funksie h word gegee. 'n Halfdeurlaatbare membraan op S laat vloei in G in toe, maar verhinder alle uitvloei. 'n Druk $h(x)$, $x \in S$, word van buite op G aangebring. Die randvoorwaardes is

$$\begin{aligned} &\text{(i) } h(x) < u(x,t) \text{ impliseer } \partial u/\partial n = 0 \\ &\text{(ii) } h(x) \geqslant u(x,t) \text{ impliseer } -\partial u/\partial n \leqslant 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Hierdie randvoorwaardes verskil van dié in geval (a) in die volgende sin. Wanneer die druk van binne op S by 'n punt kleiner as 'n gegewe waarde is, word vloeistof binnegelaat. Die vloed, $-K \operatorname{grad} u$, maak 'n hoek tussen 90 en 180 grade met die uitwaartse normaal $n(x)$. Aangesien die wand dun is, is dit redelik om te aanvaar dat $u \geqslant h$ oral op S. Andersins sou vloeistof die gebied G binnevloei en onmiddellik die drukverskil ophef.

$$\text{Indien } R_1 = 0 \text{ vir } h < u \qquad \text{en } R_1 \geqslant 0 \text{ vir } h \geqslant u \tag{2.19}$$

en $(\phi_1 - \tau_1)\cdot n = -K\,\partial u/\partial n$,

dan volg die randvoorwaardes (2.18) uit die koppelvoorwaarde (2.16).

<u>Stasionêre probleem</u>

Die beherende vergelyking (2.6) reduseer tot

$$-\Delta u = f \text{ in } G. \tag{2.20}$$

Tesame hiermee word die randwaardes (2.18) asook die beperking

$$u \geqslant h \text{ op } S \tag{2.21}$$

opgelê.

Laat v gedefinieer wees op $\bar{G}$ en voldoen aan (2.21). Dan is

$\int_S (v-u)\,\partial u/\partial n\,dS = \int_S (v-h)\,\partial u/\partial n\,dS + \int_S (h-u)\,\partial u/\partial n\,dS \geqslant 0$ op grond van (2.18).

Indien omgekeerd

$$u \geqslant h \text{ en } \int_S (v-u)\,\partial u/\partial n\,dS \geqslant 0 \text{ vir alle } v \text{ met } v \geqslant h, \tag{2.22}$$

volg deur $v = u + w$ met $w \geqslant 0$ op S te kies, dat

$$\partial u/\partial n \geqslant 0 \text{ op } S.$$

Die keuses $v = h$ en $v = 2u - h \geqslant h$ op S lewer

$$\int_S (u-h)\,\partial u/\partial n\,dS = 0.$$

(2.22) impliseer gevolglik

$$\partial u/\partial n \geqslant 0, \quad u \geqslant h, \quad (u-h)\partial u/\partial n = 0 \text{ op } S, \tag{2.23}$$

wat duidelik ekwivalent is aan (2.18) tesame met (2.21).

Deur gebruik te maak van die beherende vergelyking (2.20) volg

$$\int_G f(v-u)dx = \int_G -\Delta u(v-u)dx$$

$$= \int_G \nabla u\cdot\nabla(v-u)dx - \int_S \partial u/\partial n(v-u)dS. \tag{2.24}$$

Die probleem van stasionêre vloei van 'n effens samedrukbare vloeistof in 'n poreuse medium wat deur 'n halfdeurlaatbare membraan van weglaatbare dikte bedek word, kan nou soos volg geformuleer word:

Vind u met $u \geqslant h$ op S sodanig dat

$$\int_G \nabla u\cdot\nabla(v-u)dx \geqslant \int_G f(v-u)dx \text{ vir alle } v \text{ met } v \geqslant h \text{ op } S. \tag{2.25}$$

Probleem (2.25) word 'n Variasie-ongelykheid genoem. Op grond van die ekwivalensie van (2.23) met (2.22) volg dat probleem (2.25) "formeel" ekwivalent aan die oorspronklike probleem is.

2.6. Abstrakte Formulering van Variasie-ongelykhede

2.6.1. Definisie

Laat 'n differensiaaloperator A in die vorm (1.5) van hoofstuk 1 gegee wees. Die bybehorende bilineêre vorm word gegee deur (1.7). Die bybehorende kwadratiese vorm word met $\hat{a}$ aangedui, waar

$$\hat{a}(u) = a(u,u).$$

2.6.2. Definisie

Laat $a(\cdot,\cdot)$ 'n bilineêre vorm wees, gedefinieer op 'n Hilbertruimte V met norm aangedui met $\|\cdot\|$. a heet koërsief as daar 'n positiewe c bestaan sodanig dat

$$\hat{a}(v) \geq c\|v\|^2 \text{ vir alle } v \in V.$$

a heet kontinu as daar 'n M bestaan sodanig dat

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|\,\|v\| \text{ vir alle } u,v \in V.$$

2.6.3. Definisie

'n Versameling K is konveks as $tK + (1-t)K \subset K$ vir elke t met $0 < t < 1$.

Laat $V = H^m(G)$ en $E \subset \bar{G}$ 'n geslote deelversameling. Met $v \geq h$ op E word bedoel dat 'n ry $\{v_n\} \subset V \cap C^m(\bar{G})$ bestaan met die eienskappe

$$v_n \geq h \text{ op } E \text{ en } v_n \to v \text{ in } V. \text{ [32].}$$

In die lig van hierdie definisie is die versameling

$$K = \{v \in V : v \geq h \text{ op } E\} \tag{2.26}$$

'n konvekse geslote deelversameling van $V = H^m(G)$.

2.6.4. Definisie

Laat V soos in definisie 2.6.3 wees.
Die spooroperator [35, p 39] aangedui met T_o het die eienskap

$$(T_o u)(x) = u(x) \quad \text{vir} \quad x \in S,$$

indien $u \in C^\infty(\bar{G})$.

Laat $a_{ij} \in C^{\infty}(\bar{G})$. Dan word die konormale afgeleide T_1, geassosieer met die operator $- D_i(a_{ij}D_j u)$, gedefinieer deur

$$(T_1\, u)(x) = a_{ij}(x)D_j u(x)n_i(x) \quad \text{vir} \quad x \in S$$

en $u \in C^{\infty}(\bar{G})$.

Indien $m \geqslant 1$ word die uitbreiding van T_0 op V weer aangedui met T_0. Indien $m \geqslant 2$ word die uitbreiding van T_1 weer aangedui met T_1.

Laat $E = S$ in definisie 2.6.3. Aangesien T_0 'n kontinue afbeelding van $H^m(G)$ in $H^0(S)$ [35, p 39] is, word (2.26) geskryf in die vorm

$$K = \{v \in V: \ T_0\, v \geqslant h \ \text{ op } S\} \text{ met } V = H^m(G). \tag{2.27}$$

Laat $m = 1$ en $a(\cdot,\cdot)$ die bilineêre vorm wat by Laplace se operator Δ hoort. (Definisie 2.6.1). Laat K gegee word deur (2.27). Laat

$$(f,v) = \int_G f\, v\, dx \quad \text{vir } v \in V. \tag{2.28}$$

Die variasie-ongelykheid (2.25) kan nou geskryf word as:

vind $u \in K$ sodanig dat

$$a(u,v-u) \geqslant (f,v-u) \quad \text{vir alle} \quad v \in K. \tag{2.29}$$

2.6.5. <u>Abstrakte variasie-ongelykheid</u> [37], [49].

Laat V 'n reële Hilbertruimte wees met inwendige produk en norm aangedui deur $((\cdot,\cdot))$ en $\|\cdot\|$ onderskeidelik. V^* is die duaal van V en die paring van V^* met V word aangedui deur (f,v), vir $f \in V^*$ en $v \in V$. Laat a 'n kontinue bilineêre vorm op V wees en K 'n konvekse geslote deelversameling van V. Laat $f \in V^*$.

Probleem (2.29) is 'n abstrakte variasie-ongelykheid en word as definisie aanvaar.

Die "klassieke" stellings in [37] en [49] verseker dat probleem (2.29) 'n eenduidige oplossing het, wat kontinu van f afhang, indien a koërsief en kontinu is.

2.7. <u>Stelling</u> [37], [49] <u>Veronderstel</u> $a(u,u) \geqslant 0$. <u>Indien</u> $a(u,v) = a(v,u)$, <u>heet</u> a <u>simmetries</u>. <u>In dié geval is</u> (2.29) <u>ekwivalent aan</u>:

$$\underline{\text{vind}} \quad u \in K: Q(u) = \inf\{Q(v) : v \in K\}, \qquad (2.30)$$

<u>waar</u> $Q(v) = \hat{a}(v) - 2(f,v)$
<u>soos in</u> (1.3.9)

<u>Bewys</u>

u bevredig $Q(u) \leqslant Q(v)$ vir alle $v \in K$ as en slegs as
$Q(u) \leqslant Q(tv + (1-t)u)$ vir alle $v \in K$ en $0 \leqslant t \leqslant 1$
as en slegs as $\hat{a}(u) - 2(f,u) \leqslant \hat{a}(u) + 2t[a(u,v-u) - (f,v-u)]$
$$+ t^2\hat{a}(v-u) - 2(f,u), \quad v \in K, \ 0 \leqslant t \leqslant 1$$
as en slegs as $a(u,v-u) \geqslant (f,v-u)$ vir alle $v \in K$.

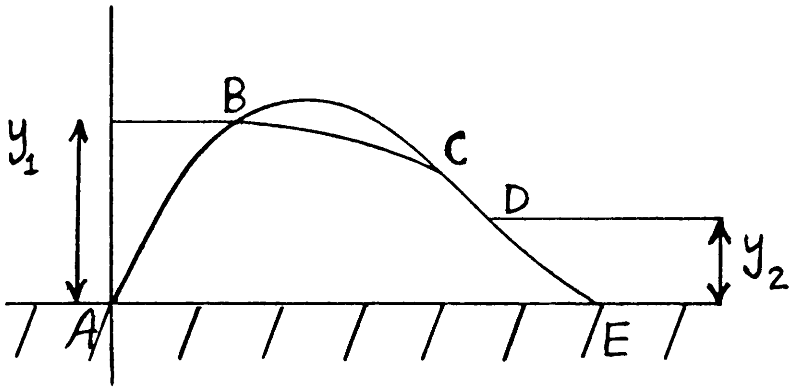
2.8. <u>Opmerkings</u>

a. Hierdie stelling motiveer die keuse van die onderwerp in die eerste paragraaf van hoofstuk 1. Dirichlet se beginsel kan bewys word [16, p 23ff] en [42, p 315ff] indien aanvaar word dat minstens een toelaatbare funksie u is sodanig dat $D(u) < \infty$, sien vergelyking 1.1. Sodoende is dit moontlik om 'n nie-leë konvekse versameling K te definieer, sodanig dat Dirichlet se beginsel met die oplos van 'n variasie-ongelykheid ooreenstem.

b. Indien $K = V$ dan reduseer (2.29) na die gewone variasieprobleem $a(u,v) = (f,v)$ vir alle $v \in V$.

2.9. Vrye-rand-probleme

2.9.1. Voorbeeld [30], [2] en [3]



Die stasionêre, rotasievrye vloei of deursypeling van 'n onsamedrukbare vloeistof, deur 'n isotropiese, poreuse medium word beskou. Uit Darcy se wet (2.5) volg Laplace se vergelyking $\Delta u = 0$ in G, soos in paragraaf 2.3 verduidelik. As deel van die oplossing tot die probleem, moet 'n funksie ϕ gevind word, wat die vrye-rand se posisie gee. Die skets toon 'n dwarsdeursnit van die medium, wat 'n konstante deursnee het. Die vloeistof beweeg van links, met 'n diepte van y_1 na regs, waar die diepte y_2 is. AE is ondeurdringbaar.

Randwaardes [3 Appendix A]. Sien skets hierbo.

Die druk op AB word gegee deur

$$p_1(y) = c[y_1 - y]$$

en op DE deur

$$p_2(y) = c[y_2 - y].$$

Indien $u = p/c + y$ dan is

$$u = y_1 \text{ op AB en } u = y_2 \text{ op DE}.$$

$u(x,\phi(x)) = \phi(x)$ op BCD, want die druk is nul op BCD.

$\partial u/\partial n = 0$ op BC en AE.

Die snelheidsveld word gegee deur

$$v = -K \operatorname{grad} u = -\frac{K}{c} \operatorname{grad}(p + cy)$$

en $K/c = k/(\nu\rho)$,

met ν = viskositeit van die vloeistof,
k = deurdringbaarheid van die medium,
en ρ = digtheid van die medium.

2.9.2. Variasie-ongelykheid [30]

Die poreuse medium beslaan 'n reghoek D met rand S. Na 'n sekere transformasie word die probleem die variasie-ongelykheid (2.29) met

$$K = \{v \in H^1(D): T_0 v = g \text{ op } S \text{ en } v \geqslant 0 \text{ in } D\}.$$

Die gebied G waarin die oplossing w van die variasie-ongelykheid gedefinieer is, word gegee deur

$$G = \{x,y) \in D: w(x,y) > 0\}$$

en die vrye rand word gegee deur

$$\phi(x) = \min_{t \in (y_2, y_1)} \{t : w(x,t) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a\}.$$

'n Verdere bespreking van hierdie probleem volg in hoofstukke 3 en 4. Verder is $u = y - \partial w/\partial y$ in G.

2.9.3. Opmerkings

a. Bogenoemde probleem word numeries met behulp van eindige-element metodes in [30] opgelos.

b. 'n Soortgelyke variasie-ongelykheid word in [15] bestudeer. Numeriese resultate word gegee. Die drukverspreiding in 'n dun lagie van 'n smeermiddel, tussen twee ewewydige silinders, moet gevind word. Daar word aangetoon dat die vrye-rand-probleem, 'n meer realistiese benadering tot die probleem as die gewone randwaardeprobleem is.

c. Lions [33] wys op die volgende probleem wat nog nie op-gelos is nie: Het die tegnieke van variasie-ongelykhede nut by die oplossing van "alle" vrye-rand-probleme?

2.10. Verdere aspekte en formulering van die variasie-ongelykheid probleem.

Die teorieë van variasierekening, variasie-ongelykhede en monotone operatore in Banachruimtes het sedert 1964 baie aandag geniet [6], [7], [9], [10], [11], [12], [38]. Verdere verwysings kan in [9] gevind word. In hoofstuk 3 word aandag hieraan gegee. Op hierdie stadium word 'n aantal definisies gegee, wat verderaan benodig word. Twee bestaan-stellings in die Banachruimtekonteks word aangehaal. In die volgende deel van hierdie hoofstuk, word toepassings van die nuwe formulering wat nou volg, in die Hilbertruimtekonteks gegee.

2.10.1. Definisies

Laat X 'n refleksiewe Banachruimte met duaal X^* wees en paring (y,x) vir $y \in X^*$ en $x \in X$. $\|\cdot\|$ dui die norm van X aan.

a. 'n Funksie $f : X \to R$ is konveks as

$$f(tu + (1-t)v) \leqslant t f(u) + (1-t) f(v)$$

vir alle $u, \ v \in X$ en $0 \leqslant t \leqslant 1$.

b. 'n Konvekse funksie $f : X \to R$ is onder halfkontinu as $u_n \to u$ impliseer $\liminf f(u_n) \geqslant f(u)$.

c. Die klas van alle konvekse funksies op X met waardes in $(-\infty, +\infty]$, wat nie identies $+\infty$ is nie en wat onder half-kontinu is, word aangedui met $\Gamma_o(X)$ [39].

d. Die effektiewe gebied van $f \in \Gamma_o(X)$ word aangedui met $D(f)$ en $D(f) = \{x \in X: f(x) < \infty\}$.

e. 'n Operator $T : D(T) \subset X \to X^*$ heet monotoon as

$(Tu - Tv, u - v) \geqslant 0$ vir alle $u, v \in D(T)$. [10].

f. 'n Operator $A : X \to X^*$ is pseudo-monotoon [34, p 179] as

(i) A begrens is. (A beeld begrensde versamelings af op begrensde versamelings).

(ii) $u_j \rightharpoonup u$ en $\limsup (Au_j, u_j - u) \leqslant 0$ impliseer

$$\liminf\, (Au_j,\ u_j - v) \geqslant (Au,\ u - v) \quad \text{vir}$$

alle $v \in X$. (Swak konvergensie word aangedui met $\rightharpoonup$)

g. Indien gelykheid in definisie (e) geld slegs as $u = v$, dan heet T streng monotoon.

h. 'n Operator $T : D(T) \subset X \to X^*$ is hemikontinu as $D(T)$ konveks is en T 'n kontinue afbeelding is van elke lynsegment in $D(T)$ na die swak topologie van X^* [12].

2.10.2. Opmerking. In definisie 2.10.1.b maak dit nie saak of u_n swak of sterk konvergeer nie, want f is konveks. (Die swak en sterk afsluiting van die versameling

$$\text{epi}\, f = \{(x,t) : x \in X : f(x) \leqslant t\},$$ sien [40], is gelyk.)

2.10.3. Stelling [12]

Laat T 'n monotone hemikontinue operator gedefinieer op 'n refleksiewe Banachruimte X wees, met waardes in X^*. Laat $f \in \Gamma_0(X)$ en $f(0) = 0$. Veronderstel dat daar vir 'n gegewe $w \in X^*$ 'n $R > 0$ bestaan, sodanig dat

$$(Tu - w, u) + f(u) > 0 \text{ vir alle } u \text{ met } \|u\| = R. \qquad (2.31)$$

Dan bestaan daar 'n $u \in B_R = \{u : \|u\| \leqslant R\}$ sodanig dat

$$(Tu - w,\ v - u) + f(v) - f(u) \geqslant 0 \text{ vir alle } v. \qquad (2.32)$$

Indien T streng monotoon is, dan is die oplossing van (2.32) eenduidig. As

$$[(Tu,u) + f(u)]/\|u\| \to \infty \text{ as } \|u\| \to \infty \qquad (2.33)$$

dan bestaan daar 'n oplossing vir (2.32) vir elke $w \in X^*$.

2.10.4. Stelling. [34, p 251]

Veronderstel $A : X \to X^*$ is pseudo-monotoon en $\phi \in \Gamma_0(X)$. Gestel 'n $v_0 \in D(\phi)$ bestaan sodanig dat $[(Au, u - v_0) + \phi(u)]/\|u\| \to \infty$ as $\|u\| \to \infty$. Dan bestaan daar vir elke $x^* \in X^*$ 'n $u \in X$ sodanig dat

$$(Au - x^*, v - u) + \phi(v) - \phi(u) \geqslant 0 \quad \text{vir alle} \quad v.$$

2.10.5. In [37] Stelling 2.2. word 'n soortgelyke stelling in die Hilbertruimtekonteks gegee.

2.11. Enkele verdere toepassings uit die literatuur.

2.11.1. Laat $f(u) = \int_S q(u(x))dS$

$$\text{met} \quad q(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(t-h)^2 & \text{as } t \leqslant h. \\ 0 & \text{andersins.} \end{cases}$$

'n Variasie-ongelykheid van tipe (2.32), word in [19, p 30] vir die probleem wat in paragraaf 2.5.1.a bespreek is, gegee.

2.11.2. Lineêre Elastisiteit met Wrywing [19, p 135 ff]

Samestellingsvergelykings

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(u) \tag{2.34}$$

gee 'n lineêre verband aan, tussen die spanningstensor, σ_{ij} en die gelineariseerde vervormingstensor, $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ met u die verplasingsvektor. In hierdie afdelings is $f_{,j} = \partial f/\partial x_j$ vir enige differensieerbare f.

Behoudwet [19, p 3]: $\sigma_{ij,j} + f_i = \rho\, dv_i/dt$ (2.35)

Green se formule [19, p 107]

Laat $(Au)_i = -\partial[a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(u)]/\partial x_j$, (2.36)

en

$$(f,g) = \int_G f_i\, g_i\, dx \quad \text{vir } f,g \in [L^2(G)]^3. \qquad (2.37)$$

$$[v,w]_{S_1} = \int_{S_1} v\,w\, dS \quad \text{vir} \quad v,w \in L^2(S), \text{ met } S_1 \subset S. \qquad (2.38)$$

en $$a(u,v) = \int_G a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx. \qquad (2.39)$$

Laat
$$\left.\begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_{ij}\, n_i\, n_j, \\ \sigma_T &= \{\sigma_{iT}\}, \\ \sigma_{iT} &= \sigma_{ij}\, n_j - \sigma_N\, n_i. \end{aligned}\right\} \qquad (2.40)$$

Laat $v_N = v_i\, n_i$ en $v_T = v - nv_N$ (2.41)

Dit is bekend dat

$$\sigma_{ij}\, n_j\, v_i = \sigma_T v + \sigma_N\, v_N = \sigma_T\, v_T + \sigma_N\, v_N \qquad (2.42)$$

en Green se formule volg as

$$(Au,v) = a(v,u) - \int_S [\sigma_T\, v_T + \sigma_N\, v_N]\, dS \qquad (2.43)$$

Coulomb se wet. Stasionêre geval

'n Elastiese liggaam beslaan 'n gebied G met rand S. 'n Deel S_F van S is onderhewig aan wrywing. Klassieke voorwaardes word op die komplement $S_U = S - S_F$ van S_F gegee.

Die model wat bestudeer word is:

a. $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ in G (vanaf (2.35)) (2.44)

b. $u_i = U_i$ op S_U (2.45)

c. $\sigma_N = F_N$ op S_F (2.46)

d. $|\sigma_T| < g$ impliseer $u_T = 0$ op S_F (2.47)

e. $|\sigma_T| = g$ impliseer daar bestaan 'n $\lambda \geq 0$
sodanig dat $u_T = -\lambda\sigma_T$ op S_F. (2.48)

Definieer bogenoemde as probleem a. b. c. d. e.

Definieer $j(u) = \int_{S_F} g(x)|v_T(x)|\,dS$. (2.49)

Stelling [19, p 139]

Laat $V = [H^1(G)]^3$. *Die probleem* a.b.c.d.e. *is formeel ekwivalent aan die variasie-ongelykheid*

vind $u \in V$ *sodanig dat* $u = U$ *op* S_U *en*

$$a(u,v-u) + j(v) - j(u) \geq (f,v-u) + [F_N, v_N - u_N]_{S_F}$$

vir alle $v \in V$ *sodanig dat* $v = U$ *op* S_U.

(2.50)

Bewys [19, p 139]

(d) en (e) impliseer $\sigma_T(v_T - u_T) + g(|v_T| - |u_T|) \geq 0$ op S_F.

(a) en (2.43) impliseer

$$a(u,v-u) - [\sigma_T, v_T - u_T]_{S_F} - [\sigma_N, v_N - u_N]_{S_F} - \int_{S_U} \sigma(v-u)\,dS$$

$$= (f,v-u).$$

Aangesien $\sigma_N = F_N$ op S_F en $v = u = U$ op S_U volg

$$a(u,v-u) - (f,v-u) - [F_N, v_N - u_N]_{S_F} = [\sigma_T, v_T - u_T]_{S_F}.$$

Gevolglik is $a(u,v-u) + j(v) - j(u) - [F_N, v_N - u_N]_{S_F}$

$$- (f,v-u) = \int_{S_F} [\sigma_T(v_T - u_T) + g|v_T| - g|u_T|]\,dS \geqslant 0.$$

Laat omgekeerd $v = u \pm w$ met $w \in [C_0^\infty(\bar{G})]^3$ en u die oplossing van die variasie-ongelykheid wees.

Dan volg eerstens $Au = f$ in G en tweedens

$$\int_{S_F} [\sigma_T(v_T - u_T) + g(|v_T| - |u_T|) + (\sigma_N - F_N)(v_N - u_N)]\,dS$$

$$\geqslant 0 \text{ vir alle } v \in V \text{ met } v = U \text{ op } S_U.$$

Deur vir willekeurige $w \in H^{\frac{1}{2}}(S)$ 'n v te kies met $v_T = u_T$ en $v_N = w$ volg dat $\sigma_N = F_N$ op S_F.

Nou is $\int_{S_F} [\sigma_T(v_T - u_T) + g(|v_T| - |u_T|)]\,dS \geqslant 0.$

Die keuse $v = \psi_N n + \psi_T$; $\psi_N = n\psi$ lewer

$$\int_{S_F} [\sigma_T\psi + g|\psi|]\,dS - \int_{S_F} [\sigma_T u_T + g|u_T|]\,dS \geqslant 0,$$

aangesien

$$|\psi_T| \leqslant |\psi| \quad \text{en} \quad \sigma_T\psi_T = \sigma_T\psi.$$

Nou word ψ hierbo met $\pm\lambda\psi$, $\lambda \geqslant 0$ vervang en eerstens word die geval $\lambda \to \infty$ en tweedens die geval $\lambda \to 0$ beskou.

Die resultaat is (i) $\left|\int_{S_F} \sigma_T \psi \, dS\right| \leqslant \int_{S_F} g|\psi| dS$,

en (ii) $\int_{S_F} [\sigma_T u_T + g\,|u_T|] dS \leqslant 0$.

Nou volg $|\sigma_T| \leqslant g$ byna oral op S_F [19, p 141]

en dus is $\sigma_T u_T + g|u_T| = 0$ byna oral op S_F.

Hieruit volg (d) en (e).

2.11.3. <u>Opmerking</u>

Veronderstel S_F is 'n platvlak met uitwendige normaalvektor $n(x) = (0, -1, 0)$. Veronderstel die deformasie vind slegs in die x_1 rigting plaas. Laat $u = (u_1, 0, 0)$ 'n oplossing van (2.50) wees. Uit (2.44) en (2.34) volg

$$- \partial_j (a_{ij1h} \partial_h u_1) = f_i \quad \text{in} \quad G. \qquad (2.51)$$

Elkeen van hierdie drie vergelykings is van die vorm (1.6) met $m = 1$.

Die randwaardes (2.46) ... (2.48) reduseer tot:

$$\sigma_{22} = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_N = F_N \text{ op } S_F.$$

$|\sigma_T| < g$ impliseer $u_T = (u_1, 0, 0) = u = 0$ op S_F.

$|\sigma_T| = g$ impliseer daar bestaan 'n $\lambda \geqslant 0$

sodanig dat $(u_1, 0, 0) = u_T = -\lambda\sigma_T$ op S_F.

$\sigma_{iT} = -\sigma_{i2} - \sigma_{22} n_i$ impliseer

$$\sigma_T = -(\sigma_{12}, 0, \sigma_{32}).$$

Nou volg $u_1 = \lambda\sigma_{12}$ en $\sigma_{32} = 0$ op S_F as $|\sigma_T| = g$.

Stel $a_{1j1h} = b_{jh}$ en kies $v = (v_1, 0, 0)$ in (2.50).

u_1 is dan 'n oplossing van

$$\int_G b_{jh}\, \partial_h u_1\, \partial_j(v_1 - u_1)dx + g\int_{S_F}[|v_1| - |u_1|]dS$$

$$\geqslant \int_G f_1(v_1 - u_1)dx \quad \text{vir alle } v_1$$

$$\text{met} \quad v_1 = U_1 \text{ op } S_U \text{ en } v_1 \in H^1(G).$$

Hierdie tipe probleem word in [23II, p 39ff] numeries opgelos.

2.11.4. Starre Viskeuse - Plastiese Bingham vloeistowwe [19, Hfs. VI].

Aanvaar die vloeistof is onsaamdrukbaar;

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{2.52}$$

Indien die digtheid ρ op 'n sekere tydstip onafhanklik van die ruimtelike veranderlikes is, dan volg uit die massa-behoudwet, $d\rho/dt = 0$ dat ρ 'n konstante, sê, 1 geneem kan word.

Vir 'n Bingham vloeistof geld

$$\sigma_{ij} D_{ij} = 2g\sqrt{D_{II}} + 4\mu D_{II}, \tag{2.53}$$

$$\text{waar} \quad D_{II} = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij} \text{ en } D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{2.54}$$

Differensiasie van (2.53) met betrekking tot D_{ij} lewer

$$2\,\sigma_{ij} = -\,2\,p\,\delta_{ij} + 2\,g\,D_{ij}/\sqrt{D_{II}} + 4\,\mu\,D_{ij}, \tag{2.55}$$

waar $\sigma_{ii} = -\,3\,p$ en $D_{ii} = \mathrm{div}\,v = 0$. Die faktor 2 in (2.55) is 'n gevolg van die simmetrie van σ_{ij} en D_{ij}.

Stel $\sigma_{II} = \frac{1}{2}\sigma^D_{ij}\,\sigma^D_{ij}$, $\sigma^D_{ij} = \sigma_{ij} + p\,\delta_{ij}$.

Dan is $\sigma_{II} = \frac{1}{2}[\,g + 2\,\mu\sqrt{D_{II}}\,]^2\,D_{ij}\,D_{ij}/D_{II}$

$$= [\,g + 2\,\mu\sqrt{D_{II}}\,]^2 \tag{2.56}$$

Nou volg uit (2.55) en (2.56)

$$D_{ij} = \sigma^D_{ij}\sqrt{D_{II}}\;/\;[\,g + 2\,\mu\sqrt{D_{II}}\,]$$

$$= \sigma^D_{ij}\,[\,\sqrt{\sigma_{II}} - g\,]/(2\,\mu\sqrt{\sigma_{II}}\,)$$

$$= \frac{1}{2\mu}\,[\,1 - g/\sqrt{\sigma_{II}}\,]\,\sigma^D_{ij}. \tag{2.57}$$

Die samestellingsvergelykings vir 'n Bingham vloeistof volg as:

$$\begin{aligned} \sigma_{II}^{\frac{1}{2}} &< g \text{ impliseer } D_{ij} = 0 \\ \sigma_{II}^{\frac{1}{2}} &\geqslant g \text{ impliseer } D_{ij} = \frac{1}{2\mu}\,[\,1 - g/\sigma_{II}^{\frac{1}{2}}\,]\,\sigma^D_{ij}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

<u>Opmerking</u> Volgens (2.56) is $\sigma_{II}^{\frac{1}{2}} \geqslant g$. Gevolglik geld (2.57) slegs in dié geval.

2.11.5. <u>Laminêre vloei in 'n pyp</u> [19, p 282]

Die generators van die pyp is ewewydig aan die x_3 as. Met laminêre vloei word bedoel dat die snelhede ewewydig aan die generators van die silinder is. Die stasionêre laminêre vloei van 'n Bingham vloeistof, in 'n silindriese pyp word bestudeer. 'n Drukverlies langs die pyp word veronderstel.

Laat $G \subset R^2$ die dwarsdeursnee van die pyp voorstel. Die vloei tussen $x_3 = 0$ en $x_3 = L$ word bestudeer. Die druk by $x_3 = 0$ en $x_3 = L$ word gegee: $p(0) = 0$ en $p(L) = -cL$.

Aanvaar $v = 0$ op $S \times [0,L]$; S is die rand van G. Die snelheidsveld word gegee deur $(0,0,v)$ en v is onafhanklik van x_3.

