

EINDIGE-ELEMENT-METODES VIR TYDAFHANKLIKE

PARSIËLE DIFFERENSIAALVERGELYKINGS

*deur*

FREDERIK DEVILLEBOIS/ VAN NIEKERK

*Voorgelê ter vervulling van 'n deel  
van die vereistes vir die graad*

D.Sc.

IN DIE FAKULTEIT WIS- EN NATUURKUNDE

UNIVERSITEIT VAN PRETORIA

PRETORIA

November 1981

(i)

BEDANKINGS

Met die voltooiing van hierdie proefskrif betuig ek graag my opregte dank aan die volgende persone:

*Prof J A Snyman:* Ten aanvang, en in die besonder, my hartlike dank en waardering aan *prof J A Snyman* van die Departement Toegepaste Wiskunde aan die Universiteit van Pretoria wat as promotor vir hierdie proefskrif opgetree het. U indringende belangstelling en volgehoue aanmoediging was *die* beslissende stukrag in die realisering van hierdie proefskrif.

*Prof P J Zietsman:* My dankwoord aan u is óók hartlik. Deur u toedoen en welwillendheid as Departementshoof van Wiskunde aan die Universiteit van Pretoria, was dit vir my moontlik om my navorsingsprogram af te handel.

*Dr Ansie Meiring:* U hulp en bystand met die finale tegniese versorging van hierdie proefskrif kan nie oorskat word nie - en word as sodanig waardeer.

Aan al my *Kollegas* in die Departement Wiskunde en die Departement Toegepaste Wiskunde: U belangstelling het deurgaans as aanmoediging gedien.

*Mev C Vos:* U het nie alleen die tikwerk op uiters bekwame wyse behartig nie, maar ook met u geduld en vriendelikheid my taak aansienlik makliker gemaak.

Vir *Moedie, Elize*, familie en vriende wil ek ten slotte bedank vir hulle besondere ondersteuning.

EINDIGE-ELEMENT-METODES VIR TYDAFHANKLIKE PARSIELE  
DIFFERENSIAALVERGELYKINGS

deur

Frederik Devillebois van Niekerk

Promotor : Prof J A Snyman  
Departement: Toegepaste Wiskunde  
Graad : D.Sc.

SAMEVATTING

Hierdie proefskrif verteenwoordig 'n studie van die numeriese oplossings van tydafhanklike differensiaalvergelykings deur eindige-element-metodes. Die eindige-elemente waarmee die benaderde oplossings bereken word is afhanklik van die ruimte- sowel as van die tydsveranderlike. 'n Nuwe Galerkin-metode word geformuleer waarin die ruimtelike en tydsafwyking van die benaderde oplossing gelyktydig in een of ander sin geminimeer word.

Die ondersoek van die nuutgeformuleerde metode is hoofsaaklik numeries en eksperimenteel van aard. Indien analitiese oplossings van die probleme onder beskouing wel beskikbaar is of verkry kan word, word dit gebruik om die benaderde oplossing numeries te toets. Indien sulke oplossings egter nie verkry kan word nie, sal die resultate numeries vergelyk word met oplossings wat deur ander numeriese metodes verkry is.

In die eerste plek word 'n oorsig gegee van die eindige-element-metodes wat op die huidige oomblik algemeen gebruik word vir die oplossing van begin- en randwaarde-probleme. Die klem sal egter op die Galerkin-metode en sy variasies val.

Vervolgens beskou ons die toepassing van eindige-element-metodes op eendimensionale probleme deur basisfunksies te gebruik wat afhanklik van die tydsveranderlike is. 'n Voortmarsjeer-in-tyd-metode word ontwikkel wat as platvorm vir die voortmarsjeer-in-tyd-metode vir tweedimensionale probleme dien.

'n Veralgemening van die enkelstap-metode lei nou na 'n Galerkin-metode met die basisfunksies afhanklik van die ruimte- sowel as van die tydsveranderlike. Hierdie metode word toegepas op:

- (i) Die hittevergelyking met Dirichlet-randvoorwaardes.
- (ii) Die geleiding-diffusie vergelyking met periodiese, Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes.

Ten slotte word die metode toegepas op:

- (i) Die golfvergelyking met Dirichlet-randvoorwaardes en verskillende beginvoorwaardes.
- (ii) Die golfvergelyking met gekoppelde randvoorwaardes.

FINITE ELEMENT METHODS FOR TIME-DEPENDENT PARTIAL DIFFERENTIAL  
EQUATIONS

by

Frederik Devillebois van Niekerk

Promotor : Prof J A Snyman

Department: Applied Mathematics

Degree : D.Sc.

SUMMARY

This thesis is concerned with the numerical solutions of time-dependent differential equations by finite element methods. The solutions are approximated by finite elements which depend on both space and time variables. A new Galerkin method is formulated in which the deviations of the approximate solution in both space and time are simultaneously minimized in some sense.

The investigation of the new method is mainly of a numerical and experimental nature. Where the analytical solutions of the problems considered are available, they are compared to the numerical solutions. If such solutions are not available then the numerical results will be compared to the solutions obtained by other known numerical methods.

Firstly a survey of finite element methods which are presently used to solve boundary value problems is presented. The Galerkin method and variations thereof will be emphasized.

Next we consider the application of finite element methods to one-dimensional problems by using basis functions which are naturally dependent on time only. A step-by-step method is developed which forms the basis for a step-by-step method for two-dimensional problems.

A generalisation of the one-step method leads to a Galerkin method in which the basis functions are dependent on both space and time variables. The method is applied to:

- (i) The heat equation with Dirichlet boundary conditions
- (ii) The convection-diffusion equation with periodic, Dirichlet and Neumann boundary conditions.

In conclusion we apply this method to:

- (i) The wave equation with Dirichlet boundary conditions and various different initial conditions.
- (ii) The wave equation with coupled boundary conditions.

## INHOUDSOPGAWE

<u>Bedankings</u>	(i)
<u>Samevatting</u>	(ii)
<u>Summary</u>	(iv)

### HOOFSTUK 1

1.1 Inleiding	1
1.2 Die doel van hierdie studie	4

### HOOFSTUK 2

#### EINDIGE-ELEMENT-METODES VIR TYDAFHANKLIKE PROBLEME

2.1 Inleiding	10
2.2 Voorkennis	13
2.2.1 Lineêre operator	13
2.2.2 Binneproduk	13
2.2.3 Positief-definiëte en simmetriese operatore	14
2.2.4 Hilbert-ruimte	14
2.2.5 Sobolev-ruimte	14
2.2.6 Beste benadering	15
2.3 Kleinste kwadraatmetode	16
2.3.1 Basiese beginsel	16
2.3.2 Toepassing op tydafhanklike probleme	18
2.4 Rayleigh-Ritz-metode	21
2.4.1 Inleiding	21
2.4.2 Kleinste kwadraatformulering van die Rayleigh-Ritz-metode	21

(vii)

2.4.3	Alternatiewe formulering van die Rayleigh-Ritz- metode	24
2.5	Die Galerkin-metode	28
2.5.1	Inleiding en formulering van die metode	28
2.5.2	Die kontinue-tyd-Galerkin-metode	29
2.5.3	Die diskrete-tyd-Galerkin-metode	35
2.5.3.1	Eindige-verskil-metodes in tyd	37
2.5.3.2	Eindige-elemente in tyd	45
2.6	Kollokasie-metode	49

### HOOFSTUK 3

#### EINDIGE-ELEMENTE IN TYD: TOEPASSING OP EENDIMENSIONALE PROBLEME

3.1	Inleiding	51
3.2	Hamilton se beginsel	51
3.3	Formulering van die metode van Argyris en Scharpf	54
3.4	Toepassing	61
3.4.1	Enkelstapoplossing	62
3.4.2	Globale oplossing	64
3.5	Lineêre Lagrange-polinome as basisfunksies	66
3.5.1	Enkelstapoplossing	69
3.5.2	Globale oplossing	71
3.6	Galerkin-metode	72
3.6.1	Lineêre Lagrange-polinome as basisfunksies	73
3.6.1.1	Enkelstapmetode	76
3.6.1.2	Globale metode	78



(viii)

3.6,2	Kubiese Hermiet-polinome as basisfunksies	79
3.6.2.1	Enkelstapmetode	83
3.6.2.2	Globale metode	84
3.7	Numeriese resultate	87
3.7.1	Gevolgtrekkings aangaande numeriese resultate	97

HOOFSTUK 4

'N NUWE GALERKIN-TIPE-METODE VIR PARABOLIESE PROBLEME

4.1	Eindige-element-metodes gelyktydig toegepas in ruimte en tyd	98
4.1.1	Inleiding	98
4.1.2	'n Metode van Sigillito	100
4.1.3	'n Metode van Mitchell	102
4.1.3.1	Die golfvergelyking	102
4.1.3.2	Die hittevergelyking	103
4.1.4	'n Metode van Noble	104
4.1.5	Formulering van die GRTG-metode	107
4.2	Toepassing van die GRTG-metode op die hittevergelyking	111
4.2.1	Keuse van basisfunksies	112
4.2.2	Die GRTG-metode	116
4.2.3	Numeriese resultate	120
4.2.4	Bespreking van numeriese resultate	125
4.3	Toepassing van die GRTG-metode op 'n geleiding-diffusie-probleem	128
4.3.1	Dirichlet-randvoorwaardes	128
4.3.1.1	Numeriese resultate	133
4.3.2	Periodiese randvoorwaardes	140
4.3.2.1	Numeriese resultate	142

4.3.3	Neumann-randvoorwaardes	146
4.3.3.1	Numeriese resultate	149
4.4	Bespreking van numeriese resultate	153

## HOOFSTUK 5

### TOEPASSING VAN DIE GRTG-METODE OP HIPERBOLIESE PROBLEME

5.1	Inleiding	156
5.2	Keuse van basisfunksies vir die GRTG-metode	157
5.3	Die GRTG-metode in geval van Dirichlet-voorwaardes	164
5.3.1	Numeriese resultate	172
5.3.1.1	Bespreking van numeriese resultate	179
5.4	Die GRTG-benadering in die geval van Neumann-rand-voorwaardes	181
5.4.1	Numeriese resultate	190
5.5	Gevolgtrekkings en bespreking van numeriese resultate	200

### BYLAAG A

Analitiese oplossing van die geleiding-diffusie-vergelyking	204
---	-----

### BYLAAG B

Analitiese oplossing van die golfvergelyking met gekoppelde randvoorwaardes	209
---	-----

### BYLAAG C

Crank-Nicolson-algoritme vir die hittevergelyking	215
<u>Verwysings</u>	219

## HOOFSTUK 1

### 1.1 INLEIDING

Die studie van partiële differensiaalvergelings vorm 'n baie belangrike deel van die wiskunde. Die historiese rede hiervoor is sekerlik dat partiële differensiaalvergelings so dikwels in probleme van die matematiese fisika voorgekom het. Vandag is die modellering van probleme in terme van differensiaalvergelings nie net beperk tot die fisika nie, maar kom dit in bykans elke studieveld vanaf chemie, fisiologie tot by die ekonomie voor. Dit is egter by wyse van hoë uitsondering dat oplossings van realistiese modelle in 'n eksakte formulevorm gevind kan word. Die ontwikkeling en gebruik van numeriese metodes om benaderde oplossings te vind, is dus van uiterste belang. Die numeriese metodes om benaderde oplossings tot partiële differensiaalvergelings te vind, kan hoofsaaklik in twee kategorieë geplaas word: eindigever-skil-metodes en eindig-element-metodes. Alhoewel eindigever-skil-benaderings vir afgeleides reeds so lank terug as 1768 deur Euler gebruik is, is relatief min vordering in numeriese tegnieke voor die huidige eeu gemaak. Die ontwikkeling van die rekenaar het oor die afgelope dertig jaar as 'n geweldige stimulus gedien vir die ontwikkeling van nuwe algoritmes. Sedert 1950 het daar 'n wisselwerking tussen die navorsing in numeriese analise en relevante gebiede van die analise in wiskunde ontstaan. 'n Tipiese voorbeeld van hierdie wisselwerking is die eindig-element-metode vir die numeriese oplossing van partiële differensiaalvergelings. Hierdie

2.

metode is volgens Zienkiewicz [49] deur ingenieurs ontwikkel vir die gebruik deur ingenieurs. Hierna het wiskundiges gekom en die teoretiese aspekte van eindige-elemente ondersoek en op 'n vaste teoretiese grondslag geplaas. Die eindige-element-metode het hom in die praktyk bewys en vandag is dit nie meer moeilik om 'n sterk saak vir eindige-element-metodes te probeer stel nie. Aanvanklik was daar egter 'n groot tweestryd oor die meriete van eindige-element-metodes teenoor die van gevestigde eindige-verskil-metodes. Dié twee klasse hoef egter nie teenoor mekaar afgespeel te word nie maar behoort eerder albei beskou te word as twee kragtige en onderling aanvullende metodes om benaderde oplossings mee te bereken.

In hierdie studie val die klem op *eindige-element-metodes*.

Ter inleiding word 'n paar aspekte aangaande hierdie metode kortliks beskryf.

Vir eindige-element-metodes is daar twee beginsels wat vanuit 'n wiskundige oogpunt belangrik is:

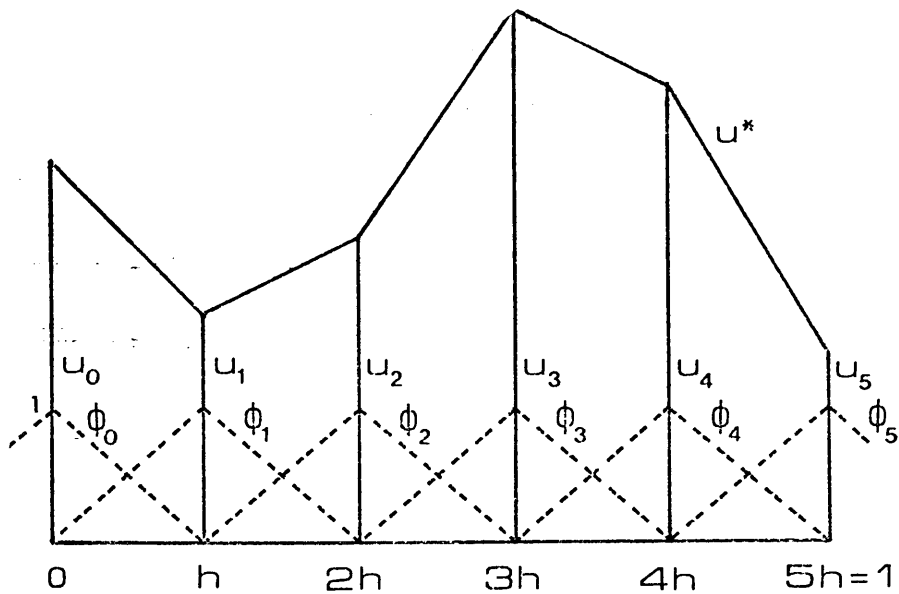
- (i) Die keuse van lokale parameters.
- (ii) Die gebruik van verskillende variasiebeginsel tegnieke om 'n gegewe partiële differensiaalvergelyking te transformeer na 'n stelsel algebraïese vergelykings.

Die keuse van lokale parameters kom ter sprake by die uitdrukking vir die benaderde oplossing (sê  $u^*$ ). Gestel, in die algemeen, dat  $u^*$  gegee word deur

$$u^* = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$$

3.

waar  $u_i$  parameters is wat bepaal moet word en  $\phi_i$  die sg basisfunksies is. Die basisfunksies  $\phi_i$  het nou "klein" draers indien die gebied waaroor dit nie-nul is omgekeerd eweredig is aan die aantal parameters  $N$ . Indien die aantal parameters dus toeneem sal die draers van  $\phi_i$  "kleiner" word. 'n Tipiese voorbeeld is die keuse van parameters wat die stukgewys lineêre funksie in figuur 1.1 beskryf met  $N = 5$  en lineêre basisfunksies  $\phi_i$  met draers van lengte  $2h = 2/N$ . Indien die parameter  $u_3$  byvoorbeeld verander, sal die funksie  $u^*$  slegs oor die interval  $[2h, 4h]$  verander.