Die spanningstensor het die vorm

$$\begin{bmatrix} -p & 0 & \sigma^D_{13} \\ 0 & -p & \sigma^D_{23} \\ \sigma^D_{13} & \sigma^D_{23} & -p \end{bmatrix}$$

Aangesien $dv_i/dt = 0 = f_i$, volg uit (2.35)

$$\partial_1 p = 0, \quad \partial_2 p = 0, \quad \partial_3 p = \sigma^D_{31,1} + \sigma^D_{32,2}.$$

Die linkerkant van die derde vergelyking hierbo is 'n funksie van slegs x_3, terwyl die regterkant onafhanklik van x_3 is. Gevolglik is

$$p(x_3) = -cx_3 \text{ en } \sigma^D_{31,1} + \sigma^D_{32\ 2} + c = 0. \qquad (2.59)$$

$$\text{en} \quad \sigma^D_{3i} = g\ D_{3i}/D^{\frac{1}{2}}_{II} + 2\mu\ D_{3i} \qquad i = 1,2$$

$$\text{as} \quad D_{II} \neq 0, \quad D_{II} = D^2_{31} + D^2_{32} \tag{2.60}$$

2.11.6. Variasie-ongelykheid [19, p 317]

Veronderstel die snelheidsveld $u = u(x) \in R$ is 'n (klassieke) oplossing van (2.59), (2.60). Dan is u 'n oplossing van

$$\mu\, a(u, v-u) + g\, j(v) - g\, j(u) \geq (c, v-u) \text{ vir alle}$$
$$v \in H^1_0(G) \tag{2.61}$$

waar
$$a(u,v) = \int_G \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx,$$
$$j(v) = \int_G |\operatorname{grad} v|\, dx$$
en
$$(f,v) = \int_G f\, v\, dx.$$

Bewys

Deur (2.59) met $v - u$ te vermenigvuldig en parsiële integrasie uit te voer, volg

$$-\int_G \sigma^D_{3i}(v-u)_i + (c, v-u) = 0.$$

Aangesien $D_{3i} = \frac{1}{2}\partial_i u$ volg uit (2.60)

$$\mu \int_G \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}(v-u)\, dx + g \int_G \frac{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}(v-u)}{|\operatorname{grad} u|}\, dx$$
$$= (c, v-u).$$

aangesien $|\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v| \leq |\operatorname{grad} u|\ |\operatorname{grad} v|$ volg (2.61).

2.11.7. Opmerkings

a. In [23I, pp 23-24] word aangetoon dat indien u 'n oplossing is van (2.61), dan bestaan daar 'n $m = \{m_1, m_2, \ldots m_n\}$ sodanig dat

$$
\begin{aligned}
&|m| \leqslant 1 \quad \text{byna oral in } G, \\
&m \cdot \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u| \text{ byna oral in } G \\
&-\Delta u - g \operatorname{div} m = f \quad \text{in} \quad G \\
&\qquad u = 0 \quad \text{op} \quad S
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

b. Deur (2.62) met (2.2) te vergelyk word gesien dat $-\Delta u$ die divergensie van 'n vloed en m kontinue kontakbronne [43, p 4] verteenwoordig.

c. As u 'n oplossing is van (2.62) dan is dit ook 'n oplossing van (2.61).

d. [19, p 280] Indien $g = 0$ in (2.58) word (2.58) die samestellingsvergelykings vir 'n klassieke, viskeuse, onsaamdrukbare vloeistof (Newtonse vloeistof). Uit (2.58) kan gesien word dat 'n Bingham vloeistof soos 'n starre liggaam beweeg, indien 'n sekere funksie – $\sigma_{II}^{\frac{1}{2}}$ – van die spanningtensor kleiner as 'n gegewe waarde is.

e. Verdere toepassings en inligting kan in [19] verkry word.

f. Indien K 'n konvekse geslote deelversameling van 'n Banachruimte X is en $f(v) = \begin{cases} 0 & \text{as } v \in K \\ +\infty & \text{andersins} \end{cases}$

dan is $f \in \Gamma_0(X)$ en (2.32) word $u \in K$: $(Tu - w, v - u) \geqslant 0$ vir alle $v \in K$.

HOOFSTUK 3

BESTAANSTELLINGS EN REGULARITEITSRESULTATE VIR VARIASIE-ONGELYKHEDE

Opsomming en doel van hierdie hoofstuk

Stelling 3.1.10 lewer 'n resultaat, soortgelyk aan dié van Stelling 2.10.3. Daar is egter 'n paar klein verskille, ten opsigte van die voorwaardes wat vereis word. Daarenteen verskil die bewyse van die twee stellings wesenlik van mekaar. In [10] word 'n Lemma van Minty [38] gebruik om 'n sekere bestaanstelling vir Variasie-ongelykhede te bewys. Sover die literatuur nagegaan is, is daar nie voortgebou op die benadering in [10] nie. In paragraaf 3.1 word die stelling in [10] veralgemeen, deur 'n verslapping van die begrip koërsief, naamlik uiteindelik-positief, sien definisie 3.1.3, in te voer en die Lemma van Minty te gebruik.

In paragraaf 3.2 word 'n nuwe raamwerk geskep waarin probleme geformuleer word. Daar sal ook gesien word dat daar operatore bestaan wat uiteindelik-positief is, maar nie koërsief nie. Die bestaanstellings in §3.1 kan in die raamwerk van §3.2 gebruik word.

In paragraaf 3.3 word twee voorbeelde kortliks genoem en twee regulariteitstellings word in §3.4 bewys, alvorens die twee voorbeelde interpreteer kan word.

Die doel van hierdie hoofstuk is nie om 'n volledige bespreking van bestaan- en regulariteitstellings te gee nie. Paragraaf 3.1 en 3.4 toon watter tipe wiskundige argumente benodig word en §3.2 vergemaklik die benadering tot regulariteit in die sin dat die Sobolevruimtes H^{-s} met $s > 0$ nie gebruik hoef te word nie en dat sekere afgeleides moet bestaan, op grond van die formulering van die probleem.

3.1. Variasierekening en die teorie van monotone (nielineêre) operatore in Banachruimtes.

3.1.1. Voorbeelde van monotone operatore

Die lineêre operator A gegee deur $(Au,v) = a(u,v)$, waar $a(\cdot,\cdot)$ 'n kontinue bilineêre vorm op H is, is duidelik monotoon indien $\hat{a}(u) \geqslant 0$ op H. Dit is hemikontinu aangesien dit lineêr is en begrens. Volgens [34, Prop 2.5, p 179] is dit pseudo-monotoon.

In [13] word "kwasi-lineêr elliptiese" operatore van die vorm

$$Au = \Sigma_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} D^{\beta}(a_{\alpha\beta}(x,u, \ldots D^{m}u)D^{\alpha}u) \qquad (3.1)$$

in die raamwerk van monotone operatore bestudeer.

In [40, p 553] word die operator

$$Au = \Sigma_{|\alpha|\leqslant m} D^{\alpha}A_{\alpha}(x,u, \ldots, D^{m}u) \qquad (3.2)$$

in dieselfde raamwerk bestudeer. In verwysings [7] en [25] van bogenoemde artikel [40], word die eienskappe van hierdie operatore ondersoek.

Die operator

$$Au = -\, \partial_i (|\partial_i u|^{p-2} \partial_i u) \tag{3.3}$$

word weer in [34, p 156] gebruik.

3.1.2. Afspraak

In hierdie hoofstuk dui X 'n (reële) refleksiewe Banachruimte, met duaal X^* aan. Die paring tussen X^* en X word aangedui deur

$$(w,x) \text{ vir } w \in X^* \text{ en } x \in X.$$

Verdere notasie en definisies is soos in 2.10.1.

3.1.3. Definisies

a. 'n Operator $A: D(A) \subset X \to X^*$ heet uiteindelik-positief as vir elke ry $\{x_n\} \subset D(A)$ met $\|x_n\| \to \infty$ daar 'n n_o bestaan sodanig dat

$$(Ax_n, x_n) > 0 \text{ vir alle } n \geqslant n_o.$$

b. Laat $G \subset X \times X^*$ 'n versameling wees. G heet monotoon as vir $\{u,w\}$ en $\{u_1,w_1\} \in G$

$$(w - w_1, u - u_1) \geqslant 0.$$

G is maksimaal monotoon as dit monotoon is en as $G \subset H$ met H monotoon, dan is $H = G$.

Opmerkings. Dit is duidelik dat koërsiewe operatore uiteindelik positief is.

Monotoniteit en maksimaal-monotoniteit is gedefinieer in [10].

3.1.4. Lemma [10]

Laat K 'n konvekse geslote deelversameling van X wees en $0 \in K^{\circ}$. (K° is die inwendige van K.) As A hemikontinu en monotoon is en $K \subset D(A)$, dan is

$$G = \{\{u,w\} \in X \times X^* : u \in K,\ w = Au + z \quad \text{en}$$

$$(z, u - v) \geqslant 0 \quad \text{vir alle} \quad v \in K\}$$

maksimaal montoon in $X \times X^*$.

Bewys. Die bewys word volledigheidshalwe uit [10] aangehaal.

G is monotoon want $\{u,w\}$ en $\{u_1,w_1\} \in G$ impliseer

$$(w - w_1, u - u_1) = (Au - Au_1,\ u - u_1) + (z, u - u_1) + (z_1, u_1 - u) \geqslant 0,$$

waar z en z_1 is soos bepaal deur die definisie van G.

Laat $\{u_0,w_0\} \in X \times X^*$ en

$$(w_0 - w,\ u_0 - u) \geqslant 0 \text{ vir alle } \{u,w\} \in G. \qquad (3.4)$$

As $u_0 \notin K$ dan is $u_0 = s v_0$ met $v_0 \in \partial K$ = die rand van K en $s > 1$, aangesien $K = \overline{K^{\circ}}$ volgens stelling 2 in die bylaag. Laat $z_0 \neq 0$, $z_0 \in X^*$ wees soos in stelling 3 van die bylaag. Dan is $(z_0, v_0 - v) \geqslant 0$ vir alle $v \in K$. $0 \in K^{\circ}$ impliseer $(z_0, v_0) > 0$. Vir $t > 0$ is $\{v_0, Av_0 + tz_0\} \in G$ en volgens (3.4) is

$$0 \leqslant (w_0 - Av_0 - tz_0, u_0 - v_0) = (s - 1)(w_0 - Av_0 - tz_0, v_0).$$

Aangesien $s - 1 > 0$ volg

$$t(z_o,v_o) \leqslant (w_o - Av_o,v_o),$$

wat 'n teenstrydigheid lewer wanneer $t \to \infty$.

Die aanname $u_o \notin K$ lewer 'n teenstrydigheid, gevolglik moet $u_o \in K$.

Indien $u \in K$ dan is $\{u,Au\} \in G$ en volgens (3.4) is

$$(Au - w_o,u - u_o) = (w_o - Au,u_o - u) \geqslant 0. \qquad (3.5)$$

Aangesien $u_t = tv + (1-t)u_o \in K$ as $0 \leqslant t \leqslant 1$ en $v \in K$, volg uit (3.5) na deling met t

$$(Au_t - w_o,v - u_o) \geqslant 0, \quad t > 0, \quad v \in K.$$

Deur t na nul te laat neig, volg op grond van die hemikontinuïteit van A dat

$$(Au_o - w_o, v - u_o) \geqslant 0, \ v \in K. \qquad (3.6)$$

Deur $z = w_o - Au_o$ te stel in 3.6, volg $(z,u_o - v) \geqslant 0$ vir alle $v \in K$. Dit is nou duidelik dat $\{u_o,w_o\} \in G$ en die Lemma is bewys.

3.1.5. Lemma

Laat H 'n (reële) Hilbertruimte wees, met inwendige produk $((\cdot,\cdot))$. Vir $f \in H^*$, laat $J : H^* \to H$ voldoen aan $(f,v) = ((v,Jf))$ vir $v \in H$ (sien definisie 4.4.7, hoofstuk 4). Laat

A en K wees soos in Lemma 3.1.4.

Die versameling

$$M = \{\{u,w\} \in H \times H : u \in K,\ w = Tu + z \text{ en } ((z, u - v)) \geq 0 \text{ vir alle } v \in K\}$$

met $T = JA$, is maksimaal monotoon.

Bewys.

T is monotoon aangesien A monotoon en J lineêr is. Om te bewys dat M maksimaal is, veronderstel $\{u_o,w_o\} \in H \times H$ voldoen aan

$$((w_o - w, u_o - u)) \geq 0 \text{ vir alle } \{u,w\} \in M. \qquad (3.7)$$

Daar bestaan 'n $w_o^* \in H^*$ sodanig dat $w_o = Jw_o^*$. Laat $\{u,w^*\} \in G$ (Lemma 3.1.4.) en stel

$$w = Jw^* .$$

Aangesien J lineêr is, volg $\{u,w\} \in M$ en uit (3.7) is

$$(w_o^* - w^*, u_o - u) = ((w_o - w, u_o - u)) \geq 0.$$

Gevolglik is $\{u_o,w_o^*\} \in G$ en $\{u_o,w_o\} \in M$, waarmee die Lemma bewys is.

3.1.6. Lemma

Laat H, A en K soos in Lemma 3.1.5. wees.

As A uiteindelik positief is, dan bestaan daar 'n w sodanig dat

$$w \in K: (Aw, v - w) \geq 0 \quad \text{vir alle} \quad v \in K.$$

Bewys.

Die basiese idee kom uit [10], maar is aangepas vir die situasie van uiteindelik-positiewe operatore.

Die versamelings $nM = \{\{u,nw\}:\{v,w\} \in M\}$ is maksimaal monotoon volgens Lemma 3.1.5. Volgens [38, Th3, p 343] bestaan daar

$$\{u_n,w_n\} \in M \quad \text{sodanig dat}$$
$$u_n + nw_n = 0 \quad \text{en}$$

$$w_n = Tu_n + z_n \quad \text{met} \quad ((z_n,u_n - v)) \geqslant 0 \text{ vir alle } v \in K.$$

Aangesien $0 \in K$ volg $((z_n,u_n)) \geqslant 0$ en gevolglik is

$$0 \geqslant -((u_n,u_n))/n = ((w_n,u_n)) = ((Tu_n,u_n)) + ((z_n,u_n)) \geqslant ((Tu_n,u_n)). \tag{3.8}$$

Aangesien A uiteindelik-positief is, moet die ry $\{u_n\}$ begrens wees, andersins lewer (3.8) 'n teenstrydigheid.

Gevolglik $\|w_n\| = \|u_n\|/n \leqslant N/n \to 0$ en 'n sekere deelry van $\{u_n\}$, weer aangedui met $\{u_n\}$, konvergeer swak na $u : u_n \rightharpoonup u \in K$.

Vir elke $v \in K$ is $\{v,Tv\} \in M$ en dus is

$$((Tv - w_n, v - u_n)) \geqslant 0.$$

Deur $n \to \infty$ toe te pas op die laaste ongelykheid volg $((Tv - 0, v - u)) \geqslant 0$ vir elke $v \in K$.

Aangesien A hemikontinu is volg

$$(Au, v - u) \geqslant 0 \quad \text{vir alle} \quad v \in K,$$

net soos in (3.6) by Lemma 3.1.4.

3.1.7. Lemma

Lemma 3.1.6. is waar indien $H = X$, 'n (reële) Refleksiewe Banachruimte is.

Bewys. Die argument waarin oorgegaan word van Hilbertruimtes na refleksiewe Banachruimtes is ontleen aan [10,12].

Vir elke eindigdimensionale deelruimte $F \subset X$ laat

$$K_F = K \cap F,$$

$$j_F : F \to X, \quad \text{die inbedding afbeelding,}$$

$$j_F^* : X^* \to F^* \text{ die duaal van } j_F,$$

en

$$T_F = j_F^*(A/K_F) : K_F \to F^*.$$

T_F is uiteindelik-positief want $\|x_n\| \to \infty$, met $x_n \in K_F = D(T_F)$ impliseer

$$(T_F(x_n), x_n) = (Ax_n, x_n) > 0 \quad \text{vir}$$

alle n groot genoeg.

Dit is maklik om te sien dat T_F hemikontinu en monotoon is.

Aangesien 'n Hilbertruimtestruktuur vir elke F hierbo bestaan, bestaan daar volgens Lemma 3.1.6. 'n $u_F \in K_F$ sodanig dat

$$(T_F\, u_F\,,\, u_F - v) \leqslant 0 \quad \text{vir alle } v \in K_F. \tag{3.9}$$

Aangesien $0 \in K_F$ volg $(Au_F, u_F) = (Tu_F, u_F) \leqslant 0$ uit (3.9) en die ry $\{u_F\}$ is begrens.

Laat $$V_{F_1} = \cup_{F_1 \subset F} \{u_F\}. \tag{3.10}$$

Soos in [12] word gesien dat die versamelings V_{F_1} die eindige deursnee eienskap het. Aangesien die ry $\{u_F\}$ begrens is, bestaan daar 'n $R > 0$ sodanig dat elke V_{F_1} in die swak kompakte bal $B_R = \{u \in X : \|u\| \leqslant R\}$ lê. (Sien byvoorbeeld [18, Th 7, p 425]).

Volgens [18, Lemma 6, p 17] is $\cap W_F \neq \{\ \}$, waar W_F die swak afsluiting van V_F aandui.

Gevolglik bestaan daar 'n $u \in K$ met $u \in \cap W_F$. (K is geslote en konveks en gevolglik swak geslote, sodat $u \in K$. [44, Th 3.12, p 64.])

Laat $v \in K$ en F_1 só groot dat $v \in F_1$. Laat $u_F \in V_{F_1}$.
Dan is uit die monotoniteit van A en uit 3.9

$$(Av, v - u_F) \geqslant (Au_F, v - u_F) \geqslant 0. \tag{3.11}$$

Deur in aanmerking te neem dat $u_F \in V_{F_1}$ vir elke $F \supset F_1$ en aangesien $u \in \cap W_F$ volg uit (3.11) dat

$$(Av, v - u) \geqslant 0.$$

Soos in vergelyking (3.6) volg

$$(Au, v - u) \geqslant 0$$

aangesien A hemikontinu is. Omdat $v \in K$ willekeurig is, is die Lemma nou bewys.

3.1.8. Lemma

Laat $0 \in K$, K 'n konvekse en geslote deelversameling in X. Laat A hemikontinu en monotoon wees. Veronderstel daar bestaan 'n oop $W_o \subset X$ met

$$K \subset W_o \subset \overline{W_o} \subset D(A).$$

Gestel A is uiteindelik-positief. Dan bestaan daar 'n

$$u \in K : (Au, v-u) \geqslant 0 \quad \text{vir alle} \quad v \in K.$$

Bewys.

As V oop is in X, dan is $K + V = \cup_{k \in K}[k+V]$ oop. As V boonop konveks is, dan is $K + V$ oop en konveks.

Laat vir elke oop konvekse $W \subset X$ met $K \subset W \subset W_o$, u_W 'n oplossing wees van

$$u_W \in \bar{W} : (Au_w, v - u_w) \geqslant 0 \quad \text{vir alle } v \in \bar{W},$$

soos deur Lemma (3.1.7) gegee.

Aangesien $0 \in W$ is $(Au_w, u_w) \leqslant 0$ en $\{u_w\}$ is begrens, aangesien A uiteindelik positief is.

Laat $K_{W_1} = \cup_{K \subset W \subset W_1} \{u_w\}$ vir

$$K \subset \bar{W}_1 \subset W_o.$$

$\{K_{W_1}\}$ het die eindige deursnee eienskap en

$$K_{W_1} \subset B_R \text{ vir geskikte } R > 0 \quad \text{en } B_R$$

soos in Lemma 3.1.7.

Laat U die snyding van die swak afsluitings van elke K_{W_1} wees. Soos in Lemma 3.1.7. volg dat daar 'n $u \in U$ bestaan. As $u \notin K$ dan bestaan daar 'n W_1 met $u \notin \bar{W}_1$, W_1 oop, konveks en $K \subset W_1$, [44, Th 1.10, p 9]. In dié geval is u nie in die swak afsluiting van K_{W_1} nie. Dit is strydig met $u \in U$ en gevolglik is $u \in K$.

Laat

$$S = \{x \in X : (Av, v-x) \geqslant 0 \quad \text{vir alle } v \in K\}.$$

S is geslote en konveks en $K_{W_1} \subset S$. Hieruit volg dat $u \in U \subset S$ en

$$(Av, v-u) \geqslant 0 \text{ vir alle } v \in K.$$

Soos voorheen (toe 3.6 verkry is) volg dat

$$(Au, v-u) \geqslant 0 \text{ vir alle } v \in K.$$

3.1.9. Stelling.

Laat K 'n konvekse geslote deelversameling in X wees met $x \in K$. Gestel A is hemikontinu en monotoon en daar bestaan 'n oop konvekse $W_o \subset X$ met $K \subset W_o \subset \bar{W}_o \subset D(A)$. Laat $w \in X^*$ en $(Au-w, u-x) > 0$ as $\|u\| \to \infty$. Dan bestaan daar 'n u sodanig dat

$$u \in K : (Au, v-u) \geqslant (w, v-u) \quad \text{vir alle } v \in K.$$

Bewys.

Stel $K_x = K - x$ en $A_o(u-x) = Au - w$ vir $u \in K$.

A_o is duidelik hemikontinu en monotoon.

$$D(A_o) = D(A) - x \supset \bar{W}_o - x \supset W_o - x \supset K_x.$$

Aangesien $0 \in K_x$ en vir enige ry $\{u_n\}$ met $\|u_n\| \to \infty$

$$(A_o(u_n - x),\ u_n - x) = (Au_n - w,\ u_n - x) > 0$$

vir alle n groot genoeg,

volg uit Lemma 3.1.8. dat daar 'n $u \in K$ bestaan met

$$(A_o(u - x),\ v - x - (u - x)) \geqslant 0 \quad \text{vir alle } v \in K.$$

Dus is $(Au - w,\ v - u) \geqslant 0$ vir alle $v \in K$.

3.1.10. Stelling

Laat $J \in \Gamma_o(X)$ *en* $w \in X^*$. A *is 'n hemikontinue, monotone operator en daar bestaan 'n oop konvekse* $W \subset X$ *met* $D(J) \subset W \subset \bar{W} \subset D(A)$. *Gestel daar bestaan 'n* $x \in D(J)$ *sodanig dat*

$$(Au - w, u - x) + J(u) - J(x) > 0 \text{ as } \|u\| \to \infty.$$

Dan bestaan daar 'n

$$u \in D(J) : (Au - w, v - u) + J(v) - J(u) \geqslant 0 \quad \textit{vir alle} \quad v.$$

Bewys. Die argumente van [34, p 252] word gevolg.

Laat $V = X \times R$ en $V^* = X^* \times R$ en $\langle\{w,s\},\{u,t\}\rangle = (w,u) + st$ 'n paring tussen V en V^* wees met $\{u,t\} \in V$ en $\{w,s\} \in V^*$. Die versameling

$$K = \{\{u,t\} : J(u) \leqslant t\}$$

is konveks en geslote aangesien J konveks en onderhalf-kontinu is.

Laat $\tilde{A}(\tilde{v}) = \{Av, 0\}$ vir $\tilde{v} = \{v, s\}$,

$\tilde{f} = \{w, -1\}$ en $\tilde{x} = \{x, J(x)\}$.

$\tilde{A}$ is hemikontinu en monotoon en $\tilde{f} \in V^*$.

$$\tilde{x} \in K \subset D(J) \times R \subset W \times R \subset \bar{W} \times R \subset D(A) \times R = D(\tilde{A}).$$

Laat $\tilde{u} = \{u, t\}$.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}(\tilde{u}) - \tilde{f}, \tilde{u} - \tilde{x} \rangle &= (Au - w, u - x) + t - J(x) \\ &\geq (Au - w, u - x) + J(u) - J(x) \\ &> 0 \quad \text{as} \quad \|u\| \to \infty. \end{aligned} \tag{3.12}$$

$|\{u,t\}| = \|u\| + |t|$ definieer 'n norm in V.

Volgens (3.12) impliseer $|\tilde{u}| \to \infty$ dat

$$\langle \tilde{A}(\tilde{u}) - \tilde{f}, \tilde{u} - \tilde{x} \rangle > 0.$$

Al die voorwaardes van Stelling 3.1.9. word bevredig en dus bestaan daar

$$\{u,t\} \in K : \ (Au - w, v - u) + s - t \geq 0 \quad \text{vir alle}$$

$$\{v,s\} \in K.$$

Dus volg aangesien $\{v, J(v)\} \in K$ as $v \in D(J)$

$$(Au - w, v - u) + J(v) - t \geq 0 \text{ vir alle } v. \tag{3.13}$$

Deur $v = u$ in (3.13) te neem word gesien dat $t \leqslant J(u)$. Omdat $\{u,t\} \in K$ volg $t = J(u)$ en (3.13) impliseer

$$(Au - w, v - u) + J(v) - J(u) \geqslant 0 \quad \text{vir alle } v.$$

Aangesien $J \not\equiv +\infty$ volg $u \in D(J)$.

3.2. Hilbertruimtes geassosieer met tweede-orde elliptiese operatore.

Laat $Lu = -D_i(a_{ij}D_ju) + a_ou$ (3.14)

'n elliptiese operator met koërsiewe kontinue bybehorende bilineêre vorm

$$a(u,v) = \int_G (a_{ij}D_ju\,D_iv + a_ouv)dx \tag{3.15}$$

wees.

Laat $$(((u,v)))_o = (Lu,Lv) + ((u,v))_1 \tag{3.16}$$

en $$|||v|||_o = (((v,v)))^{\frac{1}{2}}, \tag{3.17}$$

waar $(\cdot,\cdot)$ en $((\cdot,\cdot))_1$ onderskeidelik die gebruiklike $L^2(G)$ en $H^1(G)$ inwendige produkte aandui.

$$[f,g] = \int_S fgdS \text{ as } f,g \in L^2(S).$$

Veronderstel G voldoen aan die voorwaardes wat na 1.3.2d volg.

3.2.1. Stelling

Laat $V = \{v \in H^1(G) : Lv \in L^2(G)\}$. (3.18)

Tensy anders gespesifiseer is al die koëffisiënte van L in

$H^{r+1}(G)$, waar $r > n/2$ 'n heelgetal is.

a. Die ruimte $\langle V, (((\cdot,\cdot)))_o \rangle$, aangedui met V_o, is 'n Hilbertruimte.

b. As al die koëffisiënte van L in $C^\infty(\bar{G})$ is, dan is $C^\infty(\bar{G})$ dig in V_o. As al die koëffisiënte van L in $H^{r+1}(G)$ is, dan is $C^2(\bar{G})$ dig in V_o.

c. Die konormale afgeleide T_1, gedefinieer deur

$$T_1 u = a_{ij} D_j u n_i \quad \text{vir} \quad u \in C^\infty(\bar{G}), \tag{3.19}$$

waar $n = \{n_i\}$ die eenheids uitwaartse normaal op S is, kan uitgebrei word tot V en die uitbreiding, wat weer met T_1 aangedui word, voldoen aan:

$$T_1 : V \to L^2(S) \quad \text{is surjektief},$$

T_1 is 'n kontinue afbeelding van V_o na die swak topologie van $L^2(S)$.

d. Die probleem

$$\begin{aligned} u \in V : \quad & Lu = f \quad \text{in} \quad G \\ & T_1 u = g \quad \text{op} \quad S \,, \end{aligned} \tag{3.20}$$

vir $f \in L^2(G)$ en $g \in L^2(S)$, is uniek oplosbaar.

e. Vir elke $u \in V$ is

$$(Lu,w) = a(u,w) - [T_1 u, T_o w] \quad \text{as} \quad w \in H^1(G). \tag{3.21}$$

Bewys.

a. As $\{v_n\}$ 'n Cauchyry in V_o is, dan bestaan daar 'n

$$g \in L^2(G) \quad \text{en 'n } u \in H^1(G),$$

sodanig dat

$$Lv_n \to g \quad \text{in} \quad L^2(G)$$

en

$$v_n \to v \quad \text{in} \quad H^1(G).$$

In distribusiesin [44, Hfs 6], [47] volg vir $w \in C_o^\infty(G)$

$$< Lv_n, w > = < v_n, L^*w > \to < v, L^*w >$$
$$= < Lv, w >.$$

Ook is

$$< Lv_n, w > = \int_G Lv_n w dx \to \int_G gwdx$$
$$= < g, w > .$$

Gevolglik is $Lv = g \in L^2(G)$ en

$$|||v_n - v|||_o \to 0,$$

waarmee punt a bewys is.

b. Veronderstel eerstens a_{ij} en $a_o \in C^\infty(\bar{G})$.

Laat $u \in V$ gegee wees.

Volgens [35, Th 9.3, p 41] bestaan daar 'n ry $\{u_n\} \subset C^\infty(\bar{G})$ met die eienskap

$$u_n \to u \quad \text{in} \quad H^1(G), \tag{3.22}$$

asook 'n ry $\{f_n\} \subset C^\infty(\bar{G})$ met die eienskap

$$f_n \to f = Lu \quad \text{in } L^2(G). \tag{3.23}$$

Laat

$$\left.\begin{aligned} Lw_n &= f_n - Lu_n && \text{in } G \\ T_o w_n &= 0 && \text{op } S. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Dit is welbekend dat probleem (3.24) 'n eenduidige oplossing het, aangesien $a(\cdot,\cdot)$ koërsief op $H_o^1(G)$ is. (Sien byvoorbeeld [22, Th 14.1, p 41], en [22, Th 17.2, p 67] waarvolgens $w_n \in H_o^1(G) \cap H^2(G)$.)

Aangesien die koëffisiënte van L in $C^\infty(\bar{G})$ is en $f_n \in C^\infty(\bar{G})$ volg uit [35, Prop. 5.3 p 162] dat

$$w_n \in C^\infty(\bar{G}).$$

Gevolglik voldoen $v_n = w_n + u_n$ aan

$$\begin{aligned} v_n \in C^\infty(\bar{G}) : Lv_n &= f_n \text{ in } G \\ T_o v_n &= T_o u_n \text{ op } S. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nou word aangetoon dat $v_n \to u$ in V.

$$\begin{aligned} c\| v_n - u_n \|_1^2 \leqslant \hat{a}(v_n - u_n) &= a(v_n, v_n - u_n) - a(u_n, v_n - u_n) \\ &= (Lv_n, v_n - u_n) - a(u_n, v_n - u_n) \quad \text{uit (3.25)} \\ &\leqslant (\| f_n \|_o + \| u_n \|_1) \| v_n - u_n \|_1 \end{aligned}$$

Dus $c\| v_n - u_n \|_1 \leqslant \| f_n \|_o + \| u_n \|_1 \leqslant M$ (sê) want

$$u_n \to u \text{ in } H^1(G) \text{ en } f_n \to f \text{ in } L^2(G).$$

Aangesien $u_n \to u$ in $H^1(G)$ is die ry $\{v_n\}$ begrens $(c\|v_n\|_1 \leqslant c\|v_n - u_n\|_1 + c\|u_n\|_1 < M)$ en 'n deelry, weer aangedui met $\{v_n\}$ is swak konvergent:

$$v_n \rightharpoonup \chi \quad \text{(swak)} \quad \text{in } H^1(G). \tag{3.26}$$

Uit [35, Th 16.1, p 99] volg

$$v_n \to \chi \text{ in } L^2(G).$$

Aangesien $T_o v_n - T_o u_n = 0$ volgens (3.25), volg

$$\begin{aligned} a(v_n - u, v_n - u_n) &= (Lv_n - Lu, v_n - u_n) \\ &= (f_n - f, v_n - u_n) \\ &\to 0, \text{ want } f_n \to f \text{ in } L^2(G) \\ &\qquad \text{en } v_n - u_n \to \chi - u \text{ in } L^2(G). \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} \text{Nou volg } \quad 0 &= \lim a(v_n - u, v_n - u_n) \\ &= \lim\inf \hat{a}(v_n) + \lim\{a(v_n, -u_n) - a(u, v_n - u_n)\} \\ &\geqslant \hat{a}(\chi) + a(\chi, -u) - a(u, \chi - u) \\ &= \hat{a}(\chi - u) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Gevolglik is $\chi = u$ en

$$\begin{aligned} & v_n \rightharpoonup u \text{ (swak) in } H^1(G) \\ & v_n \to u \text{ in } L^2(G). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Verder volg

$$\hat{a}(v_n - u) = a(v_n - u, v_n - u_n) + a(v_n - u, u_n - u)$$

$$\to 0 \quad \text{volgens} \quad (3.27),\ (3.28) \text{ en } (3.22).$$

Aangesien $a(\cdot,\cdot)$ koërsief op $H^1(G)$ is volg

$$v_n \to u \text{ in } H^1(G).$$

Die ry $\{v_n\}$ is so gekies dat

$$Lv_n = f_n \to f = Lu \text{ in } L^2(G).$$

Hiermee is bewys dat $|||v_n - u|||_o \to 0.$ (3.29)

$C^\infty(\bar{G})$ is dus dig in V_o as die koëffisiënte van L glad is.

Tweedens word aanvaar dat die koëffisiënte van L almal in $H^{r+1}(G)$ is, waar $r > n/2$ 'n heelgetal is.

Aangesien $f_n - Lu_n \in H^r(G)$ (sien 3.24) volg uit [22, Th 17.2, p 67] dat

$$w_n \in H^{2+r}(G).$$

Aangesien $2 + r > n/2 + 2$ volg uit Sobolev se Lemma (sien byvoorbeeld [35, Cor. 9.1, p 46]) dat $w_n \in C^2(\bar{G})$.

Gevolglik is $v_n = w_n + u_n \in C^2(\bar{G})$ en die bewys dat

$$v_n \to u \text{ in } V_o$$

is woordeliks identies aan die eerste deel van b.

c. Aangesien a_{ij} en $a_o \in H^{r+1}(G)$ volg (weereens uit Sobolev se Lemma [35, Cor 9.1, p 46])

$$a_{ij} \text{ en } a_o \in C^1(\bar{G}). \tag{3.30}$$

Laat $u \in V$ en $\{v_n\} \subset C^2(\bar{G})$ 'n ry wees met die eienskap

$$v_n \to u \text{ in } V_o,$$

in ooreenstemming met deel (b) van hierdie Stelling. Dit is duidelik dat

$$(Lv_n,w) + [T_1 v_n, T_o w] = a(v_n,w) \to a(u,w)$$

$$\text{vir elke } w \in C^\infty(\bar{G}).$$

Hieruit volg dat

$$[T_1 v_n, T_o w] \to a(u,w) - (Lu,w).$$

$\{T_1 v_n\}$ is dus 'n swak Cauchyry in $L^2(S)$

en is gevolglik swak konvergent, met swak limiet $g \in L^2(S)$.

$$\text{Gevolglik is } [g, T_o w] = a(u,w) - (Lu,w) \tag{3.31}$$

$$\text{vir elke } w \in C^\infty(\bar{G}).$$

Aangesien $C^\infty(\bar{G})$ dig is in $H^1(G)$,

$$T_o : H^1(G) \to H^{\frac{1}{2}}(S) \quad \text{kontinu is}$$

[35, Th. 8.3, p 39] en $||v||_o^S \leqslant ||v||_{\frac{1}{2}}^S$ geld (3.31) vir alle $w \in H^1(G)$.

Deur $T_1 u = g$ te definieer volg

$$(Lu,w) = a(u,w) - [T_1 u, T_o w] \quad \text{vir} \quad w \in H^1(G),$$

waarmee punt (d) van die Stelling bewys is.

Indien $w \in C^\infty(\bar{G})$ dan volg uit (3.21) dat

$$|[T_1 u, T_o w]| \leqslant M\{||u||_1 + ||Lu||_o\} ||w||_1$$

$$\leqslant \sqrt{2}\, M|||u|||_o \, ||w||_1 .$$

As $u_n \to u$ in V, dan sal $T_1 u_n \rightharpoonup T_1 u$ (swak) in $L^2(S)$ en die gevraagde kontinuïteit is aangetoon.

Om te bewys dat T_1 surjektief is, word die volgende bilineêre vorm op V benodig: $B(u,v) = (Lu,Lv) + a(u,v)$.

B is kontinu en koërsief op V_o (definisie 2.6.2) en met behulp van [35, Th. 8.3, p 39] kan gesien word dat die afbeelding

$$v \to (f, Lv + v) + [g, T_o v],$$

vir $f \in L^2(G)$ en $g \in L^2(S)$, kontinu is op V_o.

Volgens [22, Th. 14.1, p 41] het die probleem

$$u \in V : \; B(u,v) = [g, T_o v] + (f, Lv + v) \quad \text{vir alle} \quad v \in V$$

'n eenduidige oplossing. Met behulp van (3.21) word gesien dat

$$(Lu, Lv + v) + [T_1 u, T_o v] = (f, Lv + v) + [g, T_o v]$$

$$\text{vir elke } v \in V_o. \qquad (3.32)$$

Laat $y \in L^2(G)$. Aangesien die probleem

$$v \in H_o^1(G) : \; (v,w) + a(v,w) = (y,w) \quad \text{vir alle} \quad w \in H_o^1(G)$$

'n oplossing $v \in H_o^1(G) \cap H^2(G)$ het met die eienskap

$$v + Lv = y \text{ in } G \qquad [22, \text{ Th. } 17.2, \text{ p } 67]$$

volg

$$Lu = f \quad \text{vanaf } (3.32). \qquad (3.33)$$

Laat $h \in C^\infty(S)$. Volgens [35, Th. 8.3, p 39] bestaan daar 'n $v \in H^2(G) \subset V$ sodanig dat

$$T_o \, v = h.$$

Uit (3.32) en (3.33) volg nou

$$[T_1 u - g, h] = 0 \text{ vir elke } h \in C^\infty(S).$$

Aangesien $C^\infty(S)$ dig is in $L^2(S)$ volgens vergelyking (7.17) op bladsy 35 van [35] volg

$$T_1 u = g \quad \text{op} \quad S.$$

Die bewys is voltooi.

3.2.2. Stelling.

Laat $(((u,v)))_1 = (((u,v)))_o + [T_1 u, T_1 v]$ (3.34)

en $|||\, u \,|||_1 = (((u,u)))_1^{\frac{1}{2}}$ (3.35)

a. Die ruimte $< V, (((\cdot,\cdot)))_1 >$, aangedui met V_1, is 'n Hilbertruimte.

b. As die a_{ij} en a_o in $C^\infty(\bar{G})$ is, dan is $C^\infty(\bar{G})$ dig in V_1. As die a_{ij} en a_o in $H^{r+1}(G)$ is en $r > n/2$ is 'n heelgetal, dan is

$$C^2(\bar{G}) \text{ dig in } V_1.$$

Bewys

a. As $\{v_n\}$ 'n Cauchyry in V_1 is, dan is dit 'n Cauchyry in V_o. Volgens 3.2.1.a bestaan daar 'n $v \in H^1(G)$ met $Lv \in L^2(G)$, sodanig dat

$$Lv_n \to Lv \quad \text{in} \quad L^2(G)$$

$$\text{en} \qquad v_n \to v \quad \text{in} \quad H^1(G).$$

Verder is $\{T_1 v_n\}$ 'n Cauchyry in $L^2(S)$ en het dus 'n limiet $h \in L^2(S)$.

$$\begin{aligned} [h, T_o w] &= \lim\, [T_1 v_n, T_o w] \\ &= \lim\, \{a(v_n,w) - (Lv_n,w)\} \\ &= a(v,w) - (Lv,w) \quad \text{vir } w \in H^1(G). \end{aligned}$$

Gevolglik is $T_1 v = h = \lim T_1 v_n$ en

$$|||v_n - v|||_1 \to 0.$$

b. Laat $v \in V$. Volgens 3.2.1.b bestaan daar

$$\{u_n\} \subset C^k(\bar{G}) \quad \text{sodanig dat}$$

$$u_n \to v \quad \text{in} \quad H^1(G)$$

$$\text{en} \qquad Lu_n \to Lv \text{ in } L^2(G),$$

waar $k = \infty$ of 2 vir onderskeidelik $C^\infty(\bar{G})$ en $H^{r+1}(G)$ koëffisiënte van L.

Volgens 3.2.1.c volg $T_1 u_n \rightharpoonup T_1 v$ (swak) in $L^2(S)$. Aangesien die bilineêre vorm

$$B(u,v) = (Lu,Lv) + a(u,v) + [T_1 u, T_1 v] \tag{3.36}$$

kontinu en koërsief op V_1 is en

$$B(u_n,w) \to B(v,w)$$

volg uit [22, Th. 14.1, p 41] dat

$$u_n \rightharpoonup v \text{ (swak) } \quad \text{in} \quad V_1.$$

Volgens [44, Th. 3.13, p 65] bestaan daar eindige konvekse kombinasies

$$v_n = \Sigma \alpha_{nk} u_k$$

met die eienskap $v_n \to v$ in V_1.

Aangesien elke v_n 'n eindige kombinasie van die u_n is, volg $v_n \in C^k(\bar{G})$ en die bewys is voltooi.

3.2.3. Lemma

Die inbedding $H^{\frac{1}{2}}(S) \to L^2(S)$ is kompak.

Bewys.

Veronderstel $h_n \in H^{\frac{1}{2}}(S)$ en $h_n \rightharpoonup 0$ (swak) in $H^{\frac{1}{2}}(S)$.

Kies $u_n \in H^2(G)$ sodanig dat

$$\begin{aligned} -\Delta u_n + u_n = Lu_n &= 0 \quad \text{in } G \\ T_1 u_n &= h_n \quad \text{op} \quad S, \end{aligned} \tag{3.37}$$

waar Δ = Laplace operator en T_1 = normaal afgeleide op S.

Kies $v_n \in H^1(G)$ sodanig dat

$$\begin{aligned} T_o v_n = h_n \quad \text{en} \quad \|v_n\|_1 &\leq c\|h_n\|^S_{\frac{1}{2}} \quad , \quad [35, \text{ Th. } 8.3, \text{ p } 39] \\ &\leq M, \text{ want } \{h_n\} \text{ is swak konvergent.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = (Lu_n, v) &= ((u_n, v))_1 - [T_1 u_n, T_o v] \\ &= ((u_n, v))_1 - [h_n, T_o v] \end{aligned} \tag{3.38}$$

Aangesien $h_n \rightharpoonup 0$ (swak) in $H^{\frac{1}{2}}(S)$ volg

$u_n \rightharpoonup 0$ (swak) in $H^1(G)$ uit (3.38).

Volgens [35, Th. 16.1, p 99] volg $u_n \to 0$ in $L^2(G)$.

$$\begin{aligned} (\Delta u_n, \Delta v) + ((u_n, v))_1 &= (u_n, \Delta v) + [h_n, T_o v] \text{ volgens (3.37) en (3.38)} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Gevolglik $u_n \rightharpoonup 0$ (swak) in $H^2(G)$

en $u_n \to 0$ in $H^1(G)$, weereens volgens [35, Th. 16.1, p 99].

Uit (3.38) volg nou

$$\{\|h_n\|_o^S\}^2 = [h_n, T_o v_n] = ((u_n, v_n))_1 \leqslant M\|u_n\|_1 \to 0$$

Dus $\qquad h_n \to 0$ in $L^2(S)$.

3.2.4. Lemma

Veronderstel die voorwaardes in 3.2.1.b geld en $G \subset R^n$ met $n \geqslant 2$. Daar bestaan nie 'n konstante $c > 0$ sodanig dat

$$\|Lu\|_o^2 + \|u\|_1^2 \geqslant c\|u\|_2^2 \quad \text{vir alle} \quad u \in H^2(G),$$

nie.

Bewys.

Laat $g_n \in H^{\frac{1}{2}}(S)$ en veronderstel

$$g_n \rightharpoonup 0 \text{ in } H^{\frac{1}{2}}(S), \quad \text{maar } g_n \not\to 0.$$

(So 'n ry bestaan want $H^{\frac{1}{2}}(S)$ is oneindigdimensionaal as $n \geqslant 2$.)

Daar bestaan 'n deelry, weer aangedui met $\{g_n\}$ sodanig dat

$$\|g_n\|_{\frac{1}{2}}^S > \delta \quad \text{vir een of ander} \quad \delta > 0.$$

(Andersins bestaan daar vir elke deelry van $\{g_n\}$, g_{m_k} sodanig dat $\|g_{m_k}\|_{\frac{1}{2}}^S < 1/k$ en dan volg $g_n \to 0$ in $H^{\frac{1}{2}}(S)$.)

Laat $\qquad h_n = \dfrac{1}{\|g_n\|_{\frac{1}{2}}^S} g_n$.

Aangesien $1/\|g_n\|^S_{\frac{1}{2}} < \delta^{-1}$ volg $h_n \rightharpoonup 0$ in $H^{\frac{1}{2}}(S)$ en dus

$$h_n \to 0 \quad \text{in } L^2(S), \quad \text{op grond van Lemma 3.2.3.}$$

Volgens [44, Th. 1.28, p 21] bestaan daar positiewe getalle γ_n sodanig dat $\gamma_n \to \infty$ en

$$p_n = \gamma_n h_n \to 0 \quad \text{in } L^2(S).$$

Gevolglik $$\|p_n\|^S_{\frac{1}{2}} = \gamma_n \to \infty \tag{3.39}$$

maar $$\|p_n\|^S_o \to 0. \tag{3.40}$$

Daar bestaan $v_n \in V$ sodanig dat

$$Lv_n = 0 \quad \text{in} \quad G$$
$$T_1 v_n = p_n \quad \text{op} \quad S,$$

volgens 3.2.1.d.

$0 = (Lv_n, v_n) = a(v_n, v_n) - [T_1 v_n, T_o v_n]$ impliseer

$$c\|v_n\|_1^2 \leq \|p_n\|^S_o \|v_n\|_1 \quad \text{en dus}$$
$$c\|v_n\|_1 \leq \|p_n\|^S_o \to 0 \quad \text{volgens (3.40).}$$

Volgens 3.2.2.b bestaan daar $u_n \in C^2(\bar{G})$ sodanig dat
$$|||u_n - v_n|||_1 < \frac{1}{n}. \tag{3.41}$$

Aangesien $Lv_n = 0$ en $v_n \to 0$ in $H^1(G)$ volg

$$Lu_n \to 0 \quad \text{in } L^2(G) \tag{3.42}$$

en $$u_n \to 0 \quad \text{in } H^1(G) \tag{3.43}$$

Volgens [35, Th. 5.4, p 165] bestaan daar 'n $M > 0$ sodanig dat

$$\|T_1 u_n\|^S_{\frac{1}{2}} \leqslant M \|u_n\|_2 \tag{3.44}$$

Aangesien

$$\gamma_n - \frac{1}{n} = \|T_1 v_n\|^S_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n} \leqslant \|T_1 v_n - T_1 u_n\|^S_{\frac{1}{2}} + \|T_1 u_n\|^S_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n}$$

$$\leqslant \|T_1 u_n\|^S_{\frac{1}{2}} \quad \text{volgens (3.41)},$$

volg met behulp van (3.39) dat

$$\|T_1 u_n\|^S_{\frac{1}{2}} \to \infty$$

en dus via (3.44) volg

$$\|u_n\|_2 \to \infty . \tag{3.45}$$

Aangesien $u_n \in C^2(\bar{G}) \subset H^2(G)$ is die bewys voltooi op grond van (3.42), (3.43) en (3.45).

Let op dat $\|T_1 u_n\|^S_o \leqslant \|T_1 u_n - T_1 v_n\|^S_o + \|T_1 v_n\|^S_o$

$$\leqslant |||u_n - v_n|||^S_1 + \|p_n\|^S_o$$

$$\to 0 \quad \text{uit (3.41) en (3.40)}.$$

3.2.5. Opmerkings

a. Die bekende Schauder-Schechter tipe ongelykhede

$$\|u\|^2_2 \leqslant C_o[\|Lu\|^2_o + \|T_j u\|^2_{3/2-m_j} + \|u\|^2_1], \tag{3.46}$$

(sien byvoorbeeld [35, Th. 5.1, p 149])

met $m_j = j$ vir $j = 0$ of 1, was tot dusver van weinig nut in hierdie werk. Die probleem is dat die terme $\|T_j u\|^S_{3/2-m_j}$ nie deur die Greenformules gegee word nie.

Stellings 3.2.1 en 3.2.2 lewer die raamwerk waarin probleme voortaan bestudeer word.

b. Uit Lemma 3.2.4 is dit duidelik dat daar 'n ry $\{u_n\} \subset H^2(G)$ bestaan, met die eienskap

$$\|u_n\|_2 \to \infty \,, \quad \text{hoewel } \{\|Lu_n\|_0\}, \quad \{\|u_n\|_1\} \text{ en } \{\|T_1 u_n\|^S_0\}$$

begrens is. Die operator

$$A : \; X = H^2(G) \to X^*$$

met $(Au,v) = (Lu,Lv) + a(u,v)$ vir $v \in X$ voldoen dus nie aan die voorwaardes vir Stelling 3.1.9 en 3.1.10 nie. Hierdie operator is dus uiteindelik-positief maar nie koërsief nie.

c. <u>Die topologie van</u> V_1 <u>is streng sterker as dié van</u> V_0.

<u>Bewys</u>.

Laat $\{g_k\} \subset L^2(S)$ 'n ry wees met

$$\|g_k\|^S_0 = 1 \quad \text{en veronderstel } g_k \rightharpoonup 0 \text{ in } L^2(S).$$

('n Argument soortgelyk aan dié in die begin van Lemma 3.2.4 verseker die bestaan van só 'n ry.)

Volgens (3.20) bestaan daar $u_n \in V$ sodanig dat

$$Lu_n = 0 \quad \text{in} \quad G$$

$$T_1 u_n = g_n \quad \text{op} \quad S.$$

Gevolglik is
$$\begin{aligned} c\|u_n\|_1^2 \leqslant \hat{a}(u_n) &= (Lu_n, u_n) + [T_1 u_n, T_o u_n] \\ &= [g_n, T_o u_n] \\ &\leqslant \|T_o u_n\|_o^S \\ &\leqslant d\|u_n\|_1 . \end{aligned}$$

$\{\|u_n\|_1\}$ is dus begrens en 'n deelry $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1(G)$.

Aangesien $g_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(S)$ volg vir elke

$w \in H^1(G)$ dat $a(u,w) = \lim a(u_n,w) = \lim [T_1 u_n, T_o w]$
$= 0.$

Gevolglik is $u = 0$.

Net soos in Lemma 3.2.4 volg nou dat

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } V_o \quad \text{(nie in } V_1 \text{ nie!)}$$

en 'n ry positiewe getalle $\{\gamma_n\}$ bestaan sodanig dat $\gamma_n \to \infty$ en $v_n = \gamma_n u_n \rightharpoonup 0$ in V_o. $\{|||v_n|||_o\}$ is dus begrens. Aangesien $\|T_1 v_n\|_o^S = \gamma_n \to \infty$ is dit nou maklik om te sien dat die topologie van V_1 sterker as dié van V_o is.

d. <u>Laat</u> $|u|_1^2 = \|Lu\|_0^2 + \{\|T_1 u\|_0^S\}^2$ <u>vir</u> $u \in V$.

<u>Daar bestaan</u> c_1 sodanig dat

$$|u|_1 \leqslant |||u|||_1 \leqslant c_1 |u|_1 \text{ vir elke } u \in V.$$

Bewys.

$$c^*\|u\|_1^2 \leqslant \hat{a}(u) = (Lu,u) + [T_1 u, T_o u]$$

$$\leqslant \|Lu\|_o \|u\|_o + \|T_1 u\|_o^S \|T_o u\|_o^S$$

$$\leqslant cc^*\{\|Lu\|_o + \|T_1 u\|_o^S\}\|u\|_1 .$$

Dus $\quad \|u\|_1 \leqslant c\{\|Lu\|_o + \|T_1 u\|_o^S\} .$

Gevolglik $|u|_1^2 \leqslant |||u|||_1^2 \leqslant (1+2c^2)\{\|Lu\|_o^2 + \{\|T_1 u\|_o^S\}^2\}$

$$= c_1^2 |u|_1^2 .$$

e. Aangesien $Lu \in L^2(G)$ en $u \in H^1(G)$ vir $u \in V$ volg, vir $a_{ij} \in H^{r+1}(G)$ met $r > n/2$, dat

$$a(u,\phi) = (Lu,\phi) \quad \text{vir alle } \phi \in C_o^\infty(G).$$

Die gevolg van Lemma 15.5 van [22] impliseer dan dat $u \in H^2_{lok}(G)$; met ander woorde

$$u \in H^2(G^1) \text{ vir elke gebied } G^1 \subset \bar{G}^1 \subset G.$$

f. Die beperkings op die gebied G en sy rand S kan moontlik verslap word, maar min aandag is daaraan gegee.

3.2.6. Afspraak.

In hoofstukke 3, 4 en 5 sal ongelykhede op die rand S van G altyd in 'n regulariteitsin wees, naamlik in die sin van definisie 2.6.3, met die verstandhouding dat V 'n willekeurige Hilbertruimte is. (Nie noodwendig $H^m(G)$ nie.)

3.3. Twee voorbeelde.

Laat $$X = H = H^1(G). \tag{3.47}$$

$$r \in L^\infty(S) \text{ met } 0 < r_o \leqslant r(x) \leqslant r_1 < \infty \text{ op } S \tag{3.48}$$

$$\text{en} \quad 0 < c_r = r_1^{-1} \leqslant r(x)^{-1} \leqslant r_o^{-1} = M_r < \infty \text{ op } S, \tag{3.49}$$

$$(Au,v) = a(u,v) + [rT_ou,T_ov] \text{ vir } u,v \in X. \tag{3.50}$$

Vir $r = 0$, geld dieselfde definisie vir A as hierbo.

Laat $$\chi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{as } u \in K \\ +\infty & \text{as } u \notin K \end{cases} \tag{3.51}$$

soos in 2.11.7f.

3.3.1. Voorbeeld 1.

Laat $$a_{ij}(x) \equiv \delta_{ij}, \quad \text{die Kronecker delta} \tag{3.52}$$

$$\text{en} \quad a_o(x) \equiv 0 \tag{3.53}$$

in (3.15). A word deur (3.50) gegee en $r = 0$ (anders as in 3.48).

Indien K die versameling in 2.9.2 is met $D = G$ en $J = \chi_K$ dan bevestig Stelling 3.1.10 die bestaan van 'n oplossing vir die probleem wat in §2.9 geskets is.

3.3.2. Voorbeeld 2.

Laat K gegee word deur (2.27) met $m = 1$ en

$$J = \chi_K,\ \chi_K \text{ soos in (3.51).} \tag{3.54}$$

A word gegee deur 3.50, met a koërsief op X soos in 3.15. Weereens is die bestaanstelling 3.1.10 ter sprake.

3.4. Twee Regulariteitstellings

Ten einde voorbeeld 2 te interpreteer, word twee regulariteitstellings bewys. Daar is reeds baie werk ten opsigte van die regulariteit van variasie-ongelykhede en evolusie-ongelykhede gepubliseer [4], [5], [14], [21], [32], [34, pp 256-263, pp 286-294] en [50].

In [19, p xv], wat in 1972 in Frans verskyn het, word egter daarop gewys dat die bestaande regulariteitsresultate, onvoldoende is vir die werk wat behandel word.

In hierdie paragraaf, word twee regulariteitstellings bewys. Die eerste (Stelling 3.4.4) is gebaseer op die metode in [34, p 257]. In Stelling 3.4.8, word die oplossing van 'n variasie-ongelykheid benader deur die oplossings van probleme in die vorm (1.22). Die ruimte V_1 word gebruik.

Laat $f \in L^2(G)$ en $g \in L^2(S)$. $H^1(G) = H$.

Definieer $F \in H^*$ deur

$$< F,v > = (f,v) + [g,T_o v] \quad \text{vir } v \in H. \tag{3.55}$$

3.4.1. Lemma

Laat $G = R^n_+ = \{x \in R^n : x_n > 0\}$. (3.56)

Dan is $S = R^n_o = \{x \in R^n : x_n = 0\}$. (3.57)

Laat F gegee word deur (3.55).

Laat $\|\cdot\|_X$ die gebruiklike norm van $X = L^2(0,\infty;H^{-1}(R^{n-1}))$ aandui. Dan bestaan daar 'n $c > 0$ sodanig dat

$$|< F,v >| \leqslant (\|f\|_X + c\|g\|^S_{-\frac{1}{2}})\|v\|_1 \quad \text{vir} \quad v \in H. \tag{3.58}$$

Bewys.

Laat $x = (x',x_n)$ vir $x \in G$. Indien die afbeelding

$$v(\cdot,x_n) \to \int_{R^{n-1}} f(x',x_n)v(x',x_n)dx'$$

aangedui word met $f(\cdot,x_n) \in H^{-1}(R^{n-1})$ volg

$$\begin{aligned} |(f,v)| &\leqslant \int_0^\infty \left| \int_{R^{n-1}} f(\cdot,x_n)v(\cdot,x_n)dx' \right| dx_n \\ &\leqslant \int_0^\infty \| f(\cdot,x_n)\|_{H^{-1}(R^{n-1})} \|v(\cdot,x_n)\|_{H^1(R^{n-1})} dx_n \\ &\leqslant \|f\|_X \|v\|_1 , \end{aligned} \tag{3.59}$$

waar $\|\cdot\|_X$ die norm is soos gespesifiseer.

Laat $x = (x',0) \in S$ en $v \in C^1(\bar{G})$.

$$|[g,T_o v]| = |\int_{R^{n-1}} g(x',0)v(x',0)dx'|$$

$$\leqslant \|g(\cdot,0)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(R^{n-1})} \|T_o v(\cdot,0)\|_{H^{\frac{1}{2}}(R^{n-1})}$$

$$\leqslant c\|g\|^S_{-\frac{1}{2}} \|v\|_1 \qquad (3.60)$$

Indien $v \in H$ dan bestaan daar 'n ry $\{v_n\} \subset C^\infty(\bar{G})$ met die eienskap $v_n \to v$ in H.

Op grond van die kontinuïteit van T_o soos in 2.6.4 aangehaal volg dat $T_o v_n \to T_o v$ in $L^2(S)$. Gevolglik geld (3.60) vir elke $v \in H$.

Aangesien

$$|\langle F,v \rangle| \leqslant |(f,v)| + |[g,T_o v]|,$$

volg die resultaat uit (3.59) en (3.60).

3.4.2. <u>Definisies en resultate wat benodig word</u>.

a. Indien $f \in L^1(R^n)$, dan word die Fouriertransformasie $\hat{f}$ van f gedefinieer deur

$$\hat{f}(t) = \int_{R^n} e^{-it\cdot x} f(x)dm_n(x), t \in R^n,$$

waar $dm_n(x) = (2\pi)^{-n/2}dx$ die genormaliseerde Lebesguemaat op R^n voorstel [44, Hfs 7].

b. $(D_k f)\hat{}(t) = it_k \hat{f}(t)$ volgens [44, p 168, p 176].

c. Laat $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ die eenheidsvektor in R^n wees met 1 in die k^{de} posisie en 0 in die ander.

As $v_h(x) = v(x - he_k)$, vir $1 \leqslant k \leqslant n-1$, dan volg met behulp van die transformasie,

$$x - he_k = (x', x_n) - he_k = (y', x_n), \quad \text{dat}$$

$$\int_{R^{n-1}} v_h(x', x_n) e^{-it'\cdot x'} dm_{n-1}(x') = e^{-it_k'h} \int_{R^{n-1}} v(y', x_n) e^{-it'\cdot y'} dm_{n-1}(y'),$$

waar $x', t' \in R^{n-1}$.

As $\delta_h\ v(x) = h^{-1}[v_h(x) - v(x)]$

en $e_h(t') = h^{-1}(e^{-it_k'h} - 1)$ dan is

$$\int_{R^{n-1}} \delta_h v(x', x_n) e^{-it'\cdot x'} dm_{n-1}(x') = e_h(t') \int_{R^{n-1}} v(x', x_n) e^{-it'\cdot x'} dm_{n-1}(x').$$

3.4.3. Lemma

Laat die voorwaardes in Lemma 3.4.1. gegee wees. Laat v_h, e_k en δ_h wees soos in 3.4.2

$$K = \{v \in H^1(G) : T_o v \geqslant 0\}.$$

a. As $v \in K$ dan is $v_h \in K$.

b. Vir elke $f \in L^2(G)$ volg $\delta_h f \to -D_k f$ in x, waar x gegee is in Lemma 3.4.1. Gevolglik is die ry $\{\delta_h f\}$ begrens in X.

c. Die ry $\{\delta_h g\}$ is begrens in $H^{-\frac{1}{2}}(S)$ as $g \in H^{\frac{1}{2}}(S)$ en $\delta_h g \to -D_k g$ in $H^{-\frac{1}{2}}(S)$.

Bewys.

a. $v_h(x) = v(x-he_k) \geqslant 0$ as $v \in K$ en $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Dus is $v_h \in K$.

b. Met die notasie en resultate van 3.4.2 in gedagte volg

$$\int_0^\infty \| \int_{R^{n-1}} (\delta_h f + \partial_k f)(x',x_n) e^{-it'\cdot x'} dm(x')(1+|t'|^2)^{-\frac{1}{2}} \|^2 dx_n$$

$$= \int_0^\infty \| \int_{R^{n-1}} (e_h(t') + it_k') f(x',x_n) e^{-it'\cdot x'} dm(x')(1+|t'|^2)^{-\frac{1}{2}} \|^2 dx_n$$

$$\leqslant \int_0^\infty \| \left(\frac{|t_k'|^2}{1+|t'|^2}\right)^{\frac{1}{2}} |e^{-it_k'\theta_h} - 1| \int_{R^{n-1}} f(x',x_n) e^{-it'\cdot x'} dm(x') \|^2 dx_n$$

$$\leqslant \int_0^\infty \| \, |e^{-it_k'\theta_h} - 1| \int_{R^{n-1}} f(x',x_n) e^{-it'\cdot x'} dm(x') \|^2 dx_n \quad \text{waar } 0 < \theta_h < h$$

$\to 0$ met behulp van Lebesgue se gedomineerde konvergensie stelling [18, p 124] en die feit dat $f \in L^2(G)$ en $\|\hat{f}\|_0 = \|f\|_0$.

Hierbo is $dm(x') = dm_{n-1}(x')$ en $\|\cdot\|$ dui die norm van $L^2(R^{n-1})$ aan.

Die resultaat in (b) is dus bewys as in aanmerking geneem word dat die norm van X gegee word deur

$$\|u\|_X^2 = \int_0^\infty \|u(t)\|^2_{H^{-1}(R^{n-1})} dt \quad \text{en}$$

$$\|f\|^2_{H^{-1}(R^{n-1})} = \int_{R^{n-1}} |1 + |t'|^2|^{-1} |\hat{f}(t')|^2 dt'.$$

c. Laat $g_o(x') = g(x',0)$ vir $x' \in R^{n-1}$ en definieer $\hat{g}_o$ soos in 3.4.2 met $n-1$ in die plek van n. Laat $\|\cdot\|$ die norm van $L^2(R^{n-1})$ aandui.

Laat $p(y) = (1+|y|^2)^{-\frac{1}{4}}$ en $q(y) = (1+|y|^2)^{\frac{1}{4}}$.