FIGUUR 1.1

Deur die gebruik van variasiebeginsels in (ii) word bedoel dat die toepassing van 'n variasiebeginsel, op 'n lineêre differensiaalvergelyking, die gegewe vergelyking transformeer na 'n stelsel lineêre algebraïese vergelykings met koëffisiëntmatriks  $M$ . Die elemente van hierdie koëffisiëntmatriks  $M$

word gegee deur 'n bilineêre funksionaal  $B(\phi_i, \phi_j)$  met  $\phi_i$  en  $\phi_j$  basisfunksies. Die oplossing van hierdie stelsel algebraïese vergelykings lewer dan die parameters  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Die bilineêre funksionaal word sodanig gekies dat indien  $\phi_i$  en  $\phi_j$  disjunkte draers het, dan is

$$B(\phi_i, \phi_j) = 0.$$

Die matriks  $M$  is dus yl en lewer 'n ekonomiese stelsel vergelykings om op te los. In tydafhanklike probleme word die basisfunksies gewoonlik as funksies van die ruimteveranderlike gekies terwyl die parameter  $u_i$  as 'n funksie van tyd beskou word. Die partiële differensiaalvergelyking word dan deur 'n variasiebeginsel getransformeer na 'n gewone differensiaalvergelyking in tyd. Hierdie vergelyking word dan getransformeer na 'n afgebraïese stelsel deur òf 'n eindige-verskil- òf 'n eindige-element-metode te gebruik.

## 1.2 DIE DOEL VAN HIERDIE STUDIE

Die doel van hierdie studie is om eindige-element-metodes te ontwikkel met die basisfunksies afhanklik van die ruimte- sowel as van die tydsveranderlike en waarin gelyktydig die ruimtelike en tydsafwyking van die benaderde oplossing in een of ander sin geminimeer word. In die literatuur word daar wel melding gemaak van die moontlikheid om die Galerkin-metode toe te pas met basisfunksies in ruimte en tyd maar baie min werk hieroor is gedoen soos wat duidelik blyk uit die oorsig wat op hierdie hoofstuk volg. In hierdie studie word 'n spesiale vorm van dié metode volledig ontwikkel en toegepas op 'n verskeidenheid probleme. In die algemeen kan ons

## 5.

die metode kortliks as volg beskryf:

Laat  $A$  'n lineêre differensiaaloperator wees sô dat

$$A u = f \quad \dots (1.1)$$

Gestel die eksakte oplossing  $u(x, t)$  word benader deur

$u^*(x, t)$  met

$$u^*(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x, t) \quad \dots (1.2)$$

Die swak oplossing van (1.1) word gedefinieer deur

$$(A u, v) = (f, v) \quad \dots (1.3)$$

met  $(\cdot, \cdot)$  'n binneproduk in 'n geskikte lineêre deelruimte,  $s \in H$ , en  $v \in H$ .

Indien

$$H = \text{span} \{ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N \}$$

en  $v = \phi_j$ , kan ons (1.3) skryf as

$$\sum_{i=1}^N (A \phi_i, \phi_j) u_i = (f, \phi_j) \quad \dots (1.4)$$

met  $j = 1, \dots, N$ .

Die differensiaalvergelyking (1.1) word dus direk getransformeer na die algebraïse stelsel (1.4) waaruit opgelos word vir die parameters  $u_i$ . Indien die operator  $A$  positief-definiet en simmetries is, sal die oplossing van (1.4) 'n ekstreemwaarde lewer. Vir die swak vorm van die benadering word

daar egter geen beperking op die lineêre operator gelê nie met die gevolg dat die oplossing van (1.4) nie noodwendig 'n ekstreemwaarde gee nie maar slegs 'n stasionêre waarde.

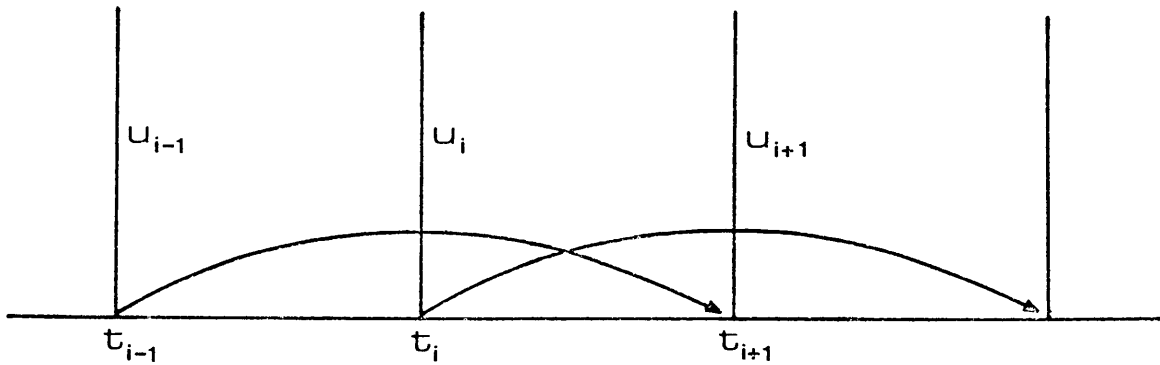
Die huidige studie is hoofsaaklik numeries en eksperimenteel van aard met die suiwer analise 'n aanvullende komponent.

Indien analitiese oplossings van die probleme beskikbaar is of verkry kan word, word dit gebruik om die benaderde oplossings numeries mee te toets. Indien sulke oplossings egter nie verkry kan word nie, sal die resultate numeries vergelyk word met oplossings wat deur ander numeriese metodes gegee word.

Ons begin hierdie studie in hoofstuk 2 deur 'n oorsig te gee van die eindige-element-metodes wat op die huidige oomblik algemeen gebruik word vir die oplossing van begin- en randwaarde-probleme. Die klem in hierdie hoofstuk word hoofsaaklik op die Galerkin-metode en sy variasies geplaas.

In hoofstuk 3 beskou ons die toepassing van eindige-element-metodes op eendimensionale probleme deur basisfunksies te gebruik wat afhanklik van die tydsveranderlike is. Eerstens word Hamilton se beginsel vir die beweging van 'n partikel bespreek en die gepaardgaande variasieprobleem word numeries opgelos. Die geassosieerde Newton-vergelyking word dan met 'n Galerkin-metode opgelos deur basisfunksies in tyd te gebruik. Die benaderde oplossings kan verkry word deur òf 'n globale oplossing oor die verlangde periode te bereken òf deur 'n enkelstapmetode wat herhaaldelik toegepas word. Die enkelstapmetode of voortmarsjeer-in-tyd-metode lewer 'n besonder ekonomiese metode vir hierdie beginvoorwaarde-probleme. Die voortmarsjeer-in-tyd-metode kan ons skematies sô voorstel:





Die waarde  $u_{i+1}$  by  $t = t_{i+1}$  word bereken met behulp van die waardes  $u_i$  en  $u_{i-1}$ . Hierdie idee het as platvorm gedien vir die voortmarsjeer-in-tyd-metode wat in die latere hoofstukke vir tweedimensionale-probleme ontwikkel is.

In hoofstuk 4 beskou ons 'n veralgemening van die enkelstap-metode soos toegepas op beginvoorwaarde-probleme. Die veralgemening lei dan na 'n Galerkin-metode met die basisfunksies afhanklik van die ruimte- sowel as van die tydsveranderlike. Ons verkry dus 'n metode waar *gelyktydig in ruimte en tyd* eindige-elemente gebruik word. Hierdie metode sal bekend staan as die "gelyktydige-ruimte-tyd-Galerkin-metode" wat gerieflikheidshalwe die *GRTG-metode* genoem sal word. In hoofstuk 4 word die GRTG-metode dan ook toegepas op parabooliese differensiaalvergelings. In besonder word die volgende hittevergeliking beskou:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T]$$

met  $u(x, 0) = \sin \pi x, \quad x \in [0, 1]$

$u(0, t) = 0, \quad t > 0$

en  $u(1, t) = 0, \quad t > 0.$

Tweedens word die geleiding-diffusie vergelyking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T]$$

$$\text{met } u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} x/h - 2 & , \quad 2h \leq x \leq 3h \\ -x/h + 4 & , \quad 3h \leq x \leq 4h \\ 0 & , \quad \text{andersins,} \end{cases}$$

$h = 0,1$  en die volgende drie tipes randvoorwaardes opgelos:

(1) Periodiese randvoorwaardes

$$u(1, t) = u(0, t)$$

(2) Dirichlet-randvoorwaardes

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

(3) Neumann-randvoorwaardes

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0.$$

In hoofstuk 5 pas ons die GRTG-metode toe op hiperboliese vergelykings. Hier beskou ons die golfvergelyking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T]$$

$$\text{met } u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$\text{en } u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

Twee verskillende vorms van die beginfunksie  $u_0(x)$  word beskou, naamlik:

$$(1) \quad u_0(x) = \sin \pi x$$

$$\text{en (2)} \quad u_0(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

As laaste toepassing van die GRTG-metode word die golfvergeljing

$$\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T]$$

met die gekoppelde randvoorwaardes

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$\text{en} \quad M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{by } x = 1 \quad , \quad t > 0$$

beskou.

Die numeriese resultate wat verkry word met die GRTG-metode, word telkens met die analitiese oplossing of met 'n benaderde oplossing verkry deur 'n erkende numeriese metode vergelyk.

HOOFSTUK 2EINDIGE-ELEMENT-METODES VIR TYDAFHANKLIKE PROBLEME2.1 INLEIDING

Wiskundige modelle vir evolusieprobleme lei dikwels tot paraboliese of hiperboliese differensiaalvergelykings. Indien die oplossing van die vergelyking 'n funksie  $u(x,t)$  is, met  $x$  die ruimteveranderlike en  $t$  die tyd, dan kan ons paraboliese vergelykings en hiperboliese vergelykings s6 onderskei:

In paraboliese vergelykings is die voortplantingspoed van versteurings oneindig groot terwyl dit by hiperboliese vergelykings eindig is. *Paraboliese* vergelykings word gebruik as 'n model vir diffusie, hittegeleiding, vloeï van vloeistowwe deur 'n poreuse medium en verskeie ander verskynsels. *Hiperboliese* vergelykings kan, onder andere, gekoppel word aan die transversale bewegings van 'n snaar, weerkundige en dinamiese probleme.

Tydafhanklike probleme is begin- en randvoorwaarde-probleme. Dit beteken dat voorwaardes by 'n sekere begintyd sowel as op die rand van 'n gebied voorgeskryf moet word. Di6 probleme kon ons wiskundig s6 formuleer:

Bepaal die oplossing van die differensiaalvergelyking

$$L[u] = f$$

binne 'n gebied  $D$  onderhewig aan die beginvoorwaardes

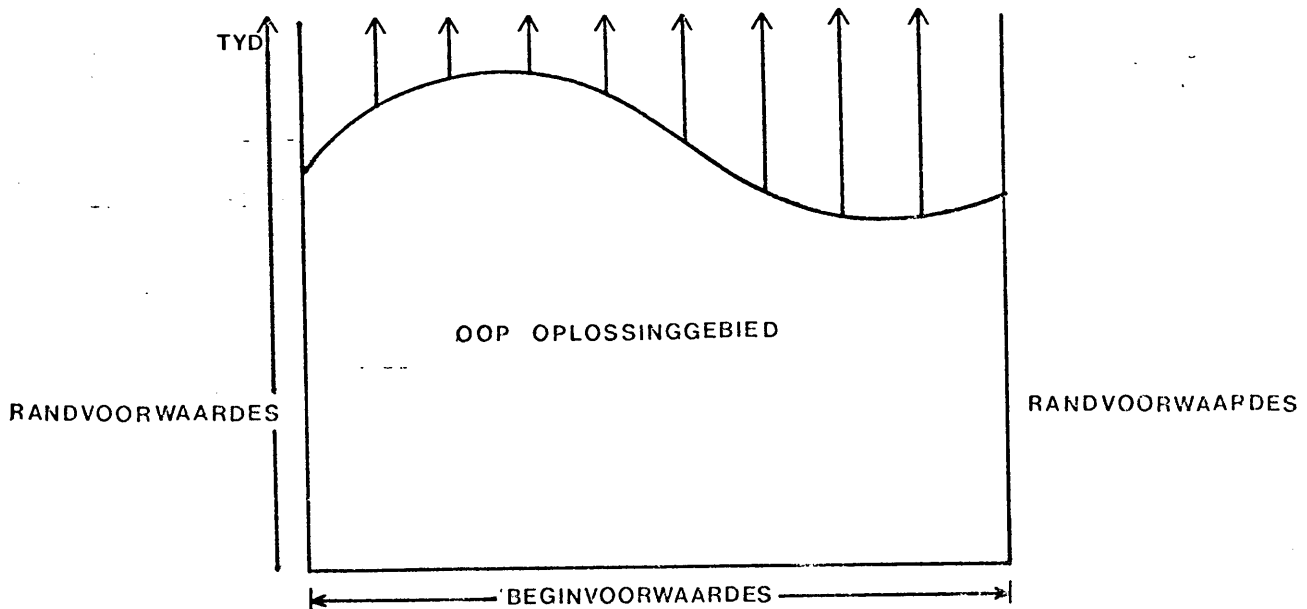
$$I[u] = g$$

en die randvoorwaardes

$$B[u] = h,$$

waar  $L$ ,  $I$  en  $B$  operatore op  $D$  is.

In figuur 2.1 stel ons die oplossing wat in tyd voortbeweeg skematies voor:



FIGUUR 2.1

Om die eksakte of analitiese oplossing van sodanige operator-vergelykings te bepaal is moeilik en dikwels selfs onmoontlik. Hierdie probleme, wat in baie gevalle uit die fisika, ingenieurswese en toegepaste wiskunde spruit, is dikwels egter van groot belang en noodsaak dat 'n oplossing gevind moet word. Numeriese analitici gee dus baie aandag aan die ontwikkeling van numeriese algoritmes om benaderde oplossings van hierdie tipe vergelykings te bepaal. 'n Belangrike klas sodanige benaderingstegnieke is gebaseer of spruit voort uit die variasiebeskouing van die oorspronklike probleem. Aangesien hierdie metodes die onderwerp van die huidige studie is, beskou ons inleidend die basiese eienskappe van 'n

variasiemetode. 'n Variasiemetode kan nou s6 gedefinieer word [ 36 ] :

Laat

$$A x = y$$

met A 'n lineêre operator tussen twee genormeerde lineêre ruimtes X en Y. Laat  $X_N$  die deelruimte wees wat voortgebring word deur die basisfunksies  $\{\phi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ; dit wil sê

$$X_N = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\} .$$

'n *Variasiemetode* is 'n numeriese algoritme om 'n funksie

$$x_N = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i$$

te bepaal s6 dat

$$\|A x_N - y\|_Y + \|x_N - x\|_X$$

in een of ander sin klein is.

Die volgende variasiemetodes sal vervolgens, met betrekking tot tydafhanklike probleme, bespreek word:

- (a) Kleinste kwadraatmetode
- (b) Rayleigh-Ritz-metode
- (c) Galerkin-metode
- (d) Kollokasiemetode

Hierdie metodes kan almal beskou word as projeksiemetodes omdat die oplossing of die benaderde oplossing op 'n eindig-

dimensionale deelruimte geprojekteer word. In hierdie hoofstuk gaan ons elkeen van hierdie metodes kortliks bespreek met die klem hoofsaaklik op die eindige-element-metodes. Die hoofdoel van hierdie aanbieding is om 'n oorsigtelike beeld te gee van die gevestigde eindige-element-metodes en om hul onderskeie sterk en swak eienskappe aan te toon. Sodoende mag dit moontlik wees om bestaande leemtes in die spektrum van huidige metodes uit te ken en moontlike nuwe rigtings aan te dui. Voordat ons enigeen van die metodes egter ondersoek, benodig ons enkele definisies en resultate uit die funksionaalanalise.

## 2.2 VOORKENNIS

### 2.2.1 Lineêre operator

Laat  $X$  en  $Y$  lineêre ruimtes wees met  $A$  'n afbeelding van  $X$  in  $Y$ .  $A : X \rightarrow Y$  is 'n lineêre operator indien

$$(a) \quad A(x + y) = Ax + Ay$$

$$(b) \quad A(\alpha x) = \alpha Ax$$

vir alle skalare  $\alpha$  en  $x, y \in X$ .

### 2.2.2 Binneproduk

'n Binneproduk  $(\cdot, \cdot)$  op  $X$  is 'n afbeelding van  $X \times X$  in die skalarveld  $K$  van  $X$  sô dat

$$(a) \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$(b) \quad (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$$

$$(c) \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(d) \quad (x, x) \geq 0$$

$$(x, x) = 0 \iff x = 0$$

### 2.2.3 Positief-definiëte en simmetriese operatore

'n Lineêre operator  $A : X \rightarrow X$ , met  $X$  'n binneprodukruimte is positief-definiëet indien

$$(A x, x) > 0, \quad x \neq 0.$$

Die operator is simmetries indien

$$(A x, y) = (x, A y)$$

vir alle  $x, y \in X$ .