Dan is $\|\delta_h g + D_k g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(S)} = \|(\delta_h g_o + D_k g_o)\hat{}\,(y)p(y)\|$

$$= \|(e_h(y) + iy_k)\hat{g}_o(y)p(y)\|$$

$$\leqslant \|r(h)|y|p(y)\hat{g}_o(y)\|, \text{ waar } r(h) = |e^{-iy_k\theta_h} - 1|$$

$$\text{en } 0 < \theta_h < 1.$$

$$\leqslant \|r(h)q(y)\hat{g}_o(y)\|$$

$$\to 0 \quad \text{aangesien} \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(R^{n-1}).$$

3.4.4. Stelling

Laat a deur 3.15, met a_{ij} soos in 3.52 en $a_o \equiv 1$, gegee word. Laat

$$a_1(u,v) = a(u,v) + [T_o u, T_o v] \text{ vir } u,v \in H.$$

$$H = H^1(G) \text{ en } K = \{u \in H: T_o v \geqslant 0 \text{ op } S\}.$$

Laat G,S en F wees soos in Lemma 3.4.1.

Dan is die oplossing van

$$u \in K: a_1(u,v-u) \geqslant \langle F,v-u\rangle \text{ vir alle } v \in K \tag{3.61}$$

in $H^2(G)$.

Bewys.

Dieselfde patroon as in [34, p 257] word gevolg. Met behulp van die transformasie in 3.4.2c volg

$$a_1(u,u) = a_1(u_h,u_h),(f,v) = (f_h,v_h) \text{ en } [g,v] = [g_h,v_h] \qquad (3.62)$$

Aangesien $u_h \in K$ volgens 3.4.3a volg

$$a_1(u,u_h - u) \geqslant \langle F, u_h - u\rangle \quad \text{en gevolglik}$$

$$a_1(u_{-h},u) - a_1(u,u) \geqslant \langle F_{-h},u\rangle - \langle F,u\rangle$$

$$\text{waar } F_{-h} = \{f_{-h},g_{-h}\}.$$

Nou volg

$$a_1(u_h,u - u_h) \geqslant \langle F_h,u - u_h\rangle, \qquad (3.63)$$

deur (3.62), met -h in die plek van h, te gebruik.

Deur $v = u_h$ in (3.61) te kies en (3.61), (3.63) bymekaar te tel, volg

$$a_1(u_h - u,u - u_h) \geqslant \langle F_h - F,u - u_h\rangle$$

en

$$\|u_h - u\|_1^2 \leqslant \hat{a}_1(u_h - u) \leqslant |\langle F_h - F,u - u_h\rangle|$$

$$\leqslant (\|f_h - f\|_X + c\|g_h - g\|^S_{-\frac{1}{2}})\|u_h - u\|_1$$

volgens Lemma 3.4.1.

Deur met $\|u_h - u\|_1$ te deel en Lemma 3.4.3b en c te gebruik, volg dat $\{\delta_h u\}$ begrens is in $H^1(G)$.

Veronderstel $\delta_h u \rightharpoonup g \in H^1(G)$ (swak konvergensie). Dan volg $\delta_h u \to g$ in $L^2(G)$ aangesien die inbedding

$$H^s(G) \to H^{s-\varepsilon}(G), \quad \varepsilon > 0,$$

volgens [35, Th. 16.1, p 99] kompak is.

Aangesien $u \in H^1(G)$ volg $\delta_h u \to -D_k u$ in $L^2(G)$.

Gevolglik is $-D_k u = g \in H^1(G)$ vir $1 \leqslant k \leqslant n-1$. (3.64)

Die keuse $v = u \pm w$, met $w \in C_0^\infty(G)$ in (3.61) lewer $-\Delta u + u = f$ in G, met Δ die Laplace-operator.

Gevolglik is $D_n^2 u = -\Sigma_1^{n-1} D_i^2 u + u - f \in L^2(G)$. (3.65)

Uit (3.64), (3.65) en die feit dat $u \in H^1(G)$, volg

$$u \in H^2(G).$$

3.4.5. Definisies

a. Laat G wees soos in 3.2.

b. $K = \{v \in H^1(G): rT_o v \geqslant h \text{ op } S\}$.

c. $H = H^1(G)$.

d. F is soos in (3.55).

e. $a_1(u,v) = a(u,v) + [rT_o u, T_o v]$ vir $u,v \in H$, waar a is soos in (3.15). a is dus koërsief op H.

f. $\frac{h}{r} \in H^{3/2}(S)$.

3.4.6. Lemma

Laat V_1 die Hilbertruimte van § 3.2 wees.

Laat $f \in L^2(G)$ en $g \in L^2(S)$.

Definieer $\langle F_1, v\rangle = (f, Lv) + [g, T_1 v]$, (3.66)

waar L deur 3.14 gegee word,

$$B_\varepsilon(u,v) = \varepsilon(Lu,Lv) + a(u,v) + \varepsilon[T_1 u, T_1 v] \tag{3.67}$$

waar a kontinu en koërsief op H is soos in 3.15.

Veronderstel $a_{ij} = a_{ji}$ vir elke i en j.

(i) Die probleem $B_\varepsilon(u,v) = \langle F_1, v\rangle$ vir alle $v \in V$ (3.68)

het 'n eenduidig bepaalde oplossing $u_\varepsilon \in V$.

(ii) 3.68 kan in 'n veralgemeende vorm van 1.22 geskryf word.

Bewys.

(i) B_ε is kontinu en koërsief op V_1.

Aangesien $\langle F_1, \cdot\rangle \in V_1^*$ het (3.68) 'n oplossing $u_\varepsilon \in V$.

Die eenduidigheid volg uit die koërsiwiteit van B_ε.

(ii) Met behulp van (3.21) kan B_ε geskryf word in die vorm

$$B_\varepsilon(u,v) = (u + \varepsilon Lu, Lv) + [T_o u + \varepsilon T_1 u, T_1 v]$$

$$= \langle Au, Qv\rangle, \quad \text{waar}$$

$$Au = \{u + \varepsilon Lu, T_o u + \varepsilon T_1 u\} \in Y,$$

$$Qv = \{Lv, T_1 v\} \in Z, \text{ met}$$

$$Y = Z = L^2(G) \times L^2(S).$$

Indien $F = \{f,g\} \in Y$, dan volg

$$\langle Au,Qv \rangle = \langle F,Qv \rangle \quad \text{uit (3.68).} \tag{3.69}$$

3.4.7. Lemma

Laat

$$K = \{u \in H : rT_o u \geq h \text{ op } S\}, \tag{3.70}$$

$$H = H^1(G) \text{ en } \frac{h}{r} \in H^{3/2}(S).$$

Veronderstel r bevredig 3.48, 3.49 en F is soos in (3.55).
Laat u die oplossing wees van

$$u \in K: a_1(u,v-u) \geq \langle F,v-u \rangle \text{ vir alle } v \in K. \tag{3.71}$$

a_1 is soos in Definisie 3.4.5. en a is soos in Lemma 3.4.6.

(i) Daar bestaan 'n $w \in H^2(G)$ sodanig dat

$$Lw = f \text{ in } G \text{ en } rT_o w = h \text{ op } S. \tag{3.72}$$

(ii) Daar bestaan $u_\varepsilon \in V \cap K$ sodanig dat

$$u_\varepsilon + \varepsilon L u_\varepsilon = u + \varepsilon L w \tag{3.73}$$

$$T_o u_\varepsilon + \varepsilon T_1 u_\varepsilon = T_o u + \varepsilon T_1 w. \tag{3.74}$$

(iii) $u \geq w$ in G.

Bewys

(i) Volgens [35, Th. 8.3, p 39] bestaan daar 'n $g_o \in H^2(G)$

sodanig dat

$$T_o g_o = h/r \text{ op } S.$$

Daar bestaan 'n $w^* \in H_o^1(G)$ sodanig dat

$$a(w^*,v) = (f,v) - a(g_o,v) \quad \text{vir alle} \quad v \in H_o^1(G).$$

Volgens [22, Th. 17.2, p 67] is $w^* \in H^2(G)$.
Aangesien $g_o \in H^2(G)$, volg vir $w = w^* + g_o$ dat

$$w \in H^2(G): \quad a(w,v) = (f,v) \quad \text{vir alle} \quad v \in H.$$

Daar bestaan dus 'n w sodanig dat

$$w \in H^2(G): \quad Lw = f \text{ in } G \text{ en } rT_o w = h \text{ op } S, \tag{3.75}$$

aangesien $T_o w = T_o g_o = h/r$ op S.

(ii) Daar word nou aangetoon dat $u \geqslant w$ in G.
Die idee van die bewys is in [34, Th. 8.10, p 264] gekry.

$$\text{Laat } v = \sup_{\bar{G}}\{u,w\} \text{ en } v^* = \inf_{\bar{G}}\{u,w\}. \tag{3.76}$$

Op S geld $rT_o v \geqslant h$ want $rT_o w = h \leqslant rT_o u$ op S.

$rT_o v^* = h$ op S aangesien $h = rT_o w \leqslant rT_o u$ op S.

$$\text{Gevolglik is} \quad v, v^* \in K \text{ en } T_o(v^* - w) = 0. \tag{3.77}$$

Indien $p = u - w$ dan is

$$v - w = \sup_{\bar{G}}\{p,0\} = p^+ \tag{3.78}$$

en $$v - u = -\inf_{\bar{G}}\{p,0\} = p^- \qquad (3.79)$$

Verder is $$v + v^* = u + w. \qquad (3.80)$$

Uit (3.78) en (3.79) volg

$$a_1(v - w, v - u) = a_1(p^+, p^-) = 0 \qquad (3.81)$$

$$a_1(u, v - u) + a_1(w, v^* - w)$$

$$\geqslant \langle F, v - u\rangle + (f, v^* - w) + [h, T_o v^* - T_o w]$$

uit (3.71) en (3.72)

$$= \langle F, v - u\rangle + (f, u - v) + [h, T_o u - T_o v]$$

$= [g - h, T_o v - T_o u]$ aangesien F deur 3.55 gegee is

$= 0$, want $T_o(v - u) = T_o(w - v^*) = 0$ uit (3.80) en (3.77).

Hieruit volg $a_1(u, v - u) + a_1(w, u - v)$

$= a_1(u, v - u) + a_1(w, v^* - w)$ uit (3.80)

$\geqslant 0.$

3.81 impliseer $a_1(u - w, v - u) \geqslant 0 = a_1(v - w, v - u)$.

Hieruit volg $0 \leqslant a_1(v - u, v - u) \leqslant 0$ en dus

$$u = v = \sup_{\bar{G}}\{u,w\}.$$

Hiermee is (iii), $u \geqslant w$ in G, bewys.

Laat $\quad f = u + \varepsilon Lw \in L^2(G)$ $\quad$ (3.82)

en $\quad g = T_O u + \varepsilon T_1 w \in L^2(S)$ $\quad$ (3.83)

in Lemma 3.4.6.

Indien u_ε die oplossing van (3.67) met (3.82), (3.83) is, dan volg met behulp van (3.20) en Lemma 3.4.6(ii) dat $Au_\varepsilon = F = \{f,g\}$ en dus is u_ε 'n oplossing van (3,73), (3.74).

Nou moet aangetoon word dat $u_\varepsilon \in K$.
Met behulp van (3.21) volg

$$\begin{aligned} 0 &= (u_\varepsilon - u,v) + \varepsilon(Lu_\varepsilon - Lw,v) \\ &= (u_\varepsilon - u,v) + \varepsilon a(u_\varepsilon - w,v) - \varepsilon[T_1 u_\varepsilon - T_1 w, T_O v] \\ &= (u_\varepsilon - u,v) + \varepsilon a(u_\varepsilon - w,v) + [T_O u_\varepsilon - T_O u, T_O v], \end{aligned}$$

volgens (3.74).

Kies $\quad v = z_\varepsilon = \sup_{\bar{G}}\{w - u_\varepsilon, 0\}$; $\quad$ dan is

$$0 = (u_\varepsilon - u, z_\varepsilon) + \varepsilon a(u_\varepsilon - w, z_\varepsilon) + [T_O u_\varepsilon - T_O u, T_O z_\varepsilon]. \tag{3.84}$$

$(u_\varepsilon - u, z_\varepsilon) \leqslant 0$, want $w > u_\varepsilon$ impliseer $u_\varepsilon - u < w - u \leqslant 0$ in G.

$$a(u_\varepsilon - w, z_\varepsilon) = -a(z_\varepsilon, z_\varepsilon) \leqslant 0.$$

Met behulp van hierdie twee resultate volg

$$[T_O u_\varepsilon - T_O u, T_O z_\varepsilon] \geqslant 0 \tag{3.85}$$

uit (3.84). Op S is $rT_o u \geqslant h = rT_o w > rT_o u_\varepsilon$ as $T_o z_\varepsilon > 0$.

Gevolglik is $T_o u > T_o u_\varepsilon$ as $T_o z_\varepsilon > 0$ en uit (3.85) volg $(T_o u_\varepsilon - T_o u) T_o z_\varepsilon = 0$ op S.

$T_o z_\varepsilon = 0$ impliseer $rT_o u_\varepsilon \geqslant rT_o w = h$.

$T_o u_\varepsilon = T_o u$ impliseer $rT_o u_\varepsilon \geqslant h$, want $u \in K$.

Gevolglik is $u_\varepsilon \in K$.

3.4.8. Stelling

Onder die voorwaardes vervat in Lemma 3.4.7 volg dat die oplossing u van (3,71) voldoen aan

$$Lu \in L^2(G) \quad \underline{\text{en}} \quad T_1 u \in L^2(S).$$

Bewys

Die koërsiwiteit van a impliseer dat

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \geqslant a(u, u_\varepsilon - u) \qquad (3.86)$$

Aangesien $u_\varepsilon \in K$ (Lemma 3.4.7) volg met (3.86) in gedagte dat

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) + [rT_o u, T_o u_\varepsilon - T_o u] \geqslant (f, u_\varepsilon - u) + [g, T_o u_\varepsilon - T_o u].$$

Met behulp van (3.21), (3.73) en (3.74) volg

$$\varepsilon\{(Lu_\varepsilon, Lw - Lu_\varepsilon) + [T_1 u_\varepsilon, T_1 w - T_1 u_\varepsilon] + [rT_o u, T_1 w - T_1 u_\varepsilon]\}$$

$$\geqslant \varepsilon\{(f, Lw - Lu_\varepsilon) + [g, T_1 w - T_1 u_\varepsilon]\}.$$

Aangesien $Lw = f$ volg, deur met ε te deel en terme te groepeer, dat

$$-\{\|Lu_\varepsilon - f\|_0^2 + \{\|T_1 u_\varepsilon\|_0^S\}^2\} + [rT_0 u - g, T_1 w - T_1 u_\varepsilon]$$

$$+ [T_1 u_\varepsilon, T_1 w] \geqslant 0.$$

Hieruit volg

$$\|Lu_\varepsilon - f\|_0^2 + \{\|T_1 u_\varepsilon\|_0^S\}^2 \leqslant c[1 + \|T_1 u_\varepsilon\|_0^S]. \tag{3.87}$$

Uit (3.87) volg eerstens dat

$$\{\|T_1 u_\varepsilon\|_0^S\} \quad \text{begrens is} \tag{3.88}$$

en tweedens dat

$$\{\|Lu_\varepsilon - f\|_0\} \quad \text{begrens is.} \tag{3.89}$$

Deur (3.73) te gebruik, volg

$$\|u_\varepsilon - u\|_0 = \varepsilon\|Lu_\varepsilon - Lw\|_0 = \varepsilon\|Lu_\varepsilon - f\|_0$$

$$\leqslant M\varepsilon \quad (\text{sê}).$$

Dus $$u_\varepsilon \to u \quad \text{in} \quad L^2(G). \tag{3.90}$$

Deur (3.74) te gebruik, volg

$$\|T_0 u_\varepsilon - T_0 u\|_0^S = \varepsilon\|T_1 u_\varepsilon - T_1 w\|_0^S$$

$$\leqslant N\varepsilon \quad (\text{sê}).$$

Gevolglik, $$T_0 u_\varepsilon \to T_0 u \quad \text{in } L^2(S) \tag{3.91}$$

Aangesien $u_\varepsilon \to u$ in $L^2(G)$ volg dat

$$Lu_\varepsilon \to Lu \text{ in distribusie sin.}$$

Aangesien $\{\|Lu_\varepsilon\|_0\}$ volgens (3.89) begrens is, volg dat 'n $\phi \in L^2(G)$ bestaan, sodanig dat $Lu_\varepsilon \rightharpoonup \phi$. (Swak konvergensie in $L^2(G)$ word met $\rightharpoonup$ aangedui.) Net soos in Stelling 3.2.1a volg dat

$$Lu_\varepsilon \rightharpoonup Lu \in L^2(G). \tag{3.92}$$

Gestel $T_1 u_\varepsilon \rightharpoonup q$ in $L^2(S)$ (swak konvergensie).

$$\begin{aligned}(Lu_\varepsilon,v) &= a(u_\varepsilon,v) - [T_1u_\varepsilon,T_0v] \quad \text{uit (3.21)} \\ &= (u_\varepsilon,Lv) + [T_0u_\varepsilon,T_1v] \\ &\quad - [T_1u_\varepsilon,T_0v] \text{ vir } v \in C^2(\bar{G}).\end{aligned}$$

Deur ε na nul te laat neig, volg

$$(Lu,v) = (u,Lv) + [T_0u,T_1v] - [q,T_0v]$$

met behulp van (3.90), (3.91), (3.92).

Hieruit volg

$$(Lu,v) = a(u,v) - [q,T_0v].$$

Uit 3.21 volg $T_1 u = q \in L^2(S)$. (3.93)

Die resultaat van die stelling volg uit (3.92), (3.93).

<u>Opmerkings</u>.

Stelling 3.4.8 is geïnspireer deur die werk gedoen in [34, p 289, 290]. Die resultaat van 3.4.8 is duidelik meer algemeen as die van 3.4.4. Beter resultate as 3.4.4 is beskikbaar

in die Literatuur, maar kan baie ingewikkeld word. Die benadering in 3.4.8 is relatief eenvoudig, maar dit het beperkinge. Eerstens is slegs konvekse versamelings K, soos in 3.4.5b, in aanmerking geneem. Tweedens moes 'n ry $\{u_\varepsilon\}$ (Lemma 3.4.7) gekonstueer word.

Aangesien u_ε in K moet wees, is daar nie 'n algemene metode om só 'n ry te konstueer, vir willekeurige konvekse versamelings K nie. Derdens moes 'n maksimumbeginsel ($u \geqslant w$ in Lemma 3.4.7) bewys word, 'n taak wat nie altyd eenvoudig hoef te wees nie.

HOOFSTUK 4

VARIASIE-ONGELYKHEDE IN GEORDENDE HILBERTRUIMTES

4.1. Inleiding en doel van die hoofstuk

In [33] word 'n "vreemde" definisie vir variasie-ongelykhede gegee. 'n Operator A, wat 'n parsiële differensiaaloperator, lineêr of nie-lineêr, 'n integraaloperator, 'n matriks, ensovoorts ... kan wees, is gegee. 'n (Funksie of vektor) u moet gevind word sodanig dat

$$Au - f \geqslant 0, \quad u - \psi \geqslant 0, \quad (Au - f)(u - \psi) = 0. \tag{4.1}$$

f en ψ is gegee, die simbool "$\geqslant$" beteken positiewe funksies, vektore met positiewe komponente, ensovoorts ... en die skalaarproduk is die produk in R of in R^n.

Indien $A = \partial/\partial n$, $f = 0$ en $\psi = h$ in (4.1) dan kan (2.23) in hierdie vorm geskryf word. In hierdie geval is (4.1) egter nie ekwivalent aan die variasie-ongelykheid (2.25) nie, aangesien die beherende vergelyking (2.20) nie in ag geneem is nie.

Die variasie-ongelykheid waarvan 2.9.2. melding maak, kan in die vorm (4.1) geskryf word. Soos reeds in 2.9.2. genoem, is (2.29) in hierdie geval 'n voorbeeld van 'n <u>vrye-rand-probleem</u>. Indien $u > \psi$ (wat die simbool "$>$" ookal mag beteken) impliseer dat $Au = f$ in (4.1) dan lei die definisie (4.1) ook na 'n vrye-rand-probleem. Die vrye-rand sal die "gedeelte" tussen die gebied waar $u = \psi$ (die kontak versameling) en die gebied waar $u > \psi$ wees.

Die doel van hierdie hoofstuk is om die definisie (4.1) in 'n abstrakte raamwerk te plaas en dit sodoende meer presies te maak. Die resultaat van hierdie benadering is dat vir elke variasie-ongelykheid van die vorm (2.29) daar 'n ooreenstemmende probleem (4.1) is en omgekeerd, mits die voorwaarde $u \geqslant \psi$ in (4.1), vervang word met $u \in K$ (Stelling 4.6.5). In die lig van 2.9.3c is hierdie resultaat belangrik.

'n Ander aspek van die benadering in hierdie hoofstuk, wat in hoofstuk 5 gebruik word, is van groot belang. In [45], byvoorbeeld, word met operatore gewerk wat funksies op pare van funksies afbeeld, waarvan een komponent die beperking van 'n funksie tot die rand van 'n gebied is. Om die randintegrale wat uit die variasieformulering (Stelling 1.3.8) ontstaan, sinvol te maak, word variasie-ongelykhede bestudeer wat verband hou met die gedagte wat uit (1.22) voortspruit. Hierdie formulering vloei op 'n natuurlike wyse voort uit die werk in hierdie hoofstuk.

4.1.1. <u>Voorbeeld</u>

Laat $a(u,v) = \int_G \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx,$ (4.2)

$(f,v) = \int_G f\, v\, dx,$ (4.3)

en $[g,h] = \int_S g\, h\, dS.$ (4.4)

Laat T_0 die spooroperator en T_1 die normaalafgeleide op S, die rand van G wees, in ooreenstemming met definisie 2.6.4. (4.5)

$$K = \{v \in H^1(G) : T_0 v = g \text{ op } S, \quad v \geqslant h \text{ in } G\}. \qquad (4.6)$$

Indien $h = 0$ en $G = D$ hierbo, dan is (2.29) met (4.2), (4.3) en (4.6) die variasie-ongelykheid wat in paragraaf (2.9) ontstaan.

Die volgende resultaat is bekend, maar die bewys word hier aangegee omdat dit belangrik is vir die werk van hierdie Hoofstuk.

4.1.2. Stelling [37], [34, p 244]

Laat P_1 die probleem (2.29) met (4.2), (4.3) en (4.6) voorstel. Laat P_2 die probleem:

vind u sodanig dat

$$\begin{aligned} &u - h \geq 0, \quad -\Delta u - f \geq 0 \quad \text{in } G \\ &(-\Delta u - f,\ u - h) = 0 \\ &T_0 u = g \text{ op } S, \end{aligned} \tag{4.7}$$

voorstel. Dan is P_1 en P_2 formeel ekwivalent indien $T_0 h = g$ op S.

Bewys

Indien u 'n oplossing is van P_1 volg met behulp van parsiële integrasie dat P_1 ekwivalent is aan

$$u \geq h \text{ in } G, T_0 u = g \text{ op } S : (-\Delta u - f, v - u) + [T_1 u, T_0 v - T_0 u] \geq 0 \text{ vir alle } v \in K. \tag{4.8}$$

Deur $v = u + w \in K$ met $w \geq 0$ in G, $w = 0$ op S te kies volg

$$-\Delta u - f \geq 0 \quad \text{in } G. \tag{4.9}$$

Indien $T_0 h = g$ op S dan volg uit die keuses $v = h \in K$ en $v = 2u - h \in K$ dat

$$(-\Delta u - f,\ u - h) = 0. \tag{4.10}$$

Indien omgekeerd u 'n oplossing is van P_2 dan volg vir alle $v \in K$ dat u 'n oplossing is van

$$u \in K : (-\Delta u - f, v - u) = (-\Delta u - f, v - h) + (-\Delta u - f, h - u) \geqslant 0. \tag{4.11}$$

Aangesien $T_0 v = g = T_0 u$ op S, volg na parsiële integrasie dat u 'n oplossing is van P_1.

4.1.3. Opmerking

Laat $G_1 = \{x \in G : u(x) > h(x)\}$ en $G_2 = G - G_1$.

Uit (4.7) volg (indien $T_0 h = g$) dat

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G_1 \text{ en } u = h \text{ in } G_2.$$

G_2 is die kontakversameling [33] en die skeiding tussen G_1 en G_2 verteenwoordig die vrye-rand. In [32] Stelling 4.1 word bewys dat G_1 oop en samehangend is, indien $h \in C^2(\bar{G})$, $h < 0$ op S en $g = 0$ op S.

4.2. 'n Ander formulering van probleem 4.7

$$\text{Laat } Au = \{-\Delta u, T_1 u\}, \; Qu = \{u, T_0 u\}, \quad F = \{f, 0\} \text{ en } H = \{h, g\} \tag{4.12}$$

$$\text{Laat } X = H^1(G), \quad Y = [H^1(G)]^* \times H^{-\frac{1}{2}}(S) \quad \text{en} \quad Z = H^1(G) \times H^{\frac{1}{2}}(S). \tag{4.13}$$

$$\text{Laat } \langle \{u,g\}, \{v,h\} \rangle = (u,v) + [g,h] \tag{4.14}$$

'n paring tussen die ruimtes Y en Z wees, met $(\cdot,\cdot)$ gedefinieer deur (4.3) en $[\cdot,\cdot]$ gedefinieer deur (4.4) as g en h funksies is.

Indien $\geqslant$ gedefinieer word deur $\{u,g\} \geqslant \{v,h\}$ as $u \geqslant v$ en $g = h$ dan kan (4.8) geskryf word in die vorm

$$Qu \geqslant H : \langle Au - F, Qv - Qu \rangle \geqslant 0 \text{ vir alle } v \text{ met } Qv \geqslant H. \quad (4.15)$$

Die voorwaarde $T_o u = g$ in (4.6) kan weggelaat word, en $\geqslant$ kan dienooreenkomstig aangepas word.

4.3. Abstrakte formulering in Banachruimtes.

Hoewel die werk in hierdie hoofstuk in die Hilbertruimtekonteks gedoen is, word 'n formulering in drie Banachruimtes gegee. Hierdie formulering is gebaseer op § 4.2 .

Laat X, Y en Z Banachruimtes wees. Veronderstel Y en Z is gepaar met $\langle y,z \rangle$ vir $y \in Y$ en $z \in Z$ die (geassosieerde) bilineêre funksionaal [29, p 137].

$$\begin{aligned} &\text{Laat } A : D(A) \subset X \to Y \\ &\quad \text{en } Q : D(Q) \subset X \to Z \end{aligned} \qquad (4.16)$$

gegewe operatore wees en K 'n konvekse deelversameling van X. Die volgende tipe probleem word ondersoek: Vir gegewe $F \in Y$,

$$\text{vind } u \in D(A) \cap D(Q) \cap K \text{ sodanig dat } \langle Au - F, Qv - Qu \rangle \geqslant 0$$
$$\text{vir alle } v \in K \cap D(Q). \qquad (4.17)$$

4.4. Orderelasies in Hilbertruimtes

Laat H 'n reële Hilbertruimte wees met inwendige produk $((\cdot,\cdot))$ en norm $\|\cdot\|$. Veronderstel $(\cdot,\cdot)$ is 'n positiewe simmetriese bilineêre vorm op H en skryf $(u,u) = |u|^2$. Sien [29, p 53, 54]) vir 'n definisie van inwendige produk en positief simmetriese bilineêre vorm.

4.4.1. <u>Definisie</u> [29, p 16]

'n Deelversameling $L \subset H$ word 'n <u>keël</u> genoem as L nie-leeg is, $L + L \subset L$ en $tL \subset L$ as $t \geqslant 0$.

<u>Voorbeeld</u>

Laat $L_x = \{y \in H : (x,y) \geqslant |y|/\sqrt{2}\}$ vir

$x \in H$ met $|x| = 1$.

Aangesien $\sqrt{2} > 1$ volg dat $x \in L_x$, (4.18)

vir x met $|x| = 1$. L_x is dus nie-leeg.

Die subadditiwiteit en absoluut homogeniteit [29, p 15] van 'n norm, tesame met die lineariteit van die funksie $y \to (x,y)$, verseker dat L_x 'n keël is.

4.4.2. <u>Definisie</u>

L_x soos gedefinieer hierbo, word die <u>reghoekige keël met toppunt</u> x genoem.

4.4.3. <u>Definisie (Ordening)</u> [29, p 16]

'n Keël L word gegee. Die ordening, aangedui met $\geqslant_L$, geassosieer met L, word gedefinieer deur

$$x \geqslant_L 0 \text{ as en slegs as } x \in L$$
$$x \geqslant_L y \text{ as en slegs as } x - y \in L.$$

4.4.4. <u>Lemma</u>

<u>Laat</u> $x \in H$, $|x| = 1$. <u>Vir elke</u> $u, v \in L_x$ <u>geld</u> $(u,v) \geqslant 0$.

<u>Bewys</u> ('n Skets in twee dimensies kan vir toeligting gebruik

word.)

Laat $u, v \in L_x$. Indien u of $v = 0$, is die stelling waar. Gestel nou u en v ongelyk aan 0 en laat

$$a = u/|u|, \quad b = v/|v|.$$

$$\begin{aligned}(a, b/\sqrt{2}) &= (a, b/\sqrt{2} - x) + (a, x)\\ &\geqslant (a, b/\sqrt{2} - x) + 1/\sqrt{2}. \qquad (4.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|(a, b/\sqrt{2} - x)|^2 &\leqslant |b/\sqrt{2} - x|^2, \quad \text{want } |a| = 1\\ &= \tfrac{1}{2} - 2/\sqrt{2}\,(b,x) + 1, \quad \text{want } |x| = 1 = |b|\\ &\leqslant \tfrac{3}{2} - 2/(\sqrt{2})^2 \quad \text{want } b \in L_x\\ &= \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Uit (4.19) volg nou $(a, b/\sqrt{2}) \geqslant -1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = 0$.

Gevolglik is

$$(u,v) = \sqrt{2}\,|u|\,|v|\,(a, b/\sqrt{2}) \geqslant 0.$$

4.4.5. <u>Stelling</u>

<u>Laat</u> H <u>'n reële Hilbertruimte wees.</u> <u>Daar bestaan 'n orderelasie,</u> $\geqslant$, <u>in</u> H <u>sodanig dat</u>

(i) $x \geqslant 0$ <u>en</u> $y \geqslant 0$ <u>impliseer</u> $(x,y) \geqslant 0$,

(ii) $(x,y) \geqslant 0$ <u>vir alle</u> $y \geqslant 0$ <u>impliseer</u> $x \geqslant 0$,

(iii) $x \geqslant 0$ <u>en</u> $t \geqslant 0$, $t \in R$ <u>impliseer</u> $tx \geqslant 0$,

(iv) $x \geqslant y$ <u>as en slegs as</u> $x + a \geqslant y + a$, $a \in H$.

<u>Bewys</u>

Laat $a \in H$, $|a| = 1$, $L = L_a$ en $\geqslant$ die geassosieerde ordening.

(i) Die eerste resultaat is in Lemma 4.4.4 bewys.

(ii) As $x = 0$ in (ii) is daar niks om te bewys nie.
Sonder verlies aan algemeenheid, aanvaar $|x| = 1$.
Gestel $x \notin L$, met ander woorde $(a,x) < 1/\sqrt{2}$. (4.20)

Laat $v = [a + \{(a,x)a - x\}/\{1 - (x,a)^2\}^{\frac{1}{2}}]/\sqrt{2}$

Dan is

$$|v|^2 = [1 + \{(a,x)^2 - 2(a,x)^2 + 1\}/\{1 - (a,x)^2\}]/2.$$
$$= 1.$$

Verder is $(v,a) = 1/\sqrt{2}$ en gevolglik $v \geqslant 0$.