### 2.2.4 Hilbert-ruimte

'n Lineêre ruimte  $X$  met 'n binneproduk gedefinieer op  $X$  noem ons 'n binneprodukruimte of 'n pre-Hilbert-ruimte. 'n Hilbert-ruimte is 'n binneprodukruimte wat volledig is in die metriek gedefinieer deur die binneproduk.

### 2.2.5 Sobolev-ruimte

Laat  $\Omega$  'n oop versameling in die  $n$ -dimensionale Euklidiese ruimte  $\mathbb{R}^n$  wees. Ons sê  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is in  $L^2(\Omega)$  as en slegs as  $f$  Lebesgue-meetbaar is en as

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Met bostaande norm is  $L^2(\Omega)$  'n genormeerde lineêre ruimte en inderdaad 'n Hilbert-ruimte [27] met betrekking tot die binneproduk

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx.$$



Die *Sobolev-ruimte* van orde 1 op  $\Omega$ ,  $H^1$ , word gedefinieer deur

$$H^1(\Omega) = \{f \mid f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\}$$

Die bygaande norm is dan

$$\|f\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Met  $H_0^1(\Omega)$  dui ons dié deelruimte van  $H^1(\Omega)$  aan wat bestaan uit al die funksies wat verdwyn op die rand  $\partial\Omega$  van  $\Omega$ .

### 2.2.6 Bestebenadering

'n Bestaanstelling:

Laat  $X_N$  'n eindigdimensionale deelruimte van 'n genormeerde ruimte  $X$  wees. Elke punt  $x \in X$  het dan 'n bestebenadering  $x_N \in X_N$  dit wil sê

$$\|x - x_N\| \leq \min_{y \in X_N} \|x - y\|$$

Vir die bewys hiervan kyk [36].

In 'n variasiemetode is die deelversameling

$$X_N = \text{span} \{ \phi_1, \dots, \phi_N \}$$

'n eindigdimensionale deelruimte van  $X$  en bogenoemde kragtige stelling verseker dus vir ons die bestaan van 'n bestebenadering.

Indien die ruimte  $X$  sekere konvekse voorwaardes bevredig, kan bewys word dat hierdie beste benadering ook eenduidig is ([30], [10]).

Die probleem is dus om hierdie benadering numeries te bereken en derhalwe keer ons terug na die verskillende variasiemetodes. Ons bespreek elkeen nou afsonderlik.

## 2.3 KLEINSTE KWADRAATMETODE

### 2.3.1 Basiese beginsel

Beste benaderings uit deelruimtes van Hilbert- of binneprodukruimtes staan bekend as kleinste kwadraatmetodes. Indien  $X_N \subset X$  met  $X$  'n lineêre ruimte en

$$X_N = \text{span} \{ \phi_1, \dots, \phi_N \}$$

dan volg uit die bestaanstelling § 2.2.6, dat daar 'n  $x_N \in X_N$  bestaan sō dat

$$\| x - x_N \| = \min_{y \in X_N} \| x - y \|.$$

$x_N$  word die kleinste kwadraatbenadering van  $x$  uit  $X_N$  genoem en  $x_N$  is dié element uit die deelruimte  $X_N$  wat  $x$  die beste benader.

Nou ontstaan die vraag hoe hierdie benadering bereken kan word. Die antwoord hierop word deur die volgende stelling gegee:

Stelling 1 ([36])

Laat  $X$  'n binneprodukruimte en

$$X_N = \text{span} \{ \phi_1, \dots, \phi_N \}$$

'n  $N$ -dimensionale deelruimte van  $X$  wees. Laat  $x$  'n willekeurige punt van  $X$  wees. Die eenduidige kleinste kwadraatbenadering  $x_N \in X_N$  van  $x$  word gegee deur

$$x_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$

met die vektor  $c = (c_1, \dots, c_N)^t$  die eenduidige oplossing van die lineêre stelsel

$$\sum_{j=1}^N (\phi_i, \phi_j) c_j = (x, \phi_i), \quad 1 \leq i \leq N, \dots \quad (2.1)$$

Verder volg dat die Gram-matriks

$$(a_{ij}) = ((\phi_i, \phi_j)), \quad 1 \leq i, j \leq N$$

nie-singulier is.

Vir die bewys van hierdie stelling kyk [36] of [30].

Ons pas nou stelling 1 toe op die operatorvergelyking

$$A x = y.$$

Ons soek dus na 'n  $x_N \in X_N$  sô dat

$$\| A x_N - y \| = \min_{x \in X_N} \| A x - y \|^2$$

Uit (2.1) volg nou direk dat as

$$x_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$

dan word die oplossingvektor  $c = (c_1, \dots, c_N)^t$  bepaal deur die oplossing van die lineêre stelsel

$$\sum_{j=1}^N (A \phi_i, A \phi_j) c_j = (y, A \phi_i), \quad 1 \leq i \leq N \quad \dots (2.2)$$

### 2.3.2 Toepassing op tydafhanklike probleme

'n Benaderingsmetode vir lineêre paraboliese probleme met behulp van kleinste kwadraatmetodes word deur Bramble en Thomée [4] voorgestel. Hulle diskretiseer eers in tyd en los dan die elliptiese probleem wat sō ontstaan op deur kleinste kwadraatmetodes. Die benaderde oplossings behoort in hierdie geval aan 'n eindigdimensionale deelruimte van funksies in die ruimte wat nie die homogene randvoorwaardes hoef te bevredig nie. Dié feit is juis een van die aantreklikhede van kleinste kwadraatmetodes. Ons beskryf kortliks die metode van Bramble en Thomée [4] :

Laat  $\Omega$  'n begrensde deelversameling van  $\mathbb{R}^N$  wees met 'n gladde rand  $\partial \Omega$ . Hulle beskou die benaderde oplossing van die volgende randvoorwaarde-probleem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \equiv \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

$$u = 0 \quad \text{op } \partial \Omega \times [0, \infty) \quad \dots (2.3)$$

$$u(x, 0) = v(x) \quad \text{in } \Omega.$$

Deur die tydafgeleide in (2.3) met 'n eindige-verskil-formule te vervang, word 'n benaderde oplossing  $u_k(x, t)$  met  $t = nk$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , gedefinieer deur die voorwaartse-verskil vergelyking

$$\frac{u_k(x, t + k) - u_k(x, t)}{k} = \Delta u_k(x, t + k), \quad x \in \Omega$$

$$u_k = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega \quad \dots \quad (2.4)$$

$$u_k(x, 0) = v(x) \quad , \quad x \in \Omega$$

Deur  $u_k(x, t) = v$ ,  $u_k(x, t + k) = w$  in (2.4) te stel, word die volgende vergelyking verkry wat vir  $w$  opgelos moet word indien  $v$  bekend is:

$$w - k \Delta w = v \quad \text{in } \Omega, \quad \dots \quad (2.5)$$

$$\text{en} \quad w = 0 \quad \text{op } \partial\Omega, \quad \dots \quad (2.6)$$

Vir 'n gegewe  $v \in H^{\mu+2}$ ,  $\mu \geq 0$ , is die benaderde oplossing van (2.5) en (2.6) die eenduidige funksie in 'n eindigdimensionale deelruimte  $S_h$  wat die funksionaal

$$\|\phi - k \Delta \phi - v\|^2 + \gamma_{kh} |\phi|^2, \quad \phi \in S_h \quad \dots \quad (2.7)$$

minimeer, met  $\|\cdot\|$  en  $|\cdot|$  die norm in  $L_2(\Omega)$  en  $L_2(\partial\Omega)$  respektiewelik. Die keuse van die gewig  $\gamma_{kh}$  in (2.7) is belangrik en word bepaal deur 'n a priori ongelykheid vir die elliptiese operator in (2.5). Bramble en Thomée [4] bewys dan vir glad genoeg beginwaardes  $v$  dat

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_k(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| = O(k) \text{ as } k \rightarrow 0.$$

Vir groter akkuraatheid kan daar in plaas van die voorwaartse-verskil die Crank-Nicolson-formule

$$\frac{\tilde{u}_k(x, t+k) - \tilde{u}_k(x, t)}{k} = \frac{1}{2} \Delta \tilde{u}_k(x, t+k) + \frac{1}{2} \Delta \tilde{u}_k(x, t)$$

gebruik word. In hierdie geval reduceer (2.5) en (2.6) na

$$w - \frac{1}{2} k \Delta w = v + \frac{1}{2} k \Delta v \quad \text{in } \Omega, \quad \dots (2.8)$$

$$\text{en} \quad w = 0 \quad \text{op } \partial \Omega, \quad \dots (2.9)$$

Vir die elliptiese probleem (2.8) en (2.9) bewys hulle dan dat

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_k(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| = O(k^2) \quad \text{as } k \rightarrow 0.$$

Die idees wat deur Bramble en Thomée [4], ontwikkel is, word deur Carasso [7] toegepas om die golfvergelyking met Dirichlet-randvoorwaardes benaderd op te los.

Soos reeds genoem, hoef die basisfunksies nie die randvoorwaardes te bevredig nie en sodoende kan probleme in 'n algemene gebied beskou word. Die nadele van kleinste kwadraatmetodes is egter dat die basisfunksies in 'n Hilbert-ruimte  $H^{\mu+2}$ ,  $\mu \geq 0$ , moet lê. Dit beteken dus dat daar streng gladheidvoorwaardes gestel word. 'n Tweede nadeel is dat die matriks wat  $\phi$  in (2.7) bepaal, 'n geaardheidsgetal het wat ongeveer die kwadraat is van die geaardheidsgetal van die matriks wat by die Galerkin-metode ontstaan [17]. Dit beteken dus dat die numeriese oplossing stadiger verkry word. 'n Besondere toepassing van die kleinste kwadraatmetode, waarin

'n sogenaamde energienorm geminimeer word, lei nou na die volgende variasiebeginsel-metode naamlik die Rayleigh-Ritz-metode.

## 2.4 RAYLEIGH-RITZ-METODE

### 2.4.1 Inleiding

Die term eindige-element-metode word geassosieer met die gebruik van stuksgewys polinome, in een, twee of drie dimensies, tesame met die Rayleigh-Ritz-metode en sy meer algemene vorm, die Bubnov-Galerkin-metode, om benaderde oplossings van operatorvergelykings te bepaal.

Die Rayleigh-Ritz benaderde oplossing van 'n operatorvergelyking kan eerstens beskou word as 'n kleinste kwadraatbenadering in terme van die sogenaamde energienorm. Hierdie uitgangspunt vereis dat die operator positief-definiet, simmetries en lineêr is op 'n geskikte binneprodukruimte  $X$  [36].

Alternatiewelik kan die Rayleigh-Ritz-metode ook beskou word as die minimering van 'n sekere funksionaal. Ons beskryf albei hierdie beskouings en toon aan dat hulle ekwivalent is.

### 2.4.2 Kleinste kwadraatformulering van die Rayleigh-Ritz-metode

Laat  $X$  'n lineêre deelruimte van 'n binneprodukruimte  $Y$  wees en gestel  $A : X \rightarrow Y$  is 'n lineêre operator. Gestel verder dat vir 'n gegewe  $y \in Y$  die vergelyking

$$Ax = y$$

'n oplossing  $x \in X$  besit.

Vir 'n gegewe  $N$ -dimensionale deelruimte  $X_N = \text{span} \{ \phi_1, \dots, \phi_N \}$  van  $X$  wil ons nou 'n benadering  $x_N \in X_N$  vir  $x$  vind. Ons soek dus na 'n funksie

$$x_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$

só dat  $\|x - x_N\|$  klein is in 'n bepaalde sin.

Indien  $A$  positief-definiet en simmetries is op  $X$ , kan ons 'n nuwe binneproduk  $(\cdot, \cdot)_A$  op  $X$  definieer deur

$$(u, v)_A = (Au, v), \quad u, v \in X$$

Hierdie binneproduk lewer dan die energienorm wat gedefinieer word deur

$$\|u\|_A^2 = (u, u)_A, \quad u \in X$$

$X$  is nou 'n genormeerde lineêre ruimte met  $X_N$  'n eindigdimensionale deelruimte. Uit die bestaanstelling, § 2.2.6, volg dan dat elke  $x \in X$  'n bestebenadering  $x_N \in X_N$  besit. Hierdie eenduidig bepaalde element  $x_N \in X_N$ , wat die minimeringsprobleem

$$\|x - x_N\|_A = \min_{\bar{x} \in X_N} \|x - \bar{x}\|_A$$

bevredig, word die *Rayleigh-Ritz-benadering* van  $x$  uit die deelruimte  $X_N$  genoem. Aangesien  $X_N = \text{span} \{ \phi_1, \dots, \phi_N \}$  volg uit stelling 1 dat  $x_N \in X_N$  gegee word deur

$$x_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$



met die vektor  $c = (c_1, \dots, c_N)^t$  die eenduidige oplossing van die lineêre stelsel

$$\sum_{j=1}^N (\phi_i, \phi_j)_A c_j = (x, \phi_i)_A, \quad 1 \leq i \leq N \quad \dots (2.10)$$

Omdat

$$(x, \phi_i)_A = (Ax, \phi_i) = (y, \phi_i)$$

kan ons die Rayleigh-Ritz-algoritme sô formuleer:

Die Rayleigh-Ritz-benadering  $x_N$  vir die eenduidige oplossing van die positief-definiet, simmetries en lineêre operator-vergelyking

$$A x = y$$

word gegee deur

$$x_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$

waar  $c = (c_1, \dots, c_N)^t$  die lineêre stelsel

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (\phi_i, \phi_j)_A c_j &= (x, \phi_i)_A \\ &= (y, \phi_i), \quad 1 \leq i \leq N \quad \dots (2.11) \end{aligned}$$

bevredig. Dié stelsel (2.11) kan ook geskryf word as

$$\sum_{j=1}^N (A \phi_i, \phi_j) c_j = (y, \phi_i), \quad 1 \leq i \leq N \quad \dots (2.12)$$

Die koëffisiëntmatriks

$$((A \phi_i, \phi_j)), \quad 1 \leq i, j \leq N$$

is positief-definiet en simmetries en is dus nie-singulier. Die eenduidige oplossing van  $(c_1, \dots, c_N)$  word dus verseker. Indien  $X_N$  'n deelruimte van latfunksies is, dit wil sê stuksgewys polinome, dan noem ons die funksie  $x_N$  'n eindige-element-benadering vir  $x$  uit  $X_N$ . Die metode staan dan ook bekend as 'n eindige-element-metode [36].

### 2.4.3 Alternatiewe formulering van die Rayleigh-Ritz-metode

Ons beskou nou die alternatiewe formulering van die Rayleigh-Ritz-metode, soos aangebied deur Davies [12], wat 'n algoritme bepaal vir die minimering van 'n funksionaal. Laat  $A$  'n positief-definiet en simmetriese operator op 'n gebied  $D \subset \mathbb{R}^2$  wees. Beskou nou die operatorvergelyking

$$A x = y \quad \text{in } D, \quad \dots (2.13)$$

met randvoorwaardes

$$B x = b \quad \text{op } \partial D, \quad \dots (2.14)$$

Die funksionaal vir (2.13) word gegee deur

$$I[x] = \iint_D (x A x - 2 x y + x A v - v A x) \, dx \, dy$$

waar  $v$  enige funksie is wat die randvoorwaardes (2.14) bevredig [12]. Die eksakte oplossing  $x$  van (2.13) word benader deur

$$x_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i \quad \dots (2.15)$$

met  $\phi_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , 'n versameling lineêr onafhanklike basisfunksies. Deur  $x$  met  $x_N$  te vervang, word die funksionaal:

$$\begin{aligned}
 I(c_1, \dots, c_N) &= c_i^2 \iint_D \phi_i A \phi_i \, dx \, dy \\
 &+ \sum_{j \neq i} c_i c_j \iint_D (\phi_i A \phi_j + \phi_j A \phi_i) \, dx \, dy \\
 &+ c_i \iint_D (-2 \phi_i y + \phi_i A v - v A \phi_i) \, dx \, dy \\
 &+ \text{terme onafhanklik van } c_i, \quad i = 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Vir die stasionêre waardes van  $I$  word die parameters  $c_i$  so gekies dat