Maar

$$(v,x) = [(a,x) + \{(a,x)^2 - 1\}/\{1 - (a,x)^2\}^{\frac{1}{2}}]/\sqrt{2}$$

$$= [(a,x) - \{1 - (a,x)^2\}^{\frac{1}{2}}]/\sqrt{2},$$

en $0 \leqslant (a,x) < 1/\sqrt{2}$

$$< [1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}]/\sqrt{2} \quad \text{aangesien}$$

$$1 - (a,x)^2 > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

impliseer $\{1 - (a,x)^2\}^{\frac{1}{2}} > 1/\sqrt{2}$

$$= 0.$$

Hierdie resultaat is strydig met die voorwaarde
$(x,y) \geqslant 0$ vir alle $y \geqslant 0$. Gevolglik is (4.20) vals en
$x \geqslant 0$.

(iii) $x \geqslant 0$ impliseer $x \in L$, impliseer $tx \in L$, impliseer
$tx \geqslant 0$ as $t \geqslant 0$.

(iv) $x \geqslant y$ as en slegs as $x - y \in L$,
as en slegs as $x + b - (y + b) \in L$,
as en slegs as $x + b \geqslant y + b$.

4.4.6. Definisie

Laat $\geqslant_1$ en $\geqslant_2$ orderelasies in H wees.

a. 'n Orderelasie $\geqslant$ in H is versoenbaar met die Hilbert-ruimtestruktuur as

$$(x,y) \geqslant 0 \quad \text{vir alle} \quad y \geqslant 0 \quad \text{impliseer} \quad x \geqslant 0.$$

b. Die paar $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ heet toelaatbaar indien

(i) $x \geqslant_1 0$ en $y \geqslant_2 0$ impliseer $(x,y) \geqslant 0$,

(ii) $(x,y) \geqslant 0$ vir alle $y \geqslant_2 0$ impliseer $x \geqslant_1 0$.

Opmerking. As $|a| = 1$, dan is die paar $(\geqslant_{L_a}, \geqslant_{L_a})$ toelaatbaar.

4.4.7. Definisie

Laat $f \in H^*$. Die Frechet-Riesz Stelling [46, p 15] lewer 'n funksionaal $J : H^* \to H$ met die eienskappe

$$\langle f,v \rangle = (v,Jf) \text{ vir } v \in H,$$

$$\| J f \| = \| J \|.$$

Die paring tussen H^* en H word aangedui met $\langle f,v \rangle$ vir $f \in H^*$ en $v \in H$.

4.5. Stelling

Laat H 'n reële Hilbertruimte wees, met $((\cdot,\cdot))$, $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ soos in 4.4. Laat $a(\cdot,\cdot)$ 'n bilineêre funksionaal op H wees en $f,h \in H$ twee gegewe elemente. 'n Toelaatbare paar (sien 4.4.6b) $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ word gegee.

Laat

$$K = \{v \in H:\ v \geqslant_2 h\}. \tag{4.21}$$

Veronderstel daar bestaan 'n afbeelding

$$A : H \to H \text{ sodanig dat } a(u,v) = (Au,v) \text{ vir alle } u,v \in H. \tag{4.22}$$

Dan is

u 'n oplossing van

$$u \in K : a(u,v-u) \geqslant (f,v-u) \text{ vir alle } v \in K \tag{4.23}$$

as en slegs as

u 'n oplossing is van

$$u \geqslant_2 h, \quad Au-f \geqslant_1 0, \quad (Au-f,u-h) = 0. \tag{4.24}$$

Bewys.

Deur $v = u + w$ met $w \geqslant_2 0$ in (4.23) te kies en op te let dat $v - h = (u-h) + w \geqslant_2 0$ (uit die eienskap $L + L \subset L$ van 'n keël), dan impliseer (4.23), (4.22) dat

$$u \in K : (Au-f,w) \geqslant 0 \text{ vir alle } w \geqslant_2 0. \tag{4.25}$$

Aangesien die paar $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ toelaatbaar is, volg $Au - f \geqslant_1 0$ uit (4.25).

Indien $v = 2u-h$ dan is $v = u + (u-h) \geqslant_2 u$, met behulp van Stelling 4.4.5(iv) en die feit dat $u - h \geqslant_2 0$. Aangesien $v - h = (v-u) + (u-h) \geqslant_2 0$ (uit die eienskap $L + L \subset L$ van 'n keël) volg uit (4.23), (4.22)

$$(Au - f,\ u - h) \geqslant 0. \tag{4.26}$$

Die keuse $v = h$ in (4.23) lewer $(Au - f, h - u) \geqslant 0$, wat tesame met (4.26) impliseer dat

$$(Au - f, u - h) = 0.$$

Aangesien $u \in K$ is dit nou duidelik dat (4.23) impliseer (4.24).

Veronderstel u is 'n oplossing van (4.24) en $v \geqslant_2 h$. Dan is

$$\begin{aligned} a(u,v-u) - (f,v-u) &= (Au-f,v-u) \\ &= (Au-f,v-h) + (Au-f,h-u) \\ &= (Au-f,v-h) \\ &\geqslant 0, \qquad \text{aangesien} \end{aligned}$$

die paar $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ toelaatbaar is en $v - h \geqslant_2 0$.

4.6.1. <u>Definisie</u>

Laat $u \in H$ en K 'n konvekse versameling in H wees. Laat

$$K_u = \{w : w = t(v-u);\ t \geqslant 0 \ \text{ en } v \in K\}.$$

4.6.2. <u>Definisie</u>

Laat K_u soos in definisie 4.6.1 wees en

$$L_u = \{w \in H : ((w,v)) \geqslant 0 \text{ vir alle } v \in K_u\}.$$

4.6.3. <u>Lemma</u>

a. <u>As</u> K <u>nie leeg is nie</u>, <u>dan is</u> K_u <u>'n keël</u>.

b. L_u <u>is 'n keël</u>, <u>indien</u> K <u>nie leeg is nie</u>.

c. <u>Laat</u> $\geqslant_1$ <u>en</u> $\geqslant_2$ <u>onderskeidelik die orderelasies wees wat met</u> L_u <u>en</u> K_u <u>geassosieer word</u>.

<u>Dan is</u> $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ <u>'n toelaatbare paar</u>.

<u>Bewys</u>.

a. As K nie-leeg is, dan is K_u nie-leeg.

As $w \in K_u$, dan is $tw \in K_u$ vir $t \geqslant 0$. As $v,w \in K$, $t > 0$, $s > 0$ en $r = t/(t+s)$ dan is

$$0 < r < 1 \quad \text{en} \quad w_r = rv + (1-r)w \in K.$$

As $p = t(v-u)$ en $q = s(w-u)$ twee elemente van K_u is, dan volg

$$\begin{aligned} p + q &= t(v-u) + s(w-u) \\ &= (t+s)[r(v-u) + (1-r)(w-u)] \\ &= (t+s)[w_r - u] \in K_u. \end{aligned}$$

b. As K nie-leeg is, dan is K_u nie-leeg. Gevolglik is $0 \in L_u$ en L_u is nie-leeg. Sonder moeite word gesien dat $L_u + L_u \subset L_u$ en $tL_u \subset L_u$ as $t \geqslant 0$. L_u is dus 'n keël.

c(i) Veronderstel $x \geqslant_1 0$. Dan is $x \in L_u$ en

$$((x,y)) \geqslant 0 \text{ vir alle } y \in K_u.$$

Dus $$((x,y)) \geqslant 0 \text{ vir alle } y \geqslant_2 0.$$

(ii) Gestel $((x,y)) \geqslant 0$ vir alle $y \geqslant_2 0$. Dan is $x \in L_u$, want $y \in K_u$ as en slegs as $y \geqslant_2 0$. Dus volg $x \geqslant_1 0$.

4.6.4. Stelling.

Laat H, $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ wees soos in §4.4, J soos in 4.4.7, $h \in H$ en $f \in H^*$. Laat $a(\cdot,\cdot)$ 'n kontinue bilineêre funksionaal op H wees en A die begrensde lineêre operator in § 3.1.1. Laat $\geqslant$ 'n orderelasie in H wees. Die toelaatbare paar $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ is soos in Lemma 4.6.3.

$$K = \{v \in H: v \geqslant h\}. \tag{4.27}$$

Dan is

u 'n oplossing van

$$u \in K: a(u,v-u) \geqslant (f,v-u) \quad \text{vir alle} \quad v \in K \tag{4.28}$$

as en slegs as

u 'n oplossing is van

$$u \geqslant_2 h, \; JAu - Jf \geqslant_1 0, \; \langle Au - f, u - h\rangle = 0 \tag{4.29}$$

Bewys

$$\left.\begin{array}{l} \text{As } u \in K \quad \text{dan is } u - h = (2u - h) - u \in K_u. \\ \\ \text{As } u - h \in K_u \text{ dan is } u \in K, \end{array}\right\} \tag{4.30}$$

want dan is $\quad u = h + t(w - u),\ t \geqslant 0$ en $w \geqslant h$

$$\geqslant h + th - tu$$

en gevolglik is $(t+1)u \geqslant (t+1)h$ en (4.30) volg.

As u 'n oplossing is van (4.28), dan volg via (4.30)

$$u \geqslant_2 h: \quad ((JAu - Jf, w)) \geqslant 0 \text{ vir alle } w \in K_u . \qquad (4.31)$$

en omgekeerd.

Aangesien $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ toelaatbaar is, $h - u \in K_u$ en $u - h \in K_u$ (volgens 4.30), volg (4.29) uit (4.31). Met behulp van (4.30) en dieselfde argument as in die einde van stelling 4.5, word gesien dat (4.29) impliseer 4.28.

4.6.5. Stelling

Laat H, $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$, $a(\cdot,\cdot)$, f, A *en* J *soos in stelling* 4.6.4 *wees*. *Laat* K *'n konvekse deelversameling van* H *wees en* $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ *soos in Lemma* 4.6.3.
Dan is

u *'n oplossing van*

$$u \in K : a(u, v - u) \geqslant \langle f, v - u\rangle \text{ vir alle } v \in K \qquad (4.32)$$

as en slegs as

daar 'n $h \in H$ *bestaan sodanig dat*

$$u \in K : JAu - Jf \geqslant_1 0, \quad \langle Au - f, u - h\rangle = 0 \qquad (4.33)$$

en $v \geqslant_2 h$ *vir elke* $v \in K$. $\qquad$ (4.34)

Bewys.

(4.32) is ekwivalent aan

$$u \in K : a(u,w) \geqslant \langle f, w\rangle \quad \text{vir alle } w \in K_u, \qquad (4.35)$$

wat weer ekwivalent is aan

$u \in K : ((JAu - Jf,w)) \geq 0$ vir alle $w \in K_u$.

Aangesien die paar $(\geq_1, \geq_2)$ toelaatbaar is, volg nou

$$JAu - Jf \geq_1 0.$$

Laat $h = u$ dan is $v \geq_2 h$ vir elke $v \in K$, aangesien vir sulke $v, v - h = v - u \in K_u$. Aangesien $h = u$, volg (4.33) uit (4.32).

Veronderstel omgekeerd dat 'n $h \in H$ bestaan, sodanig dat u aan (4.33) voldoen en (4.34) waar is. Dan is, net soos in die bewys van Stelling 4.5,

$$\begin{aligned} ((JAu - Jf, v - u)) &= ((JAu - Jf, v - h)) + ((JAu - Jf, h - u)) \\ &\geq 0 \quad \text{vir elke } v \in K, \end{aligned}$$

en (4.32) volg.

4.6.6. Opmerkings

a. Die oorspronklike formulering vir variasie-ongelykhede in [49] is in die vorm (4.35), met K_u soos in definisie (4.6.1).

b. Indien die oplossing/oplossings van (4.32) in die inwendige van K lê, dan volg $K_u = H$, aangesien dan $u + V \subset K$, vir 'n geskikte oop versameling V, met $0 \in V$. In hierdie geval is $L_u = \{0\}$ en (4.33) impliseer

$$Au = f, \quad \text{of} \quad a(u,v) = \langle f,v \rangle \text{ vir alle } v \in H,$$

in die variasiekonteks.

c. As die oplossing/oplossings u van (4.32) nie in die inwendige van K lê nie, dan is $u \in \partial K$, die rand van K en L_u bevat 'n nie-nul element. [Stelling 3 in die Bylaag.]

d. Die formulering wat in vergelyking (4.24) gegee is, is 'n meer presiese formulering as (4.1). Dit is belangrik om daarop te let dat die resultaat afhanklik is van die gegewe orderelasies. Hoe meer toelaatbare pare (van orderelasies) bekend is, hoe meer variasie-ongelykhede van die vorm (4.23) met (4.21) kán geformuleer word.

e. Hoewel die resultaat van Stelling 4.6.4 soortgelyk aan dié van Stelling 4.5 is, is daar 'n paar belangrike verskille. In 4.6.4 word die orderelasie $\geqslant_2$ deur 'n gegewe konvekse versameling bepaal. Die orderelasie $\geqslant_1$ kan dan "gekonstrueer" word. In 4.5 is laasgenoemde orderelasie gegee, met die beperking dat die betrokke paar toelaatbaar is in die sin van 4.4.6 b. Hierdie voorwaarde hang af van die gegewe positief, simmetriese bilineêre funksionaal, $(\cdot,\cdot)$, wat nie noodwendig tot 'n Hilbertruimte aanleiding gee nie. (Met ander woorde, die ruimte $\langle H,(\cdot,\cdot)\rangle$ hoef nie volledig te wees nie.) In 4.6.4 is $(\cdot,\cdot)$ egter die inwendige produk van die gegewe Hilbertruimte en gee aanleiding tot 'n volledige metriek.

f. Die voorwaarde $u \in K$ kom steeds voor in (4.33). Indien dit nie só was nie, dan sou elke konvekse versameling, in 'n sekere sin, ekwivalent wees aan 'n versameling K van die vorm 4.21. Laat $w \geqslant_2 0$, $w \neq 0$ en K die versameling in 4.21 wees. Aangesien $v_n = nw + h \geqslant_2 h$ is $v_n \in K$ en K is dus onbegrens. Nie elke konvekse versameling is onbegrens nie.

g. Indien (4.32) 'n eenduidig bepaalde oplossing het dan kan probleme van die vorm 4.33 eenduidig bepaalde oplossings hê (Stelling 4.6.5). Verdere studie van probleme van die vorm (4.33) is op hierdie stadium nog nie gedoen nie. Dit is ook nog nie duidelik of die formulering wat deur (4.33) gesuggereer word, tot nuwe probleme van belang lei nie. In die lig van 2.9.3 c mag hierdie studie moontlik van belang wees.

h. Die bewyse van Stelling 4.5, 4.6.4 en 4.6.5 toon dat die twee betrokke orderelasies nie noodwendig dieselfde is nie. Die eienskappe van die bekende driedimensionele ruimte het tot 4.4.6 a gelei, wat op sy beurt tot 4.4.6 b(ii) veralgemeen is. In die lig hiervan, is orderelasies geassosieer met reghoekige keëls, bestudeer. Die betekenis van (4.23) of (4.24), vir die geval waar die betrokke orderelasies deur reghoekige keëls gegenereer word, is nog nie duidelik nie. Spesifieke voorbeelde behoort bestudeer te word. Hierdie werk beklemtoon egter die groot verskeidenheid probleme wat deur (4.23) gedek word.

Die hoofresultate van die volgende paragraaf is vervat in Stelling 4.7.5 en die voorbeelde in 4.7.7, 4.7.8 c, wat die belang van Hoofstukke 3 en 4 toon.

4.7. Orderelasies en variasie-ongelykhede in die "drie-ruimte-konteks"

Laat X, Y, Z en $<\cdot,\cdot>$ soos in §4.3 wees.

4.7.1. Definisie

Veronderstel daar bestaan 'n orderelasie $\geqslant_1$ in Y en 'n orderelasie $\geqslant_2$ in Z. Die paar $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ heet toelaatbaar in die Y-Z konteks (kortweg gesê: heet toelaatbaar) indien

a. $y \geqslant_1 0$ en $z \geqslant_2 0$ vir $y \in Y$, $z \in Z$ impliseer

$$\langle y,z \rangle \geqslant 0.$$

b. $\langle y,z \rangle \geqslant 0$ vir alle $z \geqslant_2 0$ impliseer $y \geqslant_1 0$.

4.7.2. Stelling

Laat $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ 'n toelaatbare paar in die Y - Z konteks wees. A en Q is soos in (4.16) met Q lineêr. Veronderstel $\mathcal{H} \in Z$ en $Qw_h = \mathcal{H}$. $F \in Y$ is gegee en

$$K = \{v \in D(Q): Q\, v \geqslant_2 \mathcal{H}\}.$$

Veronderstel minstens een van die volgende drie voorwaardes word bevredig.

a. $Q:D(Q) \subset X \to L_2$ is surjektief, waar L_2 die keël geassosieer met die orderelasie $\geqslant_2$ is.

b. Vir elke $z \in L_2$ bestaan daar 'n ry $\{v_n\}$, $Qv_n \geqslant_2 0$, met die eienskap

$$\langle y, Qv_n \rangle \to \langle y,z \rangle,$$

waar $y \in Y$ gegee is.

c. <u>Daar bestaan versamelings</u> $W_1 \subset X$, $W_2 \subset X$ <u>met die volgende eienskappe</u>:

$$Q(W_1) \subset L_2 \quad \text{en } Q(W_2) \subset L_2,$$

$$\langle y, Qw_1 \rangle \geqslant 0 \quad \underline{\text{vir alle}} \quad w_1 \in W_1 \quad \underline{\text{en}}$$

$$\langle y, Qw_2 \rangle \geqslant 0 \quad \underline{\text{vir alle}} \quad w_2 \in W_2$$

<u>impliseer</u>

$$y \geqslant_1 0.$$

<u>Dan is</u>

u <u>'n oplossing van</u>

$$u \in K \cap D(A) : \langle Au - F, Qv - Qu \rangle \geqslant 0 \quad \underline{\text{vir alle}} \; v \in K \cap D(Q) \tag{4.36}$$

<u>as en slegs as</u>

u <u>'n oplossing is van</u>

$$Qu \geqslant_2 \mathcal{K}, \quad Au - F \geqslant_1 0 \quad \underline{\text{en}} \quad \langle Au - F, \mathcal{K} - Qu \rangle = 0. \tag{4.37}$$

<u>Bewys</u>.

Laat u 'n oplossing van (4.36) wees.

Neem $z \geqslant_2 0$ willekeurig. In geval (a) bestaan daar 'n w sodanig dat $Qw = z$ en in geval (b) bestaan daar 'n ry $\{v_n\}$, $Qv_n \geqslant_2 0$ met die eienskap

$$0 \leqslant \langle Au - F, Q(u + v_n) - Qu \rangle = \langle Au - F, Qv_n \rangle \to \langle Au - F, z \rangle,$$

aangesien $u + v_n \in K$.

In geval (a) is $u + w \in K$ en weereens volg $\langle Au - F, z \rangle \geqslant 0$.

Aangesien die paar $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ toelaatbaar is, volg $Au - F \geqslant_1 0$.

In geval (c) is $u + w_1 \in K$ en $u + w_2 \in K$ indien $w_1 \in W_1$ en $w_2 \in W_2$. Gevolglik is

$$0 \leqslant \langle Au - F, Q(u+w_i) - Qu\rangle = \langle Au - F, Qw_i\rangle$$

$$\text{vir } i = 1 \text{ en } 2.$$

Weereens volg $Au - F \geqslant_1 0$.

Aangesien $v = 2u - w_h \in K$ en $v = w_h \in K$ volg

$$0 \geqslant \langle Au - F, \mathcal{H} - Qu\rangle \geqslant 0 \quad \text{uit (4.36).}$$

Veronderstel (omgekeerd) u is 'n oplossing van (4.37). Dan is

$$\langle Au - F, Qv - Qu\rangle = \langle Au - F, Qv - \mathcal{H}\rangle + \langle Au - F, \mathcal{H} - Qu\rangle$$

$$\geqslant 0 \text{ vir alle } v \in K \cap D(Q).$$

Ook is $u \in D(A)$ indien (4.37) geld.

Die bewys is voltooi.

4.7.3. <u>Definisie</u>

Laat $H = L^2(G) \times L^2(S)$ en definieer die keëls L_1 en L_2 in H deur:

$$L_2 = \{\tilde{v} = \{v,q\} \in H : q \geqslant 0 \text{ op } S\},$$

$$L_1 = \{\tilde{u} = \{u,p\} \in H : \langle\tilde{u},\tilde{v}\rangle \geqslant 0 \quad \text{vir alle } \tilde{v} \in L_2\}.$$

Hierbo word H met homself gepaar, deur middel van die gebruiklike inwendige produk, hier aangedui met $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

4.7.4. Lemma

Laat $\geqslant_1$ en $\geqslant_2$ onderskeidelik die orderelasies wees wat met L_1 en L_2 in definisie 4.7.3 geassosieer word

Dan is

a. die paar $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ toelaatbaar in H en

b. $\tilde{u} = \{u,p\} \geqslant_1 0$ as en slegs as

$$u = 0 \text{ byna oral in } G \text{ en } p \geqslant 0 \text{ byna oral op } S.$$

Bewys

a. Dit is maklik om te sien dat L_1 en L_2 keëls is. Die bewys dat die paar $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ toelaatbaar is, is woordeliks identies aan die bewys van Lemma 4.6.3, indien die simbole L_u en K_u dáárin, onderskeidelik vervang word met L_1 en L_2.

b. Indien $\tilde{u} = \{u,p\} \geqslant_1 0$, dan volg

$$(u,v) + [p,q] = \langle\tilde{u},\tilde{v}\rangle \geqslant 0 \text{ vir alle}$$

$$\tilde{v} = \{v,q\} \in L_2.$$

Aangesien $\{v,0\} \in L_2$ vir elke $v \in L^2(G)$ volg direk $u = 0$ byna oral in G.

Die keuse $\tilde{v} = \{0,q\}$ met $q \geqslant 0$ op S lewer

$$[p,q] \geqslant 0$$

en gevolglik $p \geqslant 0$ byna oral op S.

4.7.5. Stelling (Interpretasie van die variasie-ongelykhede in voorbeeld 2 paragraaf 3.3.2)

Laat u 'n oplossing wees van (3.61), in die konteks van Stelling 3.4.4 (geval 1), of 'n oplossing van (3.71), in die konteks van Lemma 3.4.7 en Stelling 3.4.8. (geval 2).

Dan is u 'n oplossing van

$$rT_o u \geqslant h, Nu \geqslant g, \ (Nu - g)(rT_o u - h) = 0 \text{ op } S; \ Lu = f \text{ in } G. \tag{4.38}$$

en omgekeerd, met die verstandhouding dat

$$r = 1, \ h = 0, \ Nu = T_o u + T_1 u, \ T_1 u = n_i D_i u, \ Lu = -\Delta u + u \tag{4.39}$$

in geval 1 en

$$r \text{ bevredig } 3.48 - 3.49, \ \frac{h}{r} \in H^{\frac{3}{2}}(S), \ Nu = rT_o u + T_1 u,$$

$$T_1 u = a_{ij} n_j D_i u, \ Lu = -D_i(a_{ij} D_j u) + a_o u \tag{4.40}$$

in geval 2. In geval 1 word G en S in Lemma 3.4.1 gedefinieer. In geval 2 is G en S weer soos in §3.2.

Bewys

Laat

$$Au = \{Lu, Nu\}$$

en $\quad Qu = \{u, T_o u\}$,

waar L en N hulle betekenisse het soos gevra. Op grond van die twee regulariteitstellings (3.4.4 en 3.4.8) kan die betrokke variasie-ongelykhede in die vorm

$$u \in K \cap D(A): \ \langle Au - F, Qv - Qu \rangle \geqslant 0 \text{ vir alle } v \in K \quad \text{geskryf}$$

word. Laat $\mathcal{H} = \{w_h, \frac{h}{r}\}$ met $w_h \in H^2(G)$ en $T_o w_h = h/r \in H^{\frac{3}{2}}(S)$. Sô 'n w_h bestaan op grond van [35, Th. 8.3, p 39].

Laat $X = H^1(G)$, $Y = Z = H$ met H soos in Definisie 4.7.3. Laat $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ die toelaatbare paar van Lemma 4.7.4 wees.

Die versamelings K van Stelling 3.4.4 en Lemma 3.4.7, stem ooreen met die versameling K van Stelling 4.7.2.

Aangesien $Qw_h = \mathcal{H}$ moet nog net voorwaarde (a) of (b) of (c) geld om Stelling 4.7.2 toe te pas.

Laat $W_1 = C_o^\infty(G)$ en

$$W_2 = \{w \in H^1(G) : T_o w \geqslant 0 \text{ op } S \text{ byna oral}\}.$$

Dan $QW_i \subset L_2$ vir $i = 1, 2$.

Laat $y = \{u,p\} \in Y$ en veronderstel die twee ongelykhede in 4.7.2.(c) is gegee.

Aangesien $C_o^\infty(G)$ dig in $L^2(G)$ is, volg $u = 0$ uit die eerste ongelykheid. Uit die tweede ongelykheid volg $p \geqslant 0$ byna oral op S, aangesien

$T_o : H^1(G) \to H^{\frac{1}{2}}(S)$ surjektief is en $C^\infty(S)$ dig is in $L^2(S)$, sien [35, p 39, p 35].

Uit Lemma 4.7.4.(b) volg nou $y \geqslant_1 0$.

Al die voorwaardes vir Stelling 4.7.2 word bevredig en deur Lemma 4.7.4 met Stelling 4.7.2 te kombineer volg

$T_o u \geqslant h/r$, $Nu \geqslant g$ op S; $Lu = f$ in G en $[Nu-g, T_o u - h/r] = 0$.

Hieruit volg $(Nu-g)(rT_o u - h) = 0$ op S en die stelling is bewys.

4.7.6. Opmerkings.

a. Dit is moontlik om voorwaarde (b) in plaas van voorwaarde (c) aan te toon in die vorige stelling, ten einde Stelling 4.7.2 te gebruik.

Indien $z = \{v,q\} \geqslant_2 0$ dan bestaan daar $q_n \in C^\infty(S)$ met $q_n \geqslant 0$ op S en $q_n \to q$ in $L^2(S)$ (sien afspraak 3.2.6).

Veronderstel $T_o w_n = q_n$ met $w_n \in H^1(G)$, [35, p 39].

Veronderstel $G_k \subset \bar{G}_k \subset G_{k+1} \subset \bar{G}_{k+1} \subset \ldots\ldots \subset G$,

G_n is 'n oop versameling en $\cup G_n = G$.

Laat $\rho_n \in C_o^\infty(G)$ met $|\rho_n(x)| \leqslant 1$ in G

en $\rho_n(x) = 1$ vir $x \in G_n$, $\rho_n(x) = 0$ vir $x \notin G_{n+1}$.

Stel $w_k^n = \rho_k v + (1-\rho_k)\, w_n$. Dan volg

$$T_o w_k^n = T_o w_n = q_n \geqslant 0 \quad \text{op } S \quad \text{en}$$

gevolglik $Q w_k^n \geqslant_2 0$.

Uit Lebesgue se gedomineerde konvergensie stelling [18, III 3,7, p 124] volg

$$w_k^n \to v \text{ in } L^2(G) \quad \text{as } k \to \infty.$$

Stel $v_n = w_{k_n}^n$, waar $k_n \to \infty$ en

$$\|w^n_{k_n} - v\|_o < \frac{1}{n}.$$

Dan volg $Qv_n \geqslant_2 0$ en

$$\begin{aligned}\|Qv_n - \{v,q\}\|_H &\leqslant \|Qv_n - \{v,q_n\}\|_H \\ &\quad + \|\{v,q_n\} - \{v,q\}\|_H \\ &\leqslant \|w^n_{k_n} - v\|_o + \|q_n - q\|^S_o \\ &< \frac{1}{n} + \|q_n - q\|^S_o \to 0.\end{aligned}$$

Aangesien $|\langle y,z\rangle| \leqslant \|y\|_H \|z\|_H$ en $Qv_n \to z$ in H, volg voorwaarde (b).

b. Die probleme in stelling 4.7.5 word in die vorm 4.17 geskryf. In die geval is

$$A\colon\ H^2(G) = D(A) \subset X = H^1(G) \to Y = H = L^2(G) \times L^2(S)$$

$$Au = \{Lu,Nu\},\ Nu = rT_o u + T_1\ u.$$

$$Q\colon\ H^1(G) = D(Q) \subset X \to Z = Y.$$

$$Qu = \{u,T_o u\}$$

K is 'n konvekse geslote versameling in X. Dit is belangrik om daarop te let dat die voorwaarde

$$u \in D(A) \cap D(Q) = D(A) \text{ in } (4.17),$$

in hierdie voorbeeld 'n regulariteitsvoorwaarde is.

4.7.7. Voorbeelde

Die doel van hierdie voorbeelde is om die werk in hoofstuk 3, § 3.2 met die resultate van hierdie hoofstuk te kombineer en sodoende sekere variasie-ongelykhede te interpreteer. Die bestaanstellings wat benodig word is dié in § 3.1.

Laat

$$R(u,w) = (Lu,Lw) + a(u,w) + [p\,T_o u, T_o w] + [qT_1 u, T_1 w]\,, \tag{4.41}$$

waar $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$; $p,q \in L^{\infty}(S)$ en

L, a onderskeidelik deur (3.14), (3.15) gegee word.

Laat K_i konvekse geslote deelversamelings van V_i wees (sien § 3.2).

Laat $(Au,w) = R(u,w)$. Stelling 3.1.9 kan toegepas word, met $X = V_o$ as $q = 0$ en $p \geqslant 0$ op S en $X = V_1$ as $p \geqslant 0$ en $q \geqslant \alpha > 0$ op S.

Indien $J_i \in \Gamma_o(V_i)$ dan kan Stelling 3.1.10 gebruik word.

Laat $Y = Z = L^2(G) \times L^2(S)$ met $\langle \cdot,\cdot \rangle$ die inwendige produk.

<u>Voorbeelde in die raamwerk van § 4.3.</u>

a. $Au = \{Lu, rT_1 u + sT_o u\}$, $r > 0$, $\frac{s}{r} \geqslant 0$ en $\frac{s}{r} \in L^{\infty}(S)$.

$$Qw = \{Lw + w, \tfrac{1}{r}\,T_o w\}\,.$$

Dan is $\langle Au,Qw \rangle = (Lu,Lw) + a(u,w) + [\frac{s}{r}T_o u, T_o w]$

$$= R(u,w) \text{ met } p = \tfrac{s}{r} \text{ en } q = 0.$$

b. $Au = \{Lu, rT_1 u\}$, $r \neq 0$ op S.

$Qw = \{Lw + w, \frac{1}{r} T_o w + sT_1 w\}$,

$0 < \alpha \leqslant rs$ op S en $rs \in L^\infty(S)$.

Dan is $\langle Au, Qw \rangle = (Lu, Lw) + a(u,w) + [rsT_1 u, T_1 w]$

$= R(u,w)$ met $p = 0$, $q = rs$.

c. $Au = \{Lu, rT_1 u\}$, $r \geqslant \delta > 0$ op S, $r \in L^\infty(S)$.

$Qw = \{Lw, T_1 w\}$

$\langle Au, Qw \rangle = (Lu, Lw) + [rT_1 u, T_1 w]$.

In hierdie geval is $X = V_1$. Die koërsiwiteit van die bilineêre vorm

$$\{u,w\} \to \langle Au, Qw \rangle$$

volg uit Opmerking 3.2.5.(d).