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0.$$

Hieruit volg dan dat

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I}{\partial c_i} &= 2c_i \iint_D \phi_i A \phi_i + \sum_{j \neq i} c_j \iint_D (\phi_i A \phi_j + \phi_j A \phi_i) \, dx \, dy \\
 &+ \iint_D (-2 \phi_i y + \phi_i A v - v A \phi_i) \, dx \, dy \\
 &= 0, \quad i = 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}
 c_i \iint_D \phi_i A \phi_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} c_j \iint_D (\phi_i A \phi_j + \phi_j A \phi_i) \, dx \, dy \\
 = \iint_D \{ \phi_i y + \frac{1}{2} (v A \phi_i - \phi_i A v) \} \, dx \, dy, \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

Die volgende stelsel word dus verkry waaruit vir die  $c_i$ 's,  $i = 1, \dots, N$ , opgelos kan word:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = h_i, \quad i = 1, \dots, N \quad \dots (2.16)$$

met

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \iint_D (\phi_i A \phi_j + \phi_j A \phi_i) dx dy \quad \dots (2.17)$$

en 
$$h_i = \iint_D \{ \phi_i y + \frac{1}{2} (v A \phi_i - \phi_i Av) \} dx dy \quad \dots (2.18)$$

In matriksnotasie kan ons (2.16) skryf as

$$\underline{A} \underline{c} = \underline{h} \quad \dots (2.19)$$

Omdat A positief-definiëet is, volg dat  $\underline{A}$  nie-singulier is en dus kan uit (2.19) eenduidig opgelos word vir  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , [12].

Vir die Rayleigh-Ritz-metode, met A 'n positief-definiëete operator, kan verder aangetoon word dat die ry van benaderde oplossings ( $x_n$ ) konvergeer na die eksakte oplossing [12]. Dié prosedure lewer dus nie net 'n stasionêre waarde nie maar wel 'n ekstreemwaarde vir die variasieprobleem.

Die stelsel (2.16) kan ons ook skryf in terme van die binne-produk

$$(u, v) = \iint_D u v dx dy.$$

Dan volg vir  $i = 1, \dots, N$  dat

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\phi_i, A \phi_j) c_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\phi_j, A \phi_i) c_j \\ &= (\phi_i, y) + \frac{1}{2} (v, A \phi_i) - \frac{1}{2} (\phi_i, Av) \quad \dots (2.20) \end{aligned}$$

Indien die operator A verder self-toegevoeg is, met ander woorde,

$$(A x, y) = (x, Ay)$$

kan ons (2.20) s6 skryf:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (A \phi_i, \phi_j) c_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\phi_j, A \phi_i) c_j \\ &= (\phi_i, y) + \frac{1}{2} (v, A \phi_i) - \frac{1}{2} (A \phi_i, v), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Omdat die operator  $A$  simmetries is, volg dus dat

$$\sum_{j=1}^N (A \phi_i, \phi_j) c_j = (\phi_i, y), \quad i = 1, \dots, N. \quad \dots(2.21)$$

Ons merk op dat (2.21) presies dieselfde stelsel is as (2.12).

In tydafhanklike probleme lewer die Rayleigh-Ritz-metode egter 'n probleem in die sin dat die operatore nie noodwendig positief-definiet is nie. In die golfvergelyking, byvoorbeeld, is die operator

$$A \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

hiperbolies en nie positief-definiet nie. Die oplossing van

$$A x = y$$

lewer nou 'n stasionêre waarde wat *nie noodwendig* 'n ekstreemwaarde is nie. In die literatuur is daar geen aanduiding van die waarskynlikheid van *nie-ekstreem* oplossings. Dit beteken dat die ry van benaderde oplossings *nie noodwendig* na die eksakte oplossing konvergeer nie, nogtans kan die algoritme gebruik word om benaderde oplossings te vind. Die vereiste dat  $A$  'n positief-definiete operator moet wees, vir die sekerheid om 'n ekstreemoplossing te kry, het die gevolg gehad dat die gebruik van hierdie metode op tydafhanklike probleme grootliks geïnhibeer is - miskien oormatig so?

## 2.5 DIE GALERKIN-METODE

### 2.5.1 Inleiding en formulering van die metode

Die Rayleigh-Ritz-metode is van toepassing slegs as die operator sekere voorwaardes bevredig. Die vraag is egter of daar nie 'n vorm van die Rayleigh-Ritz-prosedure gevind kan word waar die vereistes op die operator verswak word nie? So 'n veralgemening van die Rayleigh-Ritz-metode lei op 'n natuurlike wyse na die Galerkin-metode ([36], [17], [31]). Beskou weer 'n operatorvergelyking

$$A x = y$$

met  $A : X \rightarrow X$  'n lineêre operator op 'n binneprodukruimte  $X$ . Laat

$$X_N = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\} \text{ en } Y_N = \text{span} \{\psi_1, \dots, \psi_N\}$$

$N$ -dimensionale deelruimtes van  $X$  wees. Die Galerkin-benadering vir  $x \in X$  word dan gedefinieer as die  $x_N \in X_N$  wat die volgende stelsel bevredig:

$$(A x_N - y, \psi_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq N. \quad \dots (2.22)$$

Die Galerkin-benadering is dus 'n ortogonale prosedure in plaas van 'n minimeringsprosedure soos die Rayleigh-Ritz-metode.

Indien

$$x_N = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i$$

in (2.22) gestel word, volg dat

$$\sum_{j=1}^N (A \phi_i, \psi_j) c_j = (y, \psi_i), \quad 1 \leq i \leq N \quad \dots (2.23)$$

Uit die stelsel (2.23) word dus vir die vektor  $c = (c_1, \dots, c_N)$  opgelos. Gewoonlik word die basisfunksies vir die deelruimtes  $X_N$  en  $Y_N$  dieselfde gekies, dit wil sê

$$\phi_i = \psi_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

en (2.23) word dan

$$\sum_{j=1}^N (A \phi_i, \phi_j) c_j = (y, \phi_i), \quad 1 \leq i \leq N \quad \dots (2.24)$$

Hierdie stelsel is presies dieselfde as (2.12) en (2.21) wat ons verkry het by die Rayleigh-Ritz-metode waar  $A$  'n positief-definiëte en simmetriese operator moet wees. Die Galerkin-metode kan dus toegepas word indien  $A$  nie-simmetries, en nie-positief-definiëte en selfs nie-lineêr is nie. In hierdie vorm is die Galerkin-metode dus 'n uitbreiding van die Rayleigh-Ritz-metode.

Ons gaan nou spesifieke Galerkin-metodes op tydafhanklike probleme bespreek.

### 2.5.2 Die kontinue-tyd-Galerkin-metode ([17], [34], [13])

Om die metode beter te kan illustreer, beskou ons spesifieke voorbeelde in plaas van 'n algemene operatorvergelyking.

Beskou, in besonder, as voorbeeld die *paraboliese vergelyking* met

(i) *Dirichlet-randvoorwaardes*.

Laat

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]$$

... (2.25)

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \Omega$$

$$u(x, t) = 0 \quad , \quad (x, t) \in \partial \Omega \times (0, T]$$

met  $L$  'n tweede orde differensiaaloperator en  $\Omega$  'n begrensde gebied in  $\mathbb{R}^n$ . Ons beperk ons in (2.25) tot homogene randvoorwaardes aangesien vir  $u(x, t) \neq 0$  op  $\partial \Omega$  kan die probleem met 'n transformasie herlei word na 'n homogene randvoorwaarde-probleem. Die swak oplossing  $u \in H^1$  wat korrespondeer met (2.24) bevredig die vergelykings

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + (Lu, v) = (f, v) \quad , \quad v \in H_0^1 \quad \dots (2.26)$$

$$\text{en} \quad (u, v)_{t=0} = (u_0, v) \quad , \quad x \in \Omega \quad \dots (2.27)$$

Laat  $M$  'n eindigdimensionale deelruimte van  $H_0^1(\Omega)$  wees.