4.7.8. <u>Opmerkings ten opsigte van 4.7.7</u>.

a. In voorbeeld (a) is $X = V_o$. In die lig van opmerking 3.2.5.c is dit duidelik dat A nie 'n begrensde operator is nie, selfs al was $r,s \in L^\infty(S)$. A kan dus nie aanleiding gee tot 'n pseudomonotone operator (2.10.1.e) nie.

b. Die variasie-ongelykhede wat in §4.7.7 gesuggereer word, kan almal in die vorm (4.17) geskryf word. Geen regulariteitsresultate word benodig nie. In al drie gevalle is

$$D(A) = D(Q) = V.$$

c. Laat $R(u,w) = (Lu,Lw) + a(u,w) + [sT_1 u, rT_1 w]$

$$= (Lu + u, Lw) + [\frac{1}{r}T_0 u + sT_1 u, rT_1 w] \qquad (4.42)$$

indien $a(u,w) = a(w,u)$.

Indien $0 < \alpha \leqslant rs$ op S en $rs \in L^\infty(S)$ soos in 4.7.7.b, dan het die probleem

$$u \in V_1 : R(u,w) = (f, Lw) + [g, rT_1 w] \qquad \text{vir alle} \quad w \in V_1 \qquad (4.43)$$

'n eenduidige oplossing. Indien $\frac{1}{r} \in L^\infty(S)$ dan het die probleme van die vorm

$$Lw = \phi \text{ in } G, \qquad \phi \in L^2(G)$$
$$T_1 w = \psi/r \text{ op } S, \qquad \psi \in L^2(S)$$

volgens Stelling 3.2.1.(d) unieke oplossings.

Uit (4.42) en (4.43) volg nou

$$(Lu + u, \phi) + [\frac{1}{r} T_0 u + sT_1 u, \psi] = (f, \phi) + [g, \psi]$$

vir elke $\phi \in L^2(G)$ en $\psi \in L^2(S)$.

Gevolglik is u 'n oplossing van

$$u \in V_1 : Lu + u = f \text{ in } G$$
$$\frac{1}{r} T_0 u + sT_1 u = g \text{ op } S. \qquad (4.44)$$

Op grond van (4.44) en (3.20) is dit duidelik dat die operatore

$$Q : D(Q) \subset X \to Z$$

in voorbeelde 4.7.7.a, b en c surjektief is.

Indien die toelaatbare paar $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ van Lemma 4.7.4 weer gebruik word, dan volg uit Stelling 4.7.2 dat die drie voorbeelde in 4.7.7 met die volgende ooreenstem:

a. $T_o u \geqslant h,\ rT_1 u + sT_o u \geqslant g,\ (rT_1 u + sT_o u - g)(T_o u - h) = 0$ op S en

$$Lu = f \text{ in } G.$$

b. $\frac{1}{r} T_o u + sT_1 u \geqslant h,\quad rT_1 u \geqslant g,\ (rT_1 u - g)(\frac{1}{r} T_o u + sT_1 u - h) = 0$ op S en

$$Lu = f \text{ in } G.$$

c. $T_1 u \geqslant h,\quad rT_1 u \geqslant g,\quad (rT_1 u - g)(T_1 u - h) = 0$ op S

en $\quad Lu = f$ in G.

HOOFSTUK 5

EVOLUSIE-ONGELYKHEDE MET DINAMIESE VOORWAARDES OP DIE RAND

5.1. Inleiding

Die volgende voorbeeld word in [34, p 284] gevind:

$$-D_i(|D_i w|^{p-2} D_i w) + |w|^{p-2} w = 0 \text{ in } G \times I,\ I = (o,T),$$

$$w \geqslant 0 \text{ op } S \times I,$$

$$\partial w/\partial t + |D_i w|^{p-2} D_i w n_i \geqslant f \quad \text{op } S \times I,$$

$$w(\partial w/\partial t + |D_i w|^{p-2} D_i w n_i - f) = 0 \quad \text{op } S \times I,$$

$$w(x,0) = 0, \quad x \in S.$$

'n Tweede voorbeeld [34, p 282]:

$$\partial u/\partial t - D_i(|\partial_i u|^{p-2} \partial_i u) + |u|^{p-2} u = f \text{ in } G \times I,$$

$$u \geqslant 0 \quad \text{op } S \times I,$$

$$|D_i w|^{p-2} D_i w n_i \geqslant 0 \quad \text{op } S \times I,$$

$$u |D_i w|^{p-2} D_i w n_i = 0 \quad \text{op } S \times I,$$

$$u(x,o) = u(x,T), \quad x \in G.$$

In die eerste voorbeeld verskyn tydafgeleides, $\partial w/\partial t$ in relasies op die rand $S \times I$. In voorbeeld twee verskyn sulke terme ($\partial u/\partial t$) in 'n vergelyking gedefinieer in die gebied $G \times I$.

In hierdie hoofstuk word evolusie-ongelykhede in die raamwerk van hoofstuk 3 bestudeer. Tydafgeleides, $\partial u/\partial t$, gedefinieer in die gebied $G \times I$ kom voor, tesame met tydafgeleides van kombinasies van die oplossing en die konormale afgeleide van die oplossing $(\partial(rT_0 u + sT_1 u)/\partial t)$ op die rand $S \times I$. Die evolusie-ongelykhede kan met behulp van die resultate van hoofstuk 4 geïnterpreteer word.

Vir $p \neq 2$ in die twee voorbeelde hierbo is die betrokke operatore nie-lineêr. In hierdie hoofstuk sal die operatore altyd lineêr wees, behalwe A in Stelling 5.4. Simmetrie, al dan nie, van die bilineêre vorm $a(\cdot,\cdot)$ (sien 3.15), speel geen rol in toepassings van Stelling 5.4 nie. In § 5.7 is simmetrie van $a(\cdot,\cdot)$ egter 'n voorvereiste.

'n "Relatief" kunsmatige benadering word in [34, 9.55, p 283] gevolg, ten opsigte van die eerste voorbeeld hierbo. Die operator A, byvoorbeeld, werk in op elemente van $W^{1/p',p}(S)$, via elemente van $W^{1,p}(G)$. In hierdie hoofstuk word 'n meer direkte benadering gevolg, maar slegs ten opsigte van lineêre operatore, in teenstelling met die werk in (byvoorbeeld) [34].

Soos met variasie-ongelykhede die geval was, is daar ook baie werk met betrekking tot evolusie-ongelykhede in die Literatuur beskikbaar.

Die verwysings wat gegee word [4], [8], [19], [21], [23], [28], [31], [33] en [34] is nie verteenwoordigend van die nuutste of volledigste werk in hierdie verband nie, maar aangesien daar steeds publikasies oor evolusie-ongelykhede verskyn, is dit nie moeilik om verdere verwysings te kry nie. Die Literatuur wat in hierdie hoofstuk van belang is, is [4], [17], [26] en [34].

5.2. Afspraak en 'n voorskou

Let op dat afspraak 3.2.6 ook op hierdie hoofstuk van toepassing is. Die operator L sal altyd deur (3.14) en die bilineêre vorm $a(\cdot,\cdot)$ deur (3.15) gedefinieer word. Die simbole V, V_0 en V_1 staan vir die versameling V en Hilbertruimtes V_0, V_1 soos in paragraaf 3.2.

Stelling 5.4 is die eerste bestaanstelling vir evolusie-ongelykhede wat bewys word. In § 5.6 word voorbeelde gegee. In § 5.7 word 'n ander benadering gevolg en voorbeelde word gegee. Die eerste benadering, § 5.3 ... 5.6, benodig 'n regulariteitstelling (ten opsigte van die tydafgeleides) wat in § 5.8 gegee word.

5.3. Abstrakte raamwerk

Die ruimtes X, Y en Z en die operator A en Q sal soos in § 4.3 wees. Verder word vereis dat:

(i) X, Y en Z is Banachruimtes en X is refleksief.

(ii) Die ruimtes Y en Z is gepaar (sien § 4.3), met $\langle y,z \rangle$ vir $y \in Y$ en $z \in Z$ die (geassosieerde) bilineêre funksionaal.

(iii) $|\langle y,z \rangle| \leq \|y\|_Y \, \|z\|_Z$, vir alle $y \in Y$ en $z \in Z$.

$\|\cdot\|_Y$ en $\|\cdot\|_Z$ is respektiewelik die norms van Y en Z.

(iv) $A: D(A) \subset X \to Y$; $B: D(B) \subset X \to Y$ en

$Q: X \to Z$.

B en Q is lineêr.

(v) K is 'n gegewe geslote konvekse deelversameling van X en $F \in Z$.

(vi) $-E$ is die infinitesimale generator van 'n B-evolusie $\{S(t) : t > 0\}$ sien [45]; die teorie van B-evolusies word egter nie in hierdie werk gebruik nie. Wat wel van belang is, is die volgende:

$$S(t) : R(B) \subset Y \to D(B) \quad \text{en is lineêr,}$$

$$-E_h u = h^{-1}[BS(h)Bu - Bu] \quad \text{vir} \quad u \in D(B),$$

$u \in D(E)$ as $\lim\limits_{h\to 0} E_h u$ bestaan (in Y) en dan is

$$Eu = \lim E_h u.$$

(vii) Daar bestaan 'n oop konvekse versameling

$$W_o \subset X \quad \text{en} \quad K \subset W_o \subset \bar{W}_o \subset D(A) \cap D(B).$$

(viii) $\langle Bu - BS(h)Bu, Qu\rangle \geqslant 0$ vir alle h met $|h| < \delta$.

(ix) $\|Qw\|_Z \leqslant c_q \|w\|$ en $\|\cdot\|$ dui die norm in X aan.

(x) Die operator $R : D(A) \subset X \to X^*$ word as volg gedefinieer:

$$u \in D(A) : (Ru,w) = \langle Au,Qw \rangle \text{ vir alle } w \in X.$$

(xi) Die operator R is monotoon, hemikontinu en begrens (definisies 2.10.1).

(xii) Daar bestaan 'n $u_o \in K \cap D(E)$ sodanig dat

$$(Ru,u-u_o)/\|u\| \to \infty \text{ as } \|u\| \to \infty .$$

(xiii) As $v \in K$, dan bestaan daar 'n ry $\{v_n\} \subset K \cap D(E)$ sodanig dat

$$v_j \to v \quad \text{in } X \quad \text{en}$$

$$\limsup \langle Ev_j,Qv_j - Qv \rangle \leqslant 0.$$

(xiii)* $\inf\limits_{v \in K \cap D(E)} \{\langle Ev - F, Qv - Qu \rangle + (\chi,v-u)\} \leqslant 0$

indien $\chi \in X^*$.

5.4. Stelling

Indien $D(A) = X$ en die voorwaardes 5.3(i) tot (xii), asook een van (xiii) en (xiii)* gegee is, dan het die probleem

$$u \in K : \langle Ev + Au - F, Qv - Qu \rangle \geqslant 0 \quad \text{vir alle} \quad v \in K \cap D(E)$$

'n eenduidige oplossing.

Bewys

Dieselfde argument as in [34, Th. 9.2, p 271] word gebruik. Die operator E verskil egter wesenlik van die operator Λ in [34], aangesien

$$E : D(E) \subset X \to Y \quad \text{en} \quad \Lambda : D(\Lambda) \subset X \to X^*.$$

Vir enige $u \in D(B)$ is $\langle E_h u, Qu \rangle \geqslant 0$ as $|h| < \delta$. (5.1)

Definieer $B_h : D(B) \subset X \to X^*$ deur

$v \in D(B) : (B_h v, w) = \langle E_h v + Av, Qw \rangle$ vir alle $w \in X$.

Laat $(y^*, w) = \langle F, Qw \rangle$ vir alle $w \in X$,

met $y^* \in X^*$ op grond van 5.3(iii) en (ix).

$$(B_h u - y^*, u - u_o) = \langle E_h(u - u_o), Q(u - u_o) \rangle$$

$$+ \langle E_h u_o, Q(u - u_o) \rangle + (Ru - y^*, u - u_o)$$

$$\geqslant -C[1 + \|u\|] + (Ru, u - u_o), \quad \text{as } |h| < \delta,$$

op grond van (5.1) en 5.3(iii) en (ix).

Op grond van 5.3(xii) volg nou (vir $|h| < \delta$)

$(B_h u - y^*, u - u_o)/\|u\| \to \infty$ as $\|u\| \to \infty$.

Laat voortaan $|h| < \delta$.

B_h is duidelik monotoon en hemikontinu. Volgens Stelling 3.1.9 bestaan daar 'n $u_h \in X$ met

$$u_h \in K : (B_h u_h - y^*, v - u_h) \geqslant 0 \quad \text{vir alle } v \in K. \tag{5.2}$$

Die keuse $v = u_o$ in (5.2) lewer

$$(Ru_h, u_h - u_o) \leqslant \|y^*\|_{X^*} \|u_h - u_o\| + \langle E_h u_h, Q(u_o - u_h)\rangle$$

$$\leqslant c[1 + \|u_h\|] + \langle E_h(u_h - u_o), Q(u_o - u_h)\rangle$$

$$+ \langle E_h u_o, Q(u_o - u_h)\rangle$$

$$\leqslant c^*[1 + \|u_h\|], \text{ op grond van}$$

(5.1) en 5.3(iii), (ix).

Gevolglik is $\{\|u_h\|\}$ en $\{\|Ru_h\|_{X^*}\}$ begrens, aangesien R 'n begrensde operator is en 5.3(xii) gegee is. Daar bestaan dus 'n deelry $\{u_j\}$ met die eienskappe

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{(swak) in } X, \ u \in K \tag{5.3}$$

$$\text{en} \quad Ru_j \longrightarrow \chi \quad \text{(swak) in } X^*. \tag{5.4}$$

Aangesien R begrens, hemikontinu en monotoon is, is dit Pseudo-monotoon [34, p 179].

Aangesien

(i) $\langle E_j v - F, Q(v - u_j)\rangle \geqslant \langle E_j u_j - F, Q(v - u_j)\rangle$

volgens (5.1)

$= (B_j u_j - y^*, v - u_j)$

$-(Au_j, Q(v - u_j))$

$\geqslant (Ru_j, u_j - v)$ uit (5.2) en § 5.3(x),

(ii) $\|Qu_j\|_Z \leqslant C_q\|u_j\| \leqslant M$ (sê), en

(iii) $|\langle E_j v, Qu_j\rangle - \langle Ev, Qu\rangle|$

$$= |\langle E_j v - Ev, Qu_j\rangle + \langle Ev, Q(u_j - u)\rangle|$$

$$\leqslant M\|E_j v - Ev\| + |\langle Ev, Q(u_j - u)\rangle| \to 0$$

volg

$$\limsup (Ru_j, u_j) \leqslant \langle Ev - F, Q(v - u)\rangle + (\chi, v)$$

$$\text{vir } v \in K \cap D(E), \qquad (5.5)$$

uit (i), (iii) met inagname van (5.3), (5.4).

Uit (5.5) volg nou

$$\lim\sup(Ru_j, u_j - u) \leqslant \langle Ev - F, Q(v - u)\rangle + (\chi, v - u)$$

$$\text{indien } v \in D(E) \cap K. \qquad (5.6)$$

Beide aanname 5.3 xiii en aanname 5.3 xiii* impliseer

$$\limsup (Ru_j, u_j - u) \leqslant 0 \text{ via } (5.6).$$

Aangesien R pseudo-monotoon is, volg

$$\liminf (Ru_j, u_j - v) \geqslant (Ru, u - v) \text{ vir alle}$$

$$v \in K \cap D(E). \qquad (5.7)$$

Uit (5.5) volg

$$\langle Ev - F, Q(v-u) \rangle \geqslant \liminf (Ru_j, u_j - v)$$

$$\geqslant (Ru, u - v) \qquad \text{uit } (5.7)$$

$$= \langle Au, Qu - Qv \rangle \quad \text{vir } v \in K \cap D(E).$$

5.5. Opmerkings

a. Indien die voorwaarde R hemikontinu, monotoon en begrens in Stelling 5.4 vervang word met R pseudomonotoon, dan bly die uitspraak van die stelling steeds waar. In plaas van Stelling 3.1.9 lewer Stelling 2.10.4 die ry $\{u_h\}$ in vergelyking (5.2).

b. Aangesien die operator Q lineêr is, en R monotoon (sien 5.3 xi) sal A moontlik ook lineêr moet wees, afhangende van die ingewikkeldheid van die operator Q.

5.6. Voorbeelde

5.6.1. Afspraak. In hierdie paragraaf word die $L^2(S)$ norm met $|\cdot|$ aangedui. Dus $|g| = \|g\|_o^S$ vir $g \in L^2(S)$.

$(\cdot,\cdot)$ en $[\cdot,\cdot]$ is soos in paragraaf 4.2 en ook in 4.1.1, hoofstuk 4.

$$X_i = L^2(o,T;V_i) \quad \text{vir } i = 0 \text{ en } 1, \tag{5.8}$$

$$Y_o = L^2(o,T;L^2(G) \times L^2(S)), \tag{5.9}$$

$$K_i = \{u \in V_i : rT_i u \geqslant h \text{ op } S\} \text{ en } h \leqslant 0 \text{ op } S. \tag{5.10}$$

5.6.1.a. $X = X_1$ en $Y = Y_o = Z$.

'n Paring tussen Y en Z word uit 4.14 verkry deur die regterkant van 4.14 oor (o,T) te integreer, mits $\{u,g\}$,

$\{v,h\} \in Y_o$.

$$Bu = \{u, rT_o u + sT_1 u\},$$

$$Qw = \{Lw, \frac{1}{r} T_1 w\},$$

$$Au = \{Lu, qT_1 u\}.$$

$r(x) > 0$, $s(x) \geqslant 0$ en $q(x)/r(x) \geqslant \delta > 0$ op S. $(\delta \leqslant 1.)$

$r,\ s,\ q,\ 1/r,\ s/r,\ q/r \in L^\infty(S)$.

$$S(h)Bu(t) = \begin{cases} u(t-h) & \text{as } t-h > 0 \\ 0 & \text{andersins.} \end{cases}$$

$$D(E) = \{v \in X : v(o) = 0,\ (Bv)' \in Y\}.$$

$$\langle BS(h)Bu, Qu\rangle = \int_h^T \{(u(t-h), Lu(t)) + [T_o u(t-h), T_1 u(t)] + [\tfrac{s}{r} T_1 u(t-h), T_1 u(t)]\}dt$$

$$= \int_h^T \{(Lu(t), u(t-h)) + [T_1 u(t), T_o u(t-h)] + [\tfrac{s}{r} T_1 u(t), T_1 u(t-h)]\}dt$$

$$\leqslant \{\int_h^T \{\hat{a}(u(t)) + |\sqrt{\tfrac{s}{r}}\, T_1 u(t)|^2\}dt\}^{\frac{1}{2}} \{\int_h^T \{\hat{a}(u(t-h)) + |\sqrt{\tfrac{s}{r}}\, T_1 u(t-h)|^2\}dt\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \langle Bu, Qu\rangle .$$

Dus $\quad \langle Bu - BS(h)Bu, Qu\rangle \geqslant 0.$

$$\langle Au, Qu\rangle = \int_o^T \{\|Lu(t)\|^2 + |\sqrt{\tfrac{q}{r}}\, T_1 u(t)|^2\}dt$$

$$\geqslant \delta \int_o^T \{\|Lu(t)\|^2 + |T_1 u(t)|^2\}dt$$

$$\geqslant c\|u\|_X^2 \qquad \text{volgens § 3.2.5.c.}$$

Laat $K = \{u : u(t) \in K_1$ vir alle $t \in (o,T)\}$.

Kies $u_o = 0 \in K \cap D(E)$.

$(Ru,u)/\|u\|_X \to \infty$ as $\|u\|_X \to \infty$, en 5.3 xii word bevredig.

Laat

$$u_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}} u(s)ds \quad \text{en} \quad u \in K.$$

Aangesien $0 \in K$ en $e^{-t/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}} ds = 1$,

volg dat $u_\varepsilon(t) \in K$, vir elke t.

Volgens [4, p 68] sal $u_\varepsilon \to u$ in X en

$$u_\varepsilon + \varepsilon\frac{du_\varepsilon}{dt} = u \quad \text{op } I,$$

$$u_\varepsilon(o) = 0.$$

Aangesien T_o en T_1 kontinue afbeeldings van X in Y is volg uit [18, III 6.20, p 153] dat

$$T_i u_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}} T_i u(s)ds.$$

Gevolglik is $T_i u_\varepsilon + \varepsilon \frac{d}{dt} T_i u_\varepsilon = T_i u$ op I,

$$T_i u_\varepsilon(0) = 0.$$

Nou volg $\varepsilon E u_\varepsilon = \varepsilon \frac{d}{dt} B u_\varepsilon = B(u-u_\varepsilon)$

en $\langle Eu_j, Qu_j - Qu\rangle = \langle B(u - u_j), Q(u_j - u)\rangle/\varepsilon$

$$\leqslant 0.$$

Die voorwaardes vir Stelling 5.4 word bevredig en as $u \in D(E)$, soos in 5.7.14 aangetoon sal word, dan volg vir $F = \{f,g\} \in Y$ dat

$$\frac{du}{dt} + Lu = f \quad \text{in } G \times I, \quad I = (o,T),$$

$$\frac{d}{dt}(rT_o u + sT_1 u) + qT_1 u \geqslant g \quad \text{op } S \times I,$$

$$rT_1 u \geqslant h \quad \text{op } S \times I,$$

$$\left(\frac{d}{dt}(rT_o u + sT_1 u) + qT_1 u - g\right)(rT_1 u - h) = 0 \text{ op } S \times I,$$

byna oral,

$$u(o) = 0 \quad \text{in } G.$$

5.6.1.b. $X = X_1$, $Y = Y_o = Z$.

$$Bu = \{u, rT_o u\},$$

$$Qw = \{Lw + w, sT_o w + \frac{1}{r} T_1 w\}, \quad Nw = sT_o w + \frac{1}{r} T_1 w,$$

$$Au = \{Lu, q(sT_o u + \frac{1}{r} T_1 u)\}.$$

$$r(x) > 0, \ s(x) \geqslant 0, \ 2q(x)s(x)/r(x) = 1, \ \frac{q(x)}{r^2(x)} \geqslant \delta > 0 \text{ op } S.$$

$r, q, s, 1/r \in L^\infty(S)$.

$S(h)$, $D(E)$ is soos in voorbeeld a.

$$\langle BS(h)Bu, Qu\rangle = \int_h^T \{(u(t-h), Lu(t)) + [T_o u(t-h), T_1 u(t)]$$

$$+ (u(t-h), u(t)) + [rsT_o u(t-h), T_o u(t)]\} \, dt$$

$$= \int_h^T \{a(u(t), u(t-h)) + (u(t), u(t-h)) + [T_o u(t), rsT_o u(t-h)]\} \, dt$$

$$\leqslant \{\int_h^T \{\hat{a}(u(t)) + \|u(t)\|_o^2 + |\sqrt{rs}\, T_o u(t)|^2\} dt\}^{\frac{1}{2}} .$$

$$\{\int_h^T \{\hat{a}(u(t-h)) + \|u(t-h)\|_o^2 + |\sqrt{rs}\, T_o u(t-h)|^2\} dt\}^{\frac{1}{2}}$$

$\leqslant \langle Bu, Qu\rangle$ en 5.3 viii word bevredig.

$$\langle Au,Qu\rangle = \int_o^T\{\|Lu(t)\|_o^2 + (Lu(t),u(t)) + |\sqrt{q}\, sT_o u(t)|^2 + |\frac{\sqrt{q}}{r} T_1 u(t)|^2$$

$$+ [2qs/r\, T_1 u(t), T_o u(t)]\}dt$$

$$= \int_o^T\{\|Lu(t)\|_o^2 + \hat{a}(u(t)) + |\sqrt{q}\, sT_o u(t)|^2 + |\frac{\sqrt{q}}{r} T_1 u(t)|^2\}dt$$

$$\geq \delta\|u\|_X^2, \quad \text{as } 0 < \delta < 1.$$

Laat $K_{r,s} = \{v \in V_1 : sT_o v + \frac{1}{r} T_1 v \geq h \text{ op } S\}$, $h \leq 0$

en $K = \{u \in X : u(t) \in K_{r,s}$ vir alle $t \in (o,T)\}$.

Met behulp van soortgelyke argumente as in voorbeeld (a) kan gesien word dat die voorwaardes vir Stelling 5.4 bevredig word. Indien $u \in D(E)$ dan volg vir F soos in voorbeeld (a) dat u 'n oplossing is van

$$\frac{du}{dt} + Lu = f \quad \text{in } G \times I, \quad I = (o,T),$$

$$\frac{d}{dt}(rT_o u) + qNu \geq g \quad \text{op} \quad S \times I,$$

$$Nu \geq h \quad \text{op} \quad S \times I,$$

$$(\frac{d}{dt}(rT_o u) + qNu - g)(Nu - h) = 0 \quad \text{op } S \times I,$$

$$u(o) = 0 \quad \text{in } G.$$

5.6.1.c $X = L^2(o,T;H^1(G))$, $Z = L^2(o,T;H^1(G) \times L^2(S))$, $Y = Z^*$.

$$\langle Bu,\{z_1,z_2\}\rangle = \int_o^T\{(u,z_1) + [rT_o u,z_2]\}dt$$

vir $z = \{z_1,z_2\} \in Z$.

$$D(B) = X \text{ en } r(x) \geqslant 0 \quad \text{op } S.$$

$$\langle Au,\{z_1,z_2\}\rangle = \int_o^T a(u,z_1)dt \text{ vir } z = \{z_1,z_2\} \in Z.$$
$$D(A) = X.$$

$$Qw = \{w,T_o w\} \quad \text{en} \quad D(Q) = X.$$

D(E), S(h), F word gedefinieer soos in 5.6.1.a.

$$\langle BS(h)Bu,Qu\rangle = \int_h^T\{(u(t-h),u(t)) + [rT_o u(t-h),T_o u(t)]\}dt$$

$$\leqslant \{\int_h^T\{\|u(t-h)\|_o^2 + |\sqrt{r}\ T_o u(t-h)|^2\}dt\}^{\frac{1}{2}}\{\int_o^T\{\|u(t)\|_o^2 + |\sqrt{r}T_o u(t)|^2 dt\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \langle Bu,Qu\rangle.$$

$$\langle Au,Qu\rangle = \int_o^T a(u,u)dt \geqslant c\|u\|_X^2.$$

$$K = \{u: u(t) \in K_o \quad \text{vir } t \in (o,T)\}.$$

Op dieselfde manier as in 5.6.a kan aangetoon word dat

$$\langle Eu_j,Qu_j - Qu\rangle \leqslant 0 \text{ en } u_j \to u \text{ in } X.$$

Stelling 5.4 kan toegepas word en met behulp van 'n regulariteitstelling wat later volg, word gesien dat die oplossing u van die probleem in Stelling 5.4 voldoen aan:

$$du/dt + Lu = f \quad \text{in} \quad G \times I,$$

$$d(rT_o u)/dt + T_1 u \geqslant g \quad \text{op} \quad S \times I,$$

$$rT_o u \geqslant h \quad \text{op} \quad S \times I,$$

$$[d(rT_o u)/dt + T_1 u - g][rT_o u - h] = 0 \quad \text{op} \quad S \times I,$$

en $\quad u(o) = 0.$

5.6.2. Opmerkings.

(i) In voorbeeld (a) en (b) word vereis dat $q \in L^{\infty}(S)$. Sodoende word verseker dat $Au \in Y$ as $u \in X$. In Stelling 5.4 word egter slegs vereis dat die operator R begrens is. Hiervoor is dit voldoende om te vereis dat $q/r \in L^{\infty}(S)$, in voorbeeld a en $qs, s, q/r \in L^{\infty}(S)$, in voorbeeld (b).

(ii) In voorbeeld (a) en (b) word vereis dat $r, s \in L^{\infty}(S)$. Gevolglik is $Bu \in Y$ as $u \in X$. Wat egter van belang is, is dat D(E) nie leeg moet wees nie. Swakker voorwaardes mag moontlik wees, maar daarop is nie ingegaan nie.

(iii) Om die voorwaardes op q, r en s (hierbo) te verslap, kan geweegde Hilbertruimtes V moontlik ingevoer word. In voorbeeld (a) kan moontlik vereis word dat $\sqrt{q}\ T_1 u \in L^2(S)$. 'n Nadeel van só 'n benadering kan wees dat vir "elke" tipe evolusie-ongelykheid, (wat bestudeer word) 'n ander geweegde Hilbertruimte gesoek moet word.

(iv) Die koërsiwiteit van R in voorbeeld (b) word kunsmatig verseker, deur te vereis dat $2q(x)s(x)/r(x) = 1$. Alternatiewelik kan 'n ander Hilbertruimte, waarin 'n term $\|sT_o u + 1/rT_1 u\|_o^S$ in die norm voorkom, gesoek word. Dit word egter nie in hierdie werk behandel nie.

(v) Aan die einde van hierdie hoofstuk volg 'n regulariteitstelling en 'n stelling wat die interpretasie van die voorbeelde a, b en c motiveer.

5.7. Evolusie-ongelykhede in twee Banachruimtes geassosieer met 'n dissipatiewe (meerwaardige) operator.

5.7.1. Abstrakte raamwerk

(i) X, Y en Z is Banachruimtes.

(ii) Y en Z is gepaar met $\langle y,z\rangle$ vir $y \in Y$ en $z \in Z$ die (geassosieerde) bilineêre funksionaal.

(iii) $\langle H,(\cdot,\cdot), |\cdot|\rangle$ is 'n Hilbertruimte.

(iv) Die volgende vier lineêre operatore is gegee:

$$A : D(A) \subset X \to Y$$

$$B : D(B) \subset X \to Y$$

$$B_o : D(B) \subset X \to H$$

$$Q : D(Q) \subset X \to Z.$$

(v) $\langle Au,Qu\rangle \geqslant 0$ vir alle $u \in D(A) \cap D(Q)$.

Daar bestaan 'n koërsiewe, simmetriese, kontinue bilineêre vorm op H, aangedui met a_1, sodanig dat

$$\langle Bu,Qw\rangle = a_1(B_o u, B_o w) \text{ vir alle } u,w \in D(Q) \cap D(B).$$

(vi) $J \in \Gamma_o(X)$ soos in 2.10.1.c gedefinieer en $F_o \in Y$.

(vii) $B_o^{-1}(H) \cap D(A) \cap D(Q) = D$ en $D_J = D(J) \cap D \neq \{\ \}$.

5.7.2. Definisie.

$M : D_J \to 2^H$ word gedefinieer deur

$b \in Mu$ vir $u \in D_J$ as

$b \in H$ en

$$\langle Au - F_o, Qv - Qu \rangle + a_1(b, B_o v - B_o u)$$
$$+ J(v) - J(u) \geqslant 0 \quad \text{vir alle} \quad v \in D_J.$$

5.7.3. Definisie [17, p 383]

'n Versameling $A \subset H \times H$ is dissipatief as

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \leqslant 0 \text{ vir } \{x_i, y_i\} \in A, \; i = 1, 2.$$

'n Operator $P : H \to 2^H$ is dissipatief as sy grafiek, $\{\{x,y\} : y \in Px\}$, dissipatief is.

5.7.4. Lemma.

Aangesien $a_1(\cdot,\cdot)$ simmetries, koërsief en kontinu is, kan dit as inwendige produk op H gebruik word. Indien $a_1(u,v) = (u,v)$ geskryf word, volg dat $\langle H, (\cdot,\cdot), |\cdot| \rangle$ steeds 'n Hilbertruimte is.

Onder die voorwaardes in § 5.1.1 volg dat

$$MB_o^{-1} : B_o(D_J) \subset H \to 2^H$$

dissipatief is.

Bewys.

Laat $b_i \in MB_o^{-1} a_i$ met

$$a_i = B_o u_i, \; u_i \in D_J, \quad i = 1, 2. \tag{5.11}$$

Uit definisie 5.1.2 volg

$$\langle Au_1 - F_o, Q(u_2 - u_1) \rangle + a_1(b_1, B_o(u_2 - u_1))$$
$$+ J(u_2) - J(u_1) \geqslant 0. \tag{5.12a}$$

en

$$\langle Au_2 - F_o, Q(u_1 - u_2)\rangle + a_1(b_2, B_o(u_1 - u_2))$$
$$+ J(u_1) - J(u_2) \geqslant 0. \qquad (5.12b)$$

Deur (5.12a) en (5.12b) bymekaar te tel, volg (met behulp van (5.11))

$$\langle A(u_2 - u_1), Q(u_1 - u_2)\rangle + a_1(b_2 - b_1, a_1 - a_2) \geqslant 0.$$

Dus

$$a_1(b_1 - b_2, a_1 - a_2) \leqslant - \langle A(u_1 - u_2), Q(u_1 - u_2)\rangle \leqslant 0.$$

5.7.5. <u>Definisie</u>. [26, p 141]

'n Operator P is <u>akretief</u> as vir elke $\lambda > 0$ en $u,v \in D(P)$

$$|x - y| \geqslant |u - v| \quad \text{as} \quad x \in (1 + \lambda P)u, y \in (1 + \lambda P)v.$$

5.7.6. <u>Lemma</u>

<u>In die raamwerk van Lemma</u> 5.7.4 <u>volg dat</u> $-MB_o^{-1}$ <u>akretief is.</u>

<u>Bewys</u>.

(Hierdie bewys is vervat in die bewys van Lemma 2.1 in [17].)

Laat $\quad b_i \in (1 - \lambda MB_o^{-1})a_i, \quad i = 1,2, \ \lambda > 0.$

Dan volg $(a_i - b_i)/\lambda \in MB_o^{-1} a_i$, vir $i = 1,2$ en Lemma 5.7.4 impliseer dan

$$(a_1 - b_1 - (a_2 - b_2), a_1 - a_2)/\lambda \leqslant 0.$$

Dus $$|a_1 - a_2|^2 \leqslant (b_1 - b_2, a_1 - a_2)$$
$$\leqslant |b_1 - b_2||a_1 - a_2|$$

en $$|b_1 - b_2| \geqslant |a_1 - a_2|.$$

5.7.7. <u>Definisie</u>. [26, p 143]

$-MB_o^{-1}$ is <u>m-akretief</u> as $D_\lambda = R(1 - \lambda MB_o^{-1}) = H$, vir elke $\lambda > 0$ en $-MB_o^{-1}$ akretief is.

5.7.8. <u>Lemma</u>. [17], [26], [31].

<u>As</u> $D_\lambda = H$ <u>vir</u> $\lambda = \lambda_o > 0$ <u>dan is</u> $D_\lambda = H$ <u>vir alle</u> $\lambda > 0$.

<u>Bewys</u>. Sien [17, Th. 2.1, p 385].

<u>5.7.9</u>. <u>Lemma</u>. [26].

$-MB_o^{-1}$ <u>is m-akretief as en slegs as</u> $-MB_o^{-1}$ <u>byna demigeslote en lokaal m-akretief is</u>.

<u>Bewys</u>. Sien [26, 7.4, p 150]

In hierdie geval kan Stelling [7.1] van [26] gebruik word.

5.7.10. <u>Lemma</u>

<u>Veronderstel</u> $-MB_o^{-1}$ <u>is akretief</u>. <u>Dan is</u> $-MB_o^{-1}$ <u>m-akretief as en slegs as die probleem</u>

$$\begin{aligned} u \in D: &\langle (A + B)u - F_o, Qv - Qu \rangle + J(v) - J(u) \\ &\geqslant a_1(y, B_o v - B_o u) \quad \underline{\text{vir alle}} \quad v \in D, \end{aligned} \tag{5.13}$$

<u>'n oplossing het vir elke</u> $y \in H$.

<u>Bewys</u>.

(i) Veronderstel (5.13) het 'n oplossing u vir elke $y \in H$. Die keuse $v \in D_J$ (wat nie-leeg is) in 5.13 impliseer dat $u \in D_J$. Uit 5.13 volg, via 5.7.1(v), dat $B_o u - y \in Mu$. Aangesien $u \in D$, bestaan daar 'n $b \in H$ sodanig dat $B_o u = b$ en $u = B_o^{-1} b$.

Dus $y \in (1 - MB_o^{-1})b$ en $D_1 = R(1 - MB_o^{-1}) = H$.

Op grond van Lemma 5.7.8 volg dat $-MB_o^{-1}$ m-akretief is.

(ii) Veronderstel $-MB_o^{-1}$ is m-akretief en $y \in H$.

Daar bestaan 'n $b \in B_o(D_J)$, sê $b = B_o u$ met $u \in D_J$, sodanig dat $y \in (1 - MB_o^{-1})b$.

Dus $\qquad B_o u - y \in Mu \quad$ en

$$\langle Au - F_o, Qv - Qu\rangle + a_1(B_o u - y, B_o v - B_o u)$$
$$+ J(v) - J(u) \geq 0 \text{ vir alle } v \in D_J.$$

Hierdie ongelykheid geld ook vir alle $v \in D$. Deur 5.7.1 (v) in aanmerking te neem, volg (5.13).

5.7.11. <u>Opmerking</u>.

Indien A 'n nie-lineêre operator is en

$$\langle Au - Av, Qu - Qv\rangle \geq 0 \text{ vir alle } u,v \in D$$

dan bly Lemmas 5.7.4, 5.7.6 en 5.7.10 steeds waar.

5.7.12. <u>Lemma</u>.

<u>Veronderstel die voorwaardes gestel in</u> 5.7.1 <u>word bevredig</u>, <u>asook die volgende</u>:

a. D <u>is 'n refleksiewe Banachruimte met norm</u> $\|\cdot\|$, <u>ekwivalent aan die norm van</u> X. <u>Gevolglik is</u> $J \in \Gamma_o(D)$.

b. Die afbeeldings $w \to \langle y, Qw \rangle$

en $w \to a_1(y, B_0 w)$ vir gegewe $y \in H$,

is kontinu op D.

c. $D(A) = D$. A mag nie-lineêr wees, maar in dié geval moet die voorwaarde in § 5.7.11 gegee wees, sowel as die volgende:

Die operator $R : D \to D^*$ gedefinieer deur

$$u \in D: \ (Ru, w) = \langle Au, Qw \rangle \text{ vir alle } w \in D,$$

is hemikontinu.

d. $$[\langle (A+B)u, Q(u-x) \rangle + J(u)]/\|u\| \to \infty$$

as $\|u\| \to \infty$. $x \in D(J)$ is gegee.

e. $D(J) \subset W \subset \bar{W} \subset D$ en W is oop en konveks in D.

Onder hierdie voorwaardes is die operator $-MB_0^{-1}$ m-akretief.

Bewys.

Definieer 'n operator $A_1 : D \to D^*$ deur

$$u \in D : (A_1 u, w) = \langle Au + Bu, Qw \rangle .$$

A_1 is hemikontinu aangesien $R : D \to D^*$ (sien voorwaarde c) hemikontinu is en B 'n lineêre operator is.

Uit voorwaarde 5.7.11, die koërsiwiteit van a_1 en die verband

$$\langle Bu, Qw \rangle = a_1(B_o u, B_o w) \qquad \text{(sien 5.7.1.(v))},$$

volg dat A_1 monotoon is.

Laat $y^* \in D^*$ gedefinieer word deur

$$(y^*, w) = a_1(y, B_o w) + \langle F_o, Qw \rangle, \qquad w \in D,$$

vir 'n gegewe $y \in H$.

$$(A_1 u - y^*, u - x) + J(u) - J(x) \geqslant$$

$$\|u\|([(A_1 u, u - x) + J(u)]/\|u\| - \|y^*\|) - c \to \infty \text{ as } \|u\| \to \infty,$$

op grond van 5.7.12 d.

Die voorwaardes vir Stelling 3.1.10 word bevredig en 'n u bestaan, sodanig dat

$$u \in D_J : \langle Au + Bu, Qv - Qu \rangle + J(v) - J(u) \geqslant a_1(y, B_o v - B_o u) + \langle F_o, Qv - Qu \rangle$$

$$\text{vir alle } v \in D.$$

Lemma 5.7.10 lewer die resultaat.

5.7.13. <u>Stelling</u>.

<u>Veronderstel</u> $-MB_o^{-1}$ <u>is m-akretief</u>.

<u>Laat</u> $u_o \in D_J$ <u>'n oplossing wees van</u>

$$u_o \in D : \langle Au_o + Bx_o - F_o, Qv - Qu_o \rangle + J(v) - J(u_o)$$
$$\geqslant 0 \quad \underline{\text{vir alle}} \quad v \in D. \qquad (5.14)$$

<u>Laat</u> $b(t) = B_o g(t)$ <u>met</u> $g(t) \in D$ <u>en veronderstel vir elke eindige interval</u> $I \subset [0, \infty)$ <u>bestaan daar 'n</u> $h_I \in H$ <u>sodanig</u>

dat

$$b(t) = \int^t h_I(r)dr \quad \text{en} \quad h_I \quad \text{is sterk integreerbaar.}$$

Laat $F(t) = F_o + Bg(t)$. (5.15)

γ _is 'n reële konstante._ $|\cdot|_H$ _dui die norm in_ H _aan._

Dan bestaan daar 'n u _sodanig dat_

(i) $u : [0,\infty) \to D_J$

(ii) $B_o u|_{t=0} = y_o = B_o u_o$

(iii) $a_1(\frac{d}{dt}B_o u(t), B_o v - B_o u(t)) + \langle (A+\gamma B)u(t) - F(t), Qv - Qu(t)\rangle$

$+ J(v) - J(u(t)) \geq 0$ _vir alle_ $v \in D$.

(iv) $\frac{d}{dt} B_o u(t)$ _is kontinu in_ t, _behalwe vir 'n aftelbare aantal_ $t \in [0,\infty)$.

(v) $|\frac{d}{dt} B_o u(t)|_H \leq e^{-\gamma t}|B_o(x_o - \gamma u_o + g(o))|$

$+ \int_o^t e^{-\gamma(t-r)} |\frac{d}{dt} B_o g(r)|_H dr$

byna oral op $[0,\infty)$.

Bewys.

Laat $A(t)x = -MB_o^{-1}x + \gamma x - b(t)$, $0 \leq t < \infty$.

$$D(A(t)) = B_o(D_J).$$

Volgens Lemma 5.7.9 kan Stelling 7.1 van [26] gebruik word en daarvolgens bestaan 'n oplossing van

$$a'(t) \in -A(t)a(t) \text{ en } a(t) \in D(A(t)), \tag{5.16}$$

$$a(o) = y_o = B_o u_o \in B_o(D_J) = D(-MB_o^{-1}). \tag{5.17}$$

Stel $\quad B_o u(t) = a(t) \quad$ met $\quad u(t) \in D_J$.

Aan (i) en (ii) word voldoen.

Uit $\quad \frac{d}{dt}(B_o u)(t) = a'(t) \in -[-MB_o^{-1}a(t) + \gamma a(t) - b(t)]$

volg

$$\frac{d}{dt}(B_o u)(t) + \gamma B_o u(t) - B_o g(t) \in Mu(t).$$

Deur (5.15) en § 5.7.1(v) in aanmerking te neem, volg dat $u(t)$ 'n oplossing van die evolusie-ongelykheid (iii) is.

Aangesien H 'n Hilbertruimte is, is dit gelykmatig konveks. Netso is H^* gelykmatig konveks. (Sien oefening 32 op bladsy 327 van [44].) Gevolglik geld punt (iv) deur toepassing van [26, Th. 7.5, p 150].

Aangesien $B_o(x_o - \gamma u_o + g(o)) \in -(-MB_o^{-1}y_o + \gamma y_o - b(o))$

$$= -A(o)y_o$$

$$= -A(o)a(o)$$

volgens (5.14) en (5.17), volg met behulp van vergelyking (6.16) in [26, Lemma 6.6, p 148] dat

$$\left|\frac{d}{dt} B_o u(t)\right| \leq e^{-\gamma t}|B_o(x_o - \gamma u_o + g(o))| + \int_o^t e^{-\gamma(t-r)}\left|\frac{d}{dt}B_o g(r)\right|dr$$

byna oral op $[0,\infty)$.

5.7.14. Voorbeelde

Afspraak. Die bilineêre vorm $a(\cdot,\cdot)$ word gegee deur 3.15 en sal altyd simmetries wees. Die $L^2(S)$ norm word geskryf soos in paragraaf 5.6.1.

5.7.14.a $\quad Bu = \{u,\ rT_o u + sT_1 u\}, \qquad B_o u = \{u,\ T_1 u\},$

$$Qw = \{Lw,\ 1/rT_1 w\},$$

$$Au = \{Lu,\ qT_1 u\},$$

$$q(x) \geqslant 0, \quad r(x) > 0, \quad s(x)/r(x) \geqslant \delta > 0 \text{ op } S.$$

$$r,\ s,\ q,\ 1/r,\ s/r,\ q/r \in L^\infty(S).$$

Laat $H = H^1(G) \times L^2(S)$, $X = D = V_1$, $Y = Z = L^2(G) \times L^2(S)$.

$$D(A) = D(B) = D(Q) = V.$$

Die eerste vier voorwaardes van 5.7.1 word bevredig.

Laat $a_1(\{u_1,u_2\}, \{w_1,w_2\}) = a(u_1,w_1) + [s/r\, u_2, w_2]$.

Dan volg

$$\begin{aligned} \langle Bu,Qw\rangle &= (u,Lw) + [T_o u,T_1 w] + [s/r\,T_1 u,T_1 w] \\ &= a(u,w) + [s/r\,T_1 u,T_1 w] \\ &= a_1(B_o u,B_o w) \quad \text{vir} \quad u,\ w \in V_1. \end{aligned}$$

Aangesien s/r en $1/r \in L^\infty(S)$ volg voorwaardes (b) van Lemma 5.7.12.

Laat $K = K_1$ (soos in (5.10), behalwe dat $h \leqslant 0$ nie vereis word nie) en

$$J = \chi_K \qquad \text{(sien 3.51)}.$$

$$\begin{aligned} \langle (A+B)u,Qu\rangle &\geqslant \|Lu\|_o^2 + c\|u\|_1^2 + \delta|T_1 u|^2 \\ &\geqslant c\,|||u|||_1^2, \end{aligned}$$

impliseer voorwaarde (d) in Lemma 5.7.12, terwyl (e) volg met $W = V$.

Volgens Lemma 5.7.12 is $-MB_0^{-1}$ m-akretief en Stelling 5.7.13 kan nou gebruik word.

Dit is belangrik om daarop te let dat

$$\frac{d}{dt} T_0 u = T_0 \frac{du}{dt}, \quad \text{aangesien}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \lim_{H^1(G)} h^{-1}(u(t+h) - u(t)) \quad \text{en}$$

$$|T_0 u| \leqslant c\|u\|_1, \quad [35, \text{p } 39].$$

Gevolglik is $a_1((B_0u)', B_0w) =$

$$a(u',w) + [s/r(T_1u)',T_1w] =$$

$$(u',Lw) + [r(T_0u)' + s(T_1u)',1/rT_1w] =$$

$$<(Bu)',Qw>.$$

Aangesien die operatore B, Q en A in 5.6.1 a, met dié in 5.7.14 a ooreenstem, kan 'n soortgelyke interpretasie as, in 5.6.1 a, geheg word aan 5.7.13 iii. In hierdie geval word die bestaan van die tydafgeleide $(\frac{d}{dt} Bu)$ verseker deur 5.7.14 en is boonop kontinu en in $L^2(o,T;H^1(G) \times L^2(S))$, mits die afbeelding

$$t \to \int_0^t e^{-\gamma(t-r)} \left|\frac{d}{dt} B_0 g(r)\right|_H dr$$

kwadraties integreerbaar is in (o,T).

(Sien 5.7.13 (iv) en (v) en let op dat

$$|T_o u'| \leqslant c\|u'\|_1, \quad (Bu)' = \{u', rT_o u'\} + s(B_o u)'.$$

Aangesien vir $\gamma \geqslant 0$, $q(x)/r(x) \geqslant \delta_1 > 0$

$$c_1 |||u(t)|||_1^2 \leqslant \langle Au(t) + \gamma Bu(t), Qu(t) \rangle$$

$$\leqslant \langle (Bu(t))' - F(t), Qv - Qu(t) \rangle$$

$$+ \langle Au(t) + \gamma Bu(t), Qv \rangle$$

$$\leqslant c(|(Bu(t))'|_H + |F(t)|_H)(1 + |||u(t)|||_1) + c|||u(t)|||_1,$$

volg dat $u \in L^2(o,T;V_1)$, mits $F \in L^2(o,T;H)$, met $T < \infty$.
(Die ongelykheid $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$ is hierbo van toepassing.)

Indien $\gamma = 0$, F in 5.7.14.a en F in 5.6.1.a ooreenstem en $h \leqslant 0$ in 5.7.14.a, dan is die oplossings gelewer deur Stellings 5.4 en 5.7.13 identies, op grond van die eenduidigheid van oplossings van § 5.4. (Let op dat $Eu = (Bu)'$ en

$$\langle Ev, Qv - Qu \rangle \geqslant \langle (Bu)', Qv - Qu \rangle.)$$

5.7.14.b. $Bu = \{u, rT_o u\}$, $B_o u = \{u, T_o u\}$

$Qw = \{Lw, sT_o w + 1/rT_1 w\}$, $Nw = sT_o w + 1/rT_1 w$,

$Au = \{Lu, q(sT_o u + 1/rT_1 u)\}$.

$$r(x) > 0, \quad rs \geqslant \delta > 0, \quad q(x) \geqslant 0 \text{ op } S.$$

$$r,\ q,\ s,\ 1/r \in L^\infty(S).$$

Laat $H = H^1(G) \times L^2(S)$, $X = D = V_o$, $Y = Z = L^2(G) \times L^2(S)$.

$D(B) = D(Q) = D(A) = V$ en die eerste vier voorwaardes van 5.7.1 word bevredig.

Laat $a_1(\{u_1,u_2\}, \{w_1,w_2\}) = a(u_1,w_1) + [rsu_2,w_2]$.

$$\begin{aligned} \langle Bu,Qw \rangle &= (u,Lw) + [T_o u,T_1 w] + [rsT_o u,T_o w] \\ &= a(u,w) + [rsT_o u,T_o w] \\ &= a_1(B_o u,B_o w) \quad \text{vir } u,w \in V_o. \end{aligned}$$

Aangesien s, $1/r$ en $rs \in L^\infty(S)$ word daar voldoen aan 5.7.12.(b).

Laat $K = K_{r,s}$, met $K_{r,s}$ soos in 5.6.1.b en $J = \chi_K$.

$$\langle (A+B)u,Qu \rangle \geqslant \|Lu\|_o^2 + c\|u\|_1^2 \geqslant c|||u|||_o^2 ,$$

impliseer 5.7.12.d, terwyl 5.7.12.e volg met $W = V$.

Soos in 5.7.14.a kan Stelling 5.7.13 toegepas word.

Weereens is $(T_o u)' = T_o u'$ en gevolglik

$$\begin{aligned} a_1((B_o u)',B_o w) &= a(u',w) + [rs(T_o u)',T_o w] \\ &= (u',Lw) + [rT_o u',sT_o w + 1/r\, T_1 w] \\ &= \langle (Bu)',Qw \rangle . \end{aligned}$$

Soos in 5.7.14.a kan die kontinuïteit van $d(Bu)/dt$ aangetoon word. Ook is

$(Bu)' \in L^2(o,T\,;H^1(G) \times L^2(S))$, mits $\gamma \geqslant 0$.

$u \in L^2(o,T\,;V_o)$ mits F en g aan die voorwaardes in 5.7.14.a voldoen.

Net soos 5.7.14.a met 5.6.1.a ooreenstem, só stem 5.7.14.b ooreen met 5.6.1.b. Onderworpe aan die voorwaardes in 5.7.14.b, volg dus dat die oplossing van die probleem in 5.6.1.b, voldoen aan $u \in D(E)$. Alternatiewelik moet daar met behulp van 'n regulariteitstelling bewys word dat $u \in D(E)$.

5.7.14.c. $\quad Bu = \{u, rT_o u\}, \qquad B_o u = u$

$$Qw = \{Lw, 1/rT_1 w\},$$

$$Au = \{Lu, qT_1 u\}\,, \qquad Nu = T_1 u.$$

$$r(x) > 0, \quad q(x)/r(x) \geqslant \delta \geqslant 0 \quad \text{op} \quad S.$$

$$q,\ r,\ 1/r \in L^\infty(S).$$

$$H = H^1(G), \quad X = D = V_1 \quad \text{as } \delta > 0$$

$$\text{en} \quad X = D = V_o \quad \text{as } \delta = 0.$$

$$Y = Z = L^2(G) \times L^2(S).$$

$$a_1 \equiv a \quad \text{en}$$

$$\begin{aligned} \langle Bu, Qw \rangle &= (u, Lw) + [T_o u, T_1 w] \\ &= a(u,w) \\ &= a_1(B_o u, B_o w) \quad \text{vir } u,w \in D. \end{aligned}$$

Aangesien $1/r \in L^\infty(S)$ word die voorwaardes in 5.7.12(b) bevredig.

Laat $K = K_1$ of K_o as $\delta > 0$ en $K = K_o$ as $\delta = 0$,

$J = \chi_K$.

$$< (A+B)u, Qu > \;\geqslant\; \|Lu\|_o^2 + c\|u\|_1^2 + \delta|T_1 u|^2$$

$$\geqslant \begin{cases} c|||u|||_1^2 & \text{as} \quad \delta > 0 \\ c|||u|||_o^2 & \text{as} \quad \delta = 0. \end{cases}$$

Soos in die vorige twee voorbeelde kan Stelling 5.7.13 toegepas word. Soos voorheen is

$$(T_o u)' = T_o u' \quad \text{en}$$

$$\begin{aligned} a_1((B_o u)', B_o w) &= a(u', w) \\ &= (u', Lw) + [rT_o u', 1/rT_1 w] \\ &= < (Bu)', Qw >. \end{aligned}$$

Die kontinuïteit van $\frac{d}{dt}Bu$ kan soos voorheen aangetoon word en vir $\gamma \geqslant 0$ volg

$$(Bu)' \in L^2(o,T\,;\,H^1(G) \times L^2(S))$$

$$u \in L^2(o,T\,;\,V_i) \qquad (i = 0 \text{ vir } \delta = 0 \text{ en } i = 1 \text{ vir } \delta > 0)$$

mits F en g voldoen aan 5.7.14.a.

5.8. 'n Regulariteitstelling vir probleem 5.6.1.c.

5.8.1. Lemma.

Laat X, Y, Z, K, B, Q *en* A *wees soos in* 5.6.1.c, *met*

$\frac{h}{r} \in H^{\frac{3}{2}}(S)$ in die definisie van K.

$H = L^2(G) \times L^2(S)$ en $\{f_o, g_o\} \in H$.

Laat

$f = f_o + \phi(t)$, $g = g_o + rT_o\phi(t)$, waar

$\{\phi', T_o\phi'\} \in L^2(o,T\,;\,H)$ en r voldoen aan 3.48 en 3.49.

Laat

$$\langle F(t), z\rangle = (f, z_1) + [g, z_2] \text{ vir } z = \{z_1, z_2\} \in Z.$$

Laat $w \in H^2(G) : Lw = f$ in G en $rT_o w = h$ op S, (5.18)

in ooreenstemming met (3.72).

Veronderstel u is 'n oplossing van

$$u \in K : \langle Gv + Au - F, Qv - Qu\rangle \geqslant 0$$

$$\text{vir alle } v \in K \cap D(E). \qquad (5.19)$$

Dan volg:

(i) $u \in D(E)$ en $\{u', (T_o u)'\} \in L^2(o,T\,;\,H)$.

(ii) Daar bestaan $u_\varepsilon \in V \cap K$ sodanig dat

$$u_\varepsilon + \varepsilon(u'_\varepsilon + Lu_\varepsilon) = u + \varepsilon Lw \text{ in } G \times I \qquad (5.20)$$

$$rT_o u_\varepsilon + \varepsilon(r(T_o u_\varepsilon)' + T_1 u_\varepsilon) = rT_o u + \varepsilon T_1 w \text{ op } S \times I, \qquad (5.21)$$

$$u_\varepsilon(0) = 0 \text{ in } G. \qquad (5.22)$$

(iii) $u(t) \geqslant w$ in G vir elke $t \in (o,T)$ byna oral.

Bewys.

Laat $\quad |g| = \|g\|_o^S$ vir $g \in L^2(S)$.

(i) Die eerste punt word bewys, deur aan te toon dat u ooreenstem met die oplossing van 'n evolusie-ongelykheid, wat met behulp van Stelling 5.7.13 verkry word.

Laat $X_1 = H^1(G)$, $Z_1 = H^1(G) \times L^2(S)$ en $Y_1 = Z_1^*$.
H is soos gegee.

$$\langle B_1 u, z\rangle = (u, z_1) + [rT_o u, z_2] \text{ vir } z = \{z_1, z_2\} \in Z_1$$

en $D(B_1) = X_1$.

$$\langle A_1 u, z\rangle = a(u, z_1) \text{ vir } z = \{z_1, z_2\} \in Z_1 \text{ en } D(A_1) = X_1.$$

$$B_o u = \{u, T_o u\} = Q_1 u \text{ en } D(B_o) = D(Q_1) = X_1.$$

$$\langle B_1 u, Q_1 w\rangle = (u, w) + [rT_o u, T_o w]$$

$$= a_1(B_o u, B_o w) \quad \text{met}$$

$$a_1(\{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\}) = (u_1, v_1) + [ru_2, v_2].$$

Aangesien

$$h^{-1}\langle B_1 u(t+h) - B_1 u(t), Q_1 v\rangle = h^{-1} a_1(B_o u(t+h) - B_o u(t), B_o v)$$

$$\text{volg} \quad \langle (B_1 u)', Q_1 v\rangle = a_1((B_o u)', B_o v), \tag{5.23}$$

mits $(B_o u)' \in H$.

Verder is $\langle (A_1 + B_1) u, Q_1 u\rangle \geqslant c\|u\|_1^2$.

Stelling 5.7.13 lewer (via Lemma 5.7.12 met $D = X_1$) 'n oplossing u vir die probleem

$$rT_o u(t) \geqslant h \text{ op } S,\ u(o) = 0 \text{ in } G \text{ en } T_o u(o) = 0 \text{ op } S:$$

$$\langle (B_1 u(t))' + A_1 u(t) - F(t),\ Q_1 v - Q_1 u(t) \rangle \geqslant 0 \quad \text{vir alle}$$

$$v \text{ met } rT_o v \geqslant h \text{ op } S. \qquad (5.24)$$

Uit Stelling 5.7.13 (v) volg boonop dat $(B_o u)' \in L^2(o,T\,;H)$

(5.25)

Uit (5.24) volg via (5.23) dat

$$\begin{aligned}
c\|u(t)\|_1^2 &\leqslant \langle A_1 u(t), Q_1 u(t)\rangle \\
&\leqslant a_1((B_o u)', B_o(v - u(t))) + \langle F(t), Q_1(u(t) - v)\rangle \\
&\qquad + \langle A_1 u(t), Q_1 v\rangle \\
&\leqslant M(\|(B_o u)'\|_H + \|F(t)\|_H)(1 + \|u(t)\|_1) + M\|u(t)\|_1 \\
&\leqslant c\varepsilon(1 + \|u(t)\|_1)^2 + M^2/4c\varepsilon(\|(B_o u)'\|_H + \|F(t)\|_H)^2 \\
&\qquad + M^2/4c\varepsilon + c\varepsilon\|u(t)\|_1^2 \\
&\leqslant 3c\varepsilon\|u(t)\|_1^2 + \alpha(1 + \|(B_o u)'\|_H^2 + \|F(t)\|_H^2).
\end{aligned}$$

Deur $\varepsilon = 1/6$ te kies, kan gesien word dat

$$u \in L^2(o,T\,;H^1(G)) \quad \text{vir} \quad T < \infty. \qquad (5.26)$$

Vir enige $v \in D(E)$, $w(t) = v(t) - u(t)$ volg

$$\begin{aligned}
&\int_o^T \{[r(T_o w(t))', T_o w(t)] + (w'(t), w(t))\}\,dt \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_o^T \frac{d}{dt}\{|\sqrt{r}\,T_o w(t)|^2 + \|w(t)\|_o^2\}dt \\
&\quad \geqslant 0, \text{ aangesien } v(o) - u(o) = 0 \text{ en } T_o(v(o) - u(o)) = 0.
\end{aligned}$$

Deur (5.23) in (5.24) te vervang, die evolusie-ongelykheid oor die interval (o,T) te integreer en die laaste ongelykheid hierbo te gebruik, word gevind dat die oplossing van (5.24) ook 'n oplossing van (5.19) is. Uit die eenduidigheid van die oplossing van (5.19), (Stelling 5.4) volg die gelykheid van die oplossings van (5.19) en (5.24). Op grond van (5.25) en (5.26) volg punt (i) van die Lemma.

(ii) Laat $\varepsilon > 0$ gegee wees.

$$Bu = \varepsilon\{u, rT_0u\}, \quad B_0u = u$$

$$Qv = \{Lv, 1/rT_1v\},$$

$$Au = \{u + \varepsilon Lu, rT_0u + \varepsilon T_1u\}.$$

Laat $F_0 = \{u + \varepsilon Lw, rT_0u + \varepsilon T_1w\}$, met w soos in (5.18).

Laat $H = H^1(G)$, $X = D = V_1$, Y en Z soos in 5.7.14.a.

Indien $a_1(u,v) = \varepsilon a(u,v)$ dan volg

$$\langle Bu, Qv\rangle = \varepsilon(u, Lv) + \varepsilon[T_0u, T_1v]$$

$$= a_1(B_0u, B_0v).$$

$$\langle (A+B)u, Qu\rangle \geqslant (u, Lu) + [T_0u, T_1u] + \varepsilon\|Lu\|_0^2 + \varepsilon\left|\frac{1}{\sqrt{r}}T_1u\right|^2$$

$$\geqslant c|||u|||_1^2 \quad \text{via (3.21)}.$$

Stelling 5.7.13 verseker die bestaan van u_ε sodanig dat $u_\varepsilon(o) = B_0w = w$ en

$$\langle (Bu_\varepsilon)' + Au_\varepsilon - F_0, Qv\rangle = 0 \text{ vir alle } v \in V_1. \qquad (5.27)$$

Hieruit volg

$$u_\varepsilon + \varepsilon(u'_\varepsilon + Lu_\varepsilon) = u + \varepsilon Lw \text{ in } G \times I, \tag{5.28}$$

$$rT_o u_\varepsilon + \varepsilon(r(T_o u_\varepsilon)' + T_1 u_\varepsilon) = rT_o u + \varepsilon T_1 w \text{ op } S \times I, \tag{5.29}$$

en $$u_\varepsilon(0) = w \text{ in } G. \tag{5.30}$$

Verder volg $$u_\varepsilon \in L^2(o,T;V_1) \tag{5.31}$$

$$\{u'_\varepsilon, (T_o u_\varepsilon)'\} \in L^2(o,T;H^1(G) \times L^2(S)), \quad T < \infty, \tag{5.32}$$

uit 5.7.13(v).

Laat

$$q(t) = \sup_{\bar{G}}\{u(t),w\} \text{ en } q^*(t) = \inf_{\bar{G}}\{u(t),w\}.$$

Op S geld $rT_o q(t) \geqslant h$, want $rT_o w = h \leqslant rT_o u(t)$.

$rT_o q^*(t) = h$ op S aangesien $h = rT_o w \leqslant rT_o u(t)$.

Gevolglik is $q,\ q^* \in K$ en $T_o(q^* - w) = 0$. (5.33)

Indien $p(t) = u(t) - w$ dan is

$$q(t) - w = \sup_{\bar{G}}\{p(t),0\} = p^+(t) \tag{5.34}$$

en

$$q(t) - u(t) = -\inf_{\bar{G}}\{p(t),0\} = p^-(t). \tag{5.35}$$

Verder is $q(t) + q^*(t) = u(t) + w$. (5.36)

Uit (5.34), (5.35) volg

$$(q' - w', q - u) = ((p^+)', p^-) = 0 = a(p^+, p^-) = a(q - w, q - u). \tag{5.37}$$

Aangesien $T_o(q^* - w) = 0$ (sien 5.33) volg

$$a(w, q^* - w) - (f, q^* - w) = 0 \tag{5.38}$$

Die keuse $v = q$ in (5.19) lei tot

$$\int_o^T \{(q' - f, q - u) + a(u, q - u)\}dt \geqslant 0, \quad \text{aangesien} \tag{5.39}$$

$$T_o(q - u) = T_o(w - q^*) = 0, \quad \text{uit (5.36), (5.33).}$$

Deur (5.38) oor die interval (o,T) te integreer, (5.36) daarin te vervang en die resultaat by die ongelykheid (5.39) by te tel, volg

$$\int_o^T \{(q' - w', q - u) + a(u - w, q - u)\}dt \geqslant 0, \tag{5.40}$$

aangesien $w' = 0$.

Uit (5.40), (5.37) volg

$$\int_o^T \{a(w - q, q - u) + a(u - w, q - u)\}\, dt \geqslant 0 \quad \text{en gevolglik}$$

$$0 \geqslant -\int_o^T \hat{a}(q - u)dt \geqslant 0.$$

Hieruit volg $q(t) = u(t)$ vir $t \in (o,T)$ en dus

$$u(t) \geqslant w \text{ op } \bar{G} \text{ vir } t \in (o,T) \quad \text{byna oral,}$$

waarmee punt (iii) bewys is.

Laastens moet nog bewys word dat die u_ε in (5.27) in K lê.

Uit (5.28) volg

$$0 = (u_\varepsilon - u,v) + \varepsilon(u_\varepsilon' + Lu_\varepsilon - Lw,v)$$

$$= (u_\varepsilon - u,v) + \varepsilon(u_\varepsilon',v) + \varepsilon a(u_\varepsilon - w,v) - \varepsilon[T_1(u_\varepsilon - w),T_o v].$$

Met behulp van (5.29) volg

$$0 = (u_\varepsilon - u,v) + \varepsilon\{(u_\varepsilon',v) + a(u_\varepsilon - w,v) + [r(T_o u_\varepsilon)',T_o v]\}$$

$$+ [rT_o u_\varepsilon - rT_o u,T_o v] \tag{5.41}$$

Kies $v = z_\varepsilon = \sup_{\bar{G}}\{w - u_\varepsilon, 0\}$.

$$(u_\varepsilon - u,z_\varepsilon) \leqslant 0 \tag{5.42}$$

want $z_\varepsilon > 0$ impliseer $u \geqslant w > u_\varepsilon$.

$$\int_o^T (u_\varepsilon',z_\varepsilon)dt = \int_o^T (u_\varepsilon' - w',z_\varepsilon)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_o^T \frac{d}{dt} \int_{z_\varepsilon(t)>0} (w - u_\varepsilon)^2 dx\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{z_\varepsilon > 0} [(w - u_\varepsilon(T)]^2\,dx, \text{ want}$$

$$u_\varepsilon(o) = w.$$

Dus

$$\int_o^T (u_\varepsilon',z_\varepsilon)dt \leqslant 0. \tag{5.43}$$

$$a(u_\varepsilon - w,z_\varepsilon) \leqslant 0 \tag{5.44}$$

want $z_\varepsilon > 0$ impliseer $z_\varepsilon = w - u_\varepsilon$.

Op 'n soortgelyke wyse as in (5.43) volg

$$\int_o^T [r(T_o u_\varepsilon)',T_o z_\varepsilon]dt \leqslant 0. \tag{5.45}$$

Deur (5.41) oor (o,T) te integreer en (5.42)....(5.45) te gebruik volg:

$$\int_o^T [rT_o u_\varepsilon(t) - rT_o u(t), T_o z_\varepsilon(t)]\,dt \geq 0.$$

As $T_o z_\varepsilon(t) > 0$ dan volg $T_o u(t) \geq T_o w > T_o u_\varepsilon(t)$.

Gevolglik is

$$[rT_o u_\varepsilon(t) - rT_o u(t), T_o z_\varepsilon(t)] = 0. \qquad (5.46)$$

Hieruit volg

$$rT_o u_\varepsilon(t) \geq rT_o w = h \text{ op } S \text{ as } T_o z_\varepsilon = 0$$

$$\text{en } rT_o u_\varepsilon(t) = rT_o u(t) \geq h \text{ op } S \text{ as } T_o z_\varepsilon(t) > 0.$$

Dus $u_\varepsilon \in K$.

5.8.2. Stelling

Onder die voorwaardes vervat in Lemma 5.8.1 volg dat die oplossing u van 5.19 voldoen aan

$$u \in L^2(o,T;V_1).$$

Bewys.

Notasie: Vir die doeleindes van hierdie bewys, word die volgende vereenvoudigde notasie gebruik:

$$[f,g] = \int_o^T \int_S f(x,t)g(x,t)\,dS\,dt,$$

$$|f| = [f,f]^{\frac{1}{2}},$$

$$(u,v) = \int_o^T \int_G u(x,t)v(x,t)\,dx\,dt,$$

$$\text{en } \|u\|_o = (u,u)^{\frac{1}{2}}.$$

Uit (5.19) volg

$$\langle Gu_\varepsilon + Au_\varepsilon - F, Qu_\varepsilon - Qu \rangle \geqslant 0, \quad \text{aangesien}$$

$$\langle Au_\varepsilon, Qu_\varepsilon - Qu \rangle \geqslant \langle Au, Qu_\varepsilon - Qu \rangle \quad \text{en}$$

$$u_\varepsilon \in K \cap D(E).$$

Aangesien $u_\varepsilon \in V$ kan (3.21) gebruik word en dus volg

$$[(rT_o u_\varepsilon)' - g, T_o u_\varepsilon - T_o u] + (u_\varepsilon' - f, u_\varepsilon - u)$$

$$+ (Lu_\varepsilon, u_\varepsilon - u) + [T_1 u_\varepsilon, T_o u_\varepsilon - T_o u] \geqslant 0.$$

Deur (5.20), (5.21) en (5.18) in bostaande te vervang volg

$$-\varepsilon[r(T_o u_\varepsilon)' + T_1 u_\varepsilon - g, \{r(T_o u_\varepsilon)' + T_1 u_\varepsilon - T_1 w\}/r]$$

$$-\varepsilon(u_\varepsilon' + Lu_\varepsilon - f, u_\varepsilon' + Lu_\varepsilon - f) \geqslant 0.$$

Deur $Tu_\varepsilon = r(T_o u_\varepsilon)' + T_1 u_\varepsilon$

en

$q = T_1 w$ te stel volg

$$\|u_\varepsilon' + Lu_\varepsilon - f\|_o^2 + [Tu_\varepsilon - g, \{Tu_\varepsilon - q\}/r] \leqslant 0. \tag{5.47}$$

Met behulp van 3.49 volg

$$c_r|Tu_\varepsilon|^2 \leqslant |r^{-\frac{1}{2}}Tu_\varepsilon|^2 \leqslant M(1 + |r^{-\frac{1}{2}}Tu_\varepsilon|), \tag{5.48}$$

uit 5.47.

Uit (5.48) volg dat $\{|r^{-\frac{1}{2}}Tu_\varepsilon|\}$ asook $\{|Tu_\varepsilon|\}$ begrens is in

$L^2(o,T;L^2(S))$.

Daar bestaan dus 'n konstante $M > 0$, sodanig dat

$$|Tu_\varepsilon| < M, |r^{-\frac{1}{2}}Tu_\varepsilon| < M, \|u'_\varepsilon + Lu_\varepsilon - f\|_o < M, \quad (5.49)$$

indien (5.47) in ag geneem word.

Uit (3.48), (5.21), (5.49) volg

$$\begin{aligned} r_o|T_o u_\varepsilon - T_o u| &\leq |rT_o u_\varepsilon - rT_o u| \\ &\leq \varepsilon|rTu_\varepsilon - q| \\ &\leq \varepsilon(M + |q|) \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Dus $$|T_o u_\varepsilon - T_o u| \to 0 \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0. \quad (5.50)$$

Uit (5.21), (5.49) volg

$$\|u_\varepsilon - u\|_o = \varepsilon\|u'_\varepsilon + Lu_\varepsilon - f\|_o \leq \varepsilon M \to 0 \quad (5.51)$$

$$\text{as} \quad \varepsilon \to 0.$$

Op grond van (5.49) bestaan daar 'n deelry $\{u_j\}$ sodanig dat

$$u'_j + Lu_j \rightharpoonup \phi \text{ (swak) in } L^2(o,T;L^2(G))$$

en $$Tu_j \rightharpoonup \psi \text{ (swak) in } L^2(o,T;L^2(S)),$$

waar $\phi \in L^2(o,T;L^2(G))$ en $\psi \in L^2(o,T;L^2(S))$.

Vir enige $v \in C^1(o,T;C^2(\bar{G}))$,

met $v(o) = v(T) = 0$, volg

$$(\phi,v) = \lim(u_j' + Lu_j,v)$$

$$= \lim\{-(u_j,v') + (u_j,Lv) + [T_o u_j,T_1 v] - [T_1 u_j,T_o v]\}$$

$$= -(u,v') + (u,Lv) + [T_o u,T_1 v] - \lim[T_1 u_j,T_o v]$$

$$= (u',v) + \int_o^T a(u,v)dt - \lim[T_1 u_j,T_o v]$$

uit Lemma 5.8.1(i) (5.52)

Vir enige $v \in C^1(o,T;L^2(S))$, met $v(o) = v(T) = 0$, volg

$$[r(T_o u)',v] = -[rT_o u,v']$$

$$= -\lim[rT_o u_j,v']$$

$$= \lim[r(T_o u_j)',v]$$

uit Lemma 5.8.1(i).

Gevolglik $T_1 u_j = Tu_j - r(T_o u_j)' \rightharpoonup \psi - r(T_o u)'$. (5.53)

Uit (5.52) (5.53) volg

$$(\phi,v) = (u',v) + \int_o^T a(u,v)dt + [r(T_o u)' - \psi,T_o v]. \quad (5.54)$$

Hieruit volg

$\int_G (\phi(t) - u'(t))vdx = a(u(t),v)$, vir elke $v \in C_o^\infty(G)$.

Gevolglik is $Lu(t) = \phi(t) - u'(t)$ byna oral in G. (5.55)

Uit (5.54) volg nou

$$(Lu(t),v) = a(u,v) + \int_S (r(T_o u(t))' - \psi(t))T_o v dS$$

en dus $r(T_o u(t))' - \psi(t) = T_1 u(t)$. (5.56)

Uit (5.55) (5.56) volg

$$Lu \in L^2(o,T;L^2(G)) \text{ en } T_1 u \in L^2(o,T;L^2(S)).$$

Op grond van 3.2.5.d volg die resultaat van die stelling hieruit.

5.9. Stelling. (Interpretasie van sekere evolusie-ongelykhede).

Laat X, Y en Z Banachruimtes, soos uiteengesit in § 4.3, wees. Veronderstel 5.3(iii) is gegee. A en Q is soos in vergelyking 4.16, met Q lineêr. B is soos in 5.3 (iv). Laat $F \in L^2(o,T;Y)$, $\mathcal{K} \in Z$ en $Qw_h = \mathcal{K}$. Laat $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ 'n toelaatbare paar in die Y - Z konteks wees.

$$K = \{v \in D(Q) : Qv \geqslant_2 \mathcal{K}\} \tag{5.57}$$

en $$K_T = \{v \in L^2(o,T;X) : v(t) \in K \text{ vir } t \in (o,T)\}. \tag{5.58}$$

Veronderstel minstens een van die voorwaardes a, b of c van Stelling 4.7.2 word bevredig.

(i) Dan is

u 'n oplossing van

$$u \in K_T \cap D(A) : \int_o^T \langle (Bu)'(t)+Au(t)-F(t), Qv(t)-Qu(t)\rangle dt \geqslant 0$$
$$\text{vir alle } v \in K_T \tag{5.59}$$

as en slegs as

u 'n oplossing is van

$$\left.\begin{array}{l} u \in L^2(o,T;X),\ (Bu)'+Au \in L^2(o,T;Y) \text{ en } Qu \in L^2(o,T;Z), \\ Qu(t) \geqslant_2 \mathcal{K},\ (Bu)'(t) + Au(t) - F(t) \geqslant_1 0, \\ \langle (Bu)'(t)+Au(t) - F(t), \mathcal{K} - Qu(t)\rangle = 0 \text{ vir } t \in (o,T). \end{array}\right\} \tag{5.60}$$

(ii) Laat $X = V_i$, $i = 0$ of 1 (sien § 3.2) en

$$Y = Z = L^2(G) \times L^2(S).$$

Laat L en M tweede orde elliptiese operatore wees en ℓ, m en b randoperatore.

Veronderstel

$$Au = \{Lu, \ell u\} \in Y \text{ vir } u \in X$$

$$Qw = \{Mw, mw\} \in Z \text{ vir } w \in X$$

$$Bu = \{u, bu\} \in Y \text{ vir } u \in X.$$

Laat $F(t) = \{f(t), g(t)\}$ en veronderstel $mw_h = h$.
Laat $(\geqslant_1, \geqslant_2)$ wees soos in § 4.7.4.

As u 'n oplossing is van die probleem hierbo, onder punt (i), dan volg vir elke $t \in (o,T)$

$$\begin{aligned} u'(t) + Lu(t) &= f(t) \text{ in } G \\ (bu)'(t) + \ell u(t) &\geqslant g(t) \text{ op } S \\ mu(t) &\geqslant h \text{ op } S \\ [(bu)'(t) + \ell u(t) - g(t)][mu(t) - h] &= 0 \text{ op } S \end{aligned} \qquad (5.61)$$

Bewys.

Laat $s \in (o,T)$ en $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset (o,T)$.

Laat $\psi \in C_0^\infty(o,T)$ met $0 \leqslant \psi(t) \leqslant 1$ en

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 \text{ as } |t - s| > \varepsilon \\ 1 \text{ as } |t - s| < \varepsilon/2. \end{cases}$$

Dan is vir elke $v \in K$

$$w(t) = \psi(t)v + (1 - \psi(t))u(t) \in K.$$

Verder is $w \in K_T$.

$$w(t) - u(t) = \psi(t)(v - u(t)) = 2\varepsilon\psi_\varepsilon(t)(v - u(t)),$$

waar $\psi_\varepsilon(t) = \psi(t)/2\varepsilon$.

Uit (5.59) volg dan

$$\int_{S-\varepsilon}^{S+\varepsilon} \psi_\varepsilon(t) < (Bu)'(t) + Au(t) - F(t), Qv - Qu(t) > dt \geqslant 0$$

vir alle $v \in K$.

Deur 'n ry $\{\psi_{\varepsilon_n}\}$, met $\varepsilon_n \to 0$ te kies en [18, III 12.7] te gebruik, volg

$$< (Bu)'(s) + Au(s) - F(s), Qv - Qu(s) > \geqslant 0 \text{ vir alle } v \in K. \quad (5.62)$$

Die oorspronklike evolusie-ongelykheid, (5.59), kan weer uit (5.62) verkry word, deur laasgenoemde oor die interval (o,T) te integreer. (Hierdie integrasie is toelaatbaar, op grond van 5.3(iii), 5.60 en die feit dat $F \in L^2(o,T;Y)$.)

Vergelyking (5.62) tesame met die voorwaardes

$$u \in K,\ u \in L^2(o,T;X),\ (Bu)' + Au \in L^2(o,T;Y) \text{ en } Qu \in L^2(o,T;Z)$$

is dus ekwivalent aan (5.59).

Stelling 4.7.2 kan vervolgens op die probleem in die vorm (5.62), met $u \in K \cap D(A)$, toegepas word, mits die operator A in Stelling 4.7.2, vervang word met die operator geassosieer met die afbeelding

$$u(s) \rightarrow (Bu)'(s) + Au(s).$$

Die tweede deel van Stelling 5.9 volg uit Lemma 4.7.4.

5.10. Opmerkings.

a. Die "regte" keuse van die operator Q, in § 5.6, verseker dat die ruimtelike afgeleides van die oplossing van die probleem, in sô 'n ruimte is, dat 'n regulariteitstelling ten opsigte daarvan onnodig is. Die tydafgeleides in Stelling 5.4 bestaan in 'n swak sin en 'n regulariteitstelling is nodig. In voorbeeld 5.6.1c is die operator Q sô gekies dat 'n regulariteitstelling, Lemma 5.8.1 en Stelling 5.8.2, ten opsigte van ruimtelike- sowel as tydafgeleides nodig is. Hierdie stelling (Stelling 5.8.2) se bewys volg dieselfde patroon as Stelling 3.4.8, in hoofstuk 3, waar die probleem stasionêr is. Die bewys van Stelling 5.8.2, is nie eenvoudig nie en die benadering is tot dusver beperk tot konvekse versamelings, soos gegee in (5.58).

b. In die lig van die vorige opmerking, is dit duidelik dat die werk in § 5.7 sterk resultate lewer. In hierdie benadering speel die ruimte H 'n kardinale rol. Aangesien hierdie ruimte gewoonlik verband het met die ruimte $H^1(G)$ en die spooroperator T_o kontinu is op laasgenoemde, volg dat $(T_o u)' = T_o u'$. Boonop is daar sekere kontinuïteitseienskappe van die tydafgeleides, soos gesien kan word uit

Stelling 5.7.13 (iv) en (v). Die operator Q kan weereens so gekies word dat die ruimtelike afgeleides in 'n geskikte ruimte is. Regulariteitstellings is dus onnodig wanneer die benadering in § 5.7 gevolg word.

c. Indien die vrae omtrent regulariteit beantwoord is, kan Stelling 5.9 gebruik word, ten einde 'n interpretasie aan die betrokke evolusie-ongelykhede te heg. 'n Paraboliese parsiële differensiaalvergelyking, wat verband het met 'n behoud-of balanswet, §2.2, is die beherende vergelyking en sekere relasies op die rand word vekry.

Op die rand moet óf $mu(t) = h$ óf 'n dinamiese voorwaarde

$$(bu)'(t) + \ell u(t) = g(t) \text{ op } S$$

geld, sien (5.61). Hier is dus sprake van 'n vrye rand, wat moontlik met tyd verander.

Ander tipe konvekse versamelings K of funksionale $J \in \Gamma_o(X)$, sal ander tipes interpretasies tot gevolg hê, maar daarop is nie ingegaan nie. Die bestaanstellings dek wel hierdie gevalle.

d. In hoofstuk 1 word melding gemaak van 'n reguliere elliptiese probleem (vergelyking 1.6, § 1.3.5). In hoofstuk 4, Stelling 4.7.5, sien vergelyking (4.38), word die volgende probleem opgelos

$$Lu = f \text{ in } G$$

$$\text{óf } rT_o u = h \quad \text{óf } Nu = g \text{ op } S.$$

Hier is dus 'n uitbreiding van die probleem in § 1.3.5.

Soos Stelling 1.3.8 'n interpretasie heg aan 'n variasie-probleem, so heg Stelling 4.7.5 'n interpretasie aan 'n variasie-ongelykheid.

e. Soos hoofstukke 3 en 4 voorwaardes op die rand S ondersoek, ten einde goed gestelde stasionêre probleme te verkry, so word ook in hoofstuk 5 gedoen, ten opsigte van evolusieprobleme.

f. Die voorwaardes vervat in Definisies 1.3.3 en 1.3.4 het geen rol gespeel nie. Die voorwaarde 1.3.3.a vir T_1 volg op 'n natuurlike wyse, aangesien die operatore L waarmee gewerk word, ellipties is.

BYLAAG

Die doel van die bylaag is om sekere aspekte van konvekse versamelings, wat in die "verbygaan" in die literatuur genoem word, te bewys.

1. Lemma.

Laat K 'n konvekse versameling wees met $0 \in K^o$. Dan bestaan daar 'n $\delta > 0$ sodanig dat

$L_v = \{(1-t)v + tw : w \in B_\delta(o),\ 0 < t < 1\} \subset K^o$, vir enige $v \in K$. $B_\delta(o) = \{w : \|w\| < \delta\}$.

Bewys.

$$B_\delta(o) \subset K^o \quad \text{vir} \quad \delta > 0 \quad \text{en klein genoeg.}$$

L_v is konveks want as $\alpha + \beta = 1$, α en $\beta \geqslant 0$, dan volg vir enige λ, μ met $0 < \lambda < 1$ en $0 < \mu < 1$

$$\alpha((1-\lambda)v + \lambda w) + \beta((1-\mu)v + \mu w')$$

$$= (1-r)[\alpha + \beta - (\alpha\lambda + \beta\mu)]v/(1-r) + r[\alpha\lambda w + \beta\mu w']/r$$

$$= (1-r)v + rw^*, \quad \text{waar } r = \alpha\lambda + \beta\mu \quad \text{en } 0 < r < 1.$$

$$\|w^*\| = \|\alpha\lambda w + \beta\mu w'\|/r$$

$$< (\alpha\lambda + \beta\mu)\delta/r = \delta \text{ mits } w, w' \in B_\delta(o).$$

Gevolglik is L_v konveks.

Vervolgens word bewys dat L_v oop is.

Laat $u = (1-\lambda)v + \lambda w$, $0 < \lambda < 1$ en $w \in B_\delta(o)$.

Stel $s = r\|v-u\| / \|v-w\|$, waar $r = \delta - \|w\|$.

Dan is $s > 0$ en $r = \delta - \|w\| > 0$.

As $u_o \in B_s(o) + u$ dan bestaan daar $u_s \in B_s(o)$ sodanig dat

$$\begin{aligned} u_o &= u_s + u \\ &= (1-\lambda)v + \lambda(w + u_s/\lambda), \\ \|w + u_s/\lambda\| &< \|w\| + s/\lambda \\ &= \|w\| + s/(\|u-v\|/\|v-w\|) \\ &= \|w\| + r = \delta. \end{aligned}$$

Gevolglik is $u_o \in L_v$. Aangesien $B_s(o) + u$ 'n omgewing van u is, wat bevat is in L_v, is L_v 'n oop versameling. Die resultaat volg aangesien $L_v \subset K$.

2. Stelling.

Vir enige konvekse versameling K met $0 \in K^o$ is $\overline{K^o} = \bar{K}$.

Bewys.

Laat $x \in K$. Volgens Lemma 1 bestaan daar 'n δ en L_x sodanig dat $L_x \subset K^o$.

$$(1-\lambda)x + \lambda w \in K^o \text{ vir } 0 < \lambda < 1 \quad \text{impliseer}$$
$$x \in \overline{K^o}.$$

Dus $K \subset \overline{K^o} \subset \bar{K}$ en die resultaat volg.

3. Stelling

<u>As</u> $v_o \in \partial K \equiv$ <u>die rand van</u> K, K <u>is konveks en geslote met</u> $0 \in K^o$, <u>dan bestaan daar 'n</u> $z_o = x^* \in X^*$ <u>sodanig dat</u>

$$x^* \neq 0 \quad \underline{\text{en}} \quad (x^*, v_o - v) \geqslant 0 \quad \underline{\text{vir alle}} \quad v \in K.$$

<u>Bewys</u>.

$v_o \notin K^o$ impliseer daar bestaan $x^* \neq 0$ sodanig dat

$$(x^*, v_o - v) \geqslant 0 \quad \text{vir alle } v \in K^o,$$

volgens die Hahn-Banach Stelling [44, Th. 3.4a, p 58].

Vir $v \in K$ is $v_t = (1-t)\,v \in K^o$ volgens Lemma 1 en $v_t \to v$ as $t \to 0$.

$$0 \leqslant (x^*, v_o - v_t) \to (x^*, v_o - v) \quad \text{as} \quad t \to 0.$$

Die resultaat volg.

VERWYSINGS

1. S. Agmon. Lectures on elliptic boundary value problems. (D VAN NOSTRAND COMP. INC. PRINCETON, NEW JERSEY TORONTO, NEW YORK, LONDON 1965.)

2. C. Baiocchi. Equations aux dérivees partielles problemes à frontiere libre en hydraulique. C.R. Acad. Sc. Paris, t 278 (1974), 1201 - 1204, Serie A.

3. C. Baiocchi, V Comincioli, L Guerri, G. Volpi. Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: numerical approach, Calcolo vol. X 1973 (Appendix A) 1 - 85.

4. H. Brezis Problems unilateraux. Jnl. de Math. Pures et Appl. Vol. 51, (1972), 1 - 168.

5. H.R. Brezis, G. Stampacchia. Sur la regularité de la solution d'inequations elliptiques. Bull. Soc. math. France, 96 (1968), 153 - 180.

6. F.E. Browder. Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 56 (1966), 1080 - 1086.

7. F.E. Browder. Existence and perturbation theorems for non-linear maximal monotone operators in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 322 - 327.

8. F.E. Browder. Nonlinear equations of evolution and nonlinear accretive operators in Banach Spaces. Bull Amer. Math. Soc. 73 (1967), 867 - 874.

9. F.E. Browder. Nonlinear maximal monotone operators in Banach spaces. Math. Ann. 175 (1968), 89 - 113.

10. F.E. Browder. Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 71

(1965), 780 - 785.

11. F.E. Browder. Nonlinear variational inequalities and maximal monotone mappings in Banach spaces. Math. Ann. 183 (1969), 213 - 231.

12. F.E. Browder. On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone non-linear operators in Banach spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 56 (1966), 419 - 425.

13. F.E. Browder. Variational boundary value problems for quasi-linear elliptic equations of arbitrary order. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 31 - 37.

14. L.A. Caffarelli, A. Friedman. The obstacle problem for the biharmonic operator. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (4) 6 (1979), no. 1, 151 - 184.

15. G. Cimatti. On a problem of the theory of lubrication governed by a variational inequality. Appl. Math. and Optimization 3 (1977), 227 - 242.

16. R. Courant. Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces. (Interscience Publishers, Inc., New York, London 1950.)

17. M.G. Crandall, A. Pazy. Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets. Jnl. Funct. Anal. 3 (1969), 376 - 418.

18. N. Dunford, J.T. Schwartz. Linear operators, part I. (New York: Interscience 1957.)

19. G. Duvaut, J.L. Lions. Inequalities in mechanics and physics. (Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York 1976); [Les inequations en mecanique en physique, Paris: Dunod 1972].

20. S. Easwaran. Quadratic functionals of n^{th} order. Canad. Math Bull. 19 (1976), no. 2, 159 - 167.

21. A. Friedman. Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary. Jnl. of Funct. Anal. 18 (1975), 151 - 176.

22. A. Friedman. Partial differential equations. Robert E. Krieger Publishing Company Huntington, New York, 1969.

23. R. Glowinski, J.L. Lions, R. Tremoliéres. Analyse numerique des inequations variationnelles, I, II, (Paris : Dunod 1976.)

24. H.S.P. Grässer. The complete figure for second order multiple integral problems in the calculus of variations. Aequationes math. 14 (1976), 363-386.

25. P. Hartman, G. Stampacchia. On some non-linear elliptic differential-functional equations. Acta Math. 115 (1966), 271 - 310.

26. T. Kato. Accretive operators and nonlinear evolution equations. Proceedings of Symposia in Pure Math. Vol. XVIII, Pt. 1 (Nonlinear Functional Analysis) A.M.S. 1970, 138 - 161.

27. T. Kato. Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity. Bull. Amer. Math. Soc. 70(1964), 548 - 550.

28. T. Kato. Nonlinear semigroups and evolution equations. J. Math. Soc. Japan, Vol. 19, No. 4, 1967, 508 -520.

29. J.L. Kelley, I. Namioca. Linear topological spaces. (D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, N.J., 1963.)

30. N. Kikuchi. An analysis of the variational inequalities of seepage flow by finite-element methods. Quarterly of Appl. Math. 1977, 149 - 163.

31. Y. Kōmura. Nonlinear semi-groups in Hilbert spaces. J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493 - 507.

32. H. Lewy, G. Stampacchia. On the regularity of the solution of a variational inequality. Comm. Pure and Appl. Math. vol. XXII (1969), 153 - 188.

33. J.L. Lions. Numerical methods for variational inequalities. Applications in Physics and in Control Theory. Inf. Proc. 77, B. Gilchrist, editor I.F.I.P, North-Holland Publishing Company (1977), 917 - 924.

34. J.L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires (Paris: Dunod 1969).

35. J.L. Lions, E. Magenes. Problemes aux limites non homogènes et applications, vol. 1, (Paris: Dunod 1968.) English Translation: Non-homogeneous boundary value problems and applications. (Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972).

36. J.L. Lions, G Stampocchia. Inequationes variationelles non coercives. C.R. Acad. Sci. Paris, 261(1965), 25 - 27.

37. J.L. Lions, G. Stampacchia. Variational inequalities. Comm. Pure and Appl . Math. XX (1967), 493 - 519.

38. G.J. Minty. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. Duke Math. J. 29 (1962), 341 - 346.

39. J.J. Moreau. Sur la fonction polaire d'une fonction semi-continue superieurement. C.R. Acad. Sci. Paris. 258 (1964), 1128 - 1130.

40. U. Mosco. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. Advances in Math. 3 (1969), 510 - 585.

41. Z. Nehari. Sufficient conditions in the calculus of variations and in the theory of optimal control. Proc. Amer. Math. Soc. 39 (1973), 535-539.

42. L.A. Pars. An introduction to the calculus of variations. (Heinemann: London Melbourne Toronto 1962.)

43. W. Rossouw. 'n Behoudwetformulering vir randwaardeprobleme. Universiteit van Pretoria, Dept. Toegepaste Wiskunde, Navorsingsverslag U.P. T W 6, 1977.

44. W. Rudin. Functional Analysis. (McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.)

45. N. Sauer. Linear evolution equations in two Banach spaces. Sal verskyn in Proc. Royal Soc. Edinburgh.

46. M. Schechter. Modern methods in partial differential equations. An introduction (McGraw-Hill 1977.)

47. L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann and Gie, Paris, 1966.

48. I. Soucek. The spaces W^k and direct methods of the calculus of variations in nonreflexive spaces. Application of functional methods to the boundary value problems of mathematical physics. Proc. Third Soviet-Czechoslovak Conf. Novosibirsk, 1971 (Russian), pp 236 -244. Ins. Mat. Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Navosibirsk 1972.

49. G. Stampacchia. Formes bilineares coercitives sur les ensembles convexes. C.R. Acad. Sci. Paris 258 (1964), 4413 - 4416.

50. G. Stampacchia. On a problem of numerical analysis connected with the theory of variational inequalities. Symposia Math. X (1972), 281 - 293.

51, G. Strang, G.J. Fix. An analysis of the finite element method. (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1973).