Die kontinue-tyd-Galerkin-metode behels die bepaling van 'n  $U : [0, T] \rightarrow M$  sô dat

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}, V\right) + (LU, V) = (f, V) \quad , \quad V \in M \quad \dots (2.28)$$

$$\text{en} \quad (U, V)_{t=0} = (u_0, V) \quad \dots (2.29)$$

Die beginvoorwaarde  $U(\cdot, 0)$  word gewoonlik bepaal deur  $u_0$  te interpoleer in  $M$ . Op die oomblik sal ons nie in besonderhede hiervan ingaan nie want die verskillende metodes vereis verskillende benaderings van die beginvoorwaardes. Gestel nou dat

$$M = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$$

met  $\{\phi_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , lineêr onafhanklike basisfunksies en stel

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \phi_j(x)$$



Uit (2.28) volg dan met  $V = \phi_i$  dat

$$\sum_{j=1}^N (\phi_j, \phi_i) \alpha_j'(t) + \sum_{j=1}^N (L \phi_j, \phi_i) \alpha_j(t) = (f, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad \dots (2.30)$$

Uit (2.29) volg verder dat

$$\sum_{j=1}^N (\phi_j, \phi_i) \alpha_j(0) = (u_0, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad \dots (2.31)$$

Die vergelyking (2.31) bepaal dus die beginvoorwaardes vir die stelsel gewone differensiaalvergelykings (2.30). Hierdie stelsel kan ons nou in matriksnotasie s6 skryf:

$$\begin{aligned} A \underline{\alpha}'(t) + B \underline{\alpha}(t) &= \underline{b} \\ \text{en} \quad \underline{\alpha}(0) &= \underline{c} \end{aligned} \quad \dots (2.32)$$

met A en B die matrikse

$$\begin{aligned} A &= ((\phi_j, \phi_i)) \quad , \quad 1 \leq i, j \leq N \\ B &= ((L\phi_j, \phi_i)) \quad , \quad 1 \leq i, j \leq N \\ \text{en} \quad \underline{\alpha} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^t \\ \underline{b} &= ((f, \phi_i)) \quad , \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Die matrikse A en B is positief-definiet vir hierdie voorbeeld [18] en die beginvoorwaarde-probleem (2.32) het dus 'n eenduidige oplossing. Indien die vergelyking (2.25) lineêr is, en die matrikse A en B konstante matrikse is, kan die eksakte oplossing van (2.32) s6 uitgedruk word:

$$\underline{\alpha}(t) = \text{EXP}(-t A^{-1} B) \underline{\alpha}(0) + B^{-1} \underline{b} \quad \dots (2.33)$$

$$\text{met } \text{EXP}(-t C) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t C)^k}{k!}$$

en C 'n vierkantige matriks.

Die oplossing van (2.33) kan nou bereken word in terme van die oplossing van die eiewaardeprobleem

$$(\lambda A - B)u = 0$$

Hierdie berekenings is egter baie tydsaam en Mitchell [31] stel benaderde oplossings van (2.33) voor. Dit beteken die benadering van die term  $\text{EXP}(-t A^{-1} B)$  deur rasionale matriksfunksies. Dit word deur Padé- of Chebyshev-benaderings gedoen [31]. Thomée [42] pas ook die kontinue-tyd-Galerkin-metode toe op die hittevergelyking. Hy beskou dan gevalle waar die gewone differensiaalvergelykings eksakte oplossings het, asook 'n Padé-benadering om eindige-verskilbenaderings te vind.

Nou beskou ons die *paraboliese vergelyking* met

(ii) *Neumann-randvoorwaardes*

Laat nou

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + L u &= f(x, t) \quad , \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad , \quad x \in \Omega \quad \dots (2.34) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -g(x, t) \quad , \quad (x, t) \in \partial \Omega \times (0, T]$$

met n die uitwaartse normaalvektor op die rand  $\partial \Omega$  van  $\Omega$ .

Die swak oplossing  $u \in H^1$  wat korrespondeer met (2.24) bevredig nou die vergelykings

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + (Lu, v) + \langle g, v \rangle = (f, v) \quad , \quad v \in H^1 \quad \dots (2.35)$$

$$\text{en} \quad (u, v)_{t=0} = (u_0, v) \quad , \quad x \in \Omega \quad \dots (2.36)$$

$$\text{met} \quad \langle g, v \rangle = \int g v \, ds.$$

Vir M 'n eindigdimensionale deelruimte van  $H^1(\Omega)$  word die vergelykings wat ooreenstem met (2.28) en (2.29) nou

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} U, V\right) + (LU, V) + \langle g, V \rangle = (f, V), V \in M \quad \dots (2.37)$$

en

$$(U, V)_{t=0} = (u_0, V), V \in M \quad \dots (2.38)$$

Op 'n soortgelyke wyse as by die Dirichlet-randvoorwaardes lei hierdie vergelykings na die beginwaardeprobleem:

$$A \tilde{\alpha}'(t) + B \tilde{\alpha}(t) = \tilde{b}$$

$$\text{en} \quad \tilde{\alpha}(0) = \tilde{c}$$

met A, B en  $\tilde{c}$  soos in vergelyking (2.32) maar nou word  $\tilde{b}$  gegee deur

$$\tilde{b} = ((f, \phi_i) - \langle g, \phi_i \rangle), 1 \leq i \leq N.$$

Die eksakte oplossing, met die nodige aanpassing, word dan weer gegee deur (2.33).

Die tyd-kontinue-Galerkin-metode kan ook op *hiperboliese* vergelykings toegepas word. Beskou, in besonder, die hiperboliese probleem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, (x, t) \in [a, b] \times (0, T], \lambda > 0$$

$$u(x, 0) = u_0, x \in [a, b]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, x \in [a, b] \quad \dots (2.39)$$

met  $u(a, t) = 0 = u(b, t)$

Die swak oplossing  $u \in H^1$  bevredig nou, na faktorintegrasie, die vergelyking

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \quad v \in H^1_0 \quad \dots (2.40)$$

Laat  $M$  'n eindigdimensionale deelruimte van  $H^1_0 [a, b]$  wees.

Die kontinue-tyd-Galerkin-metode word gedefinieer deur

$U : [0, T] \rightarrow M$  s6 dat

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, v\right) + \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial t}, v\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \quad v \in M \quad \dots (2.41)$$

$$(U(0) - u_0, v) = 0, \quad v \in M$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}(0) - u_1, v\right) = 0, \quad v \in M$$

Vervang nou

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \phi_j(x)$$

in (2.41), dan geld, vir  $v = \phi_i$ , dat

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (\phi_j, \phi_i) \alpha_j''(t) + \lambda \sum_{j=1}^N (\phi_j, \phi_i) \alpha_j'(t) \\ + \sum_{j=1}^N (\phi_j', \phi_i') \alpha_j(t) = 0, \quad i=1, \dots, N \quad \dots (2.42) \end{aligned}$$

met

$$\sum_{j=1}^N (\phi_j, \phi_i) \alpha_j(0) = (u_0, \phi_i) \quad \dots (2.43)$$

en

$$\sum_{j=1}^N (\phi_j, \phi_i) \alpha_j'(0) = (u_1, \phi_i) \quad \dots (2.44)$$

Die vergelykings (2.42), (2.43) en (2.44) bepaal 'n stelsel tweede orde gewone differensiaalvergelykings. In matriks-

notasie kan ons die stelsel skryf as:

$$A \underline{\alpha}''(t) + B \underline{\alpha}'(t) + C \underline{\alpha}(t) = 0$$

met  $\underline{\alpha}(0) = \underline{c} \quad \dots (2.45)$

en  $\underline{\alpha}'(0) = \underline{d}$

Die matrikse A, B en C word bepaal uit vergelyking (2.42) terwyl die vektore  $\underline{c}$  en  $\underline{d}$  uit (2.43) en (2.44) respektiewelik bepaal word. Die eksakte oplossing van (2.45) kan bereken word in terme van die oplossing van eiewaardeprobleme. Hierdie berekenings is egter baie tydsaam [31] en word min in die praktyk toegepas. Teoretiese afskattings vir die benaderde oplossing van tweede orde hiperboliese vergelykings met Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes word gedoen deur Dupont [16], Wheeler [48] en Baker [3].

### 2.5.3 Die diskrete-tyd-Galerkin-metode

Die kontinue-tyd-metode van die vorige paragraaf is hoofsaaklik van teoretiese waarde soos duidelik blyk uit die feit dat dit min in die praktyk toegepas word.

Beskou nou weer die stelsel (2.32):

$$A \underline{\alpha}'(t) + B \underline{\alpha}(t) = \underline{b}$$

met  $\underline{\alpha}(0) = \underline{c}$

In plaas daarvan om die stelsel gewone differensiaalvergelykings analities op te los, mag ons dit numeries oplos deur 'n geskikte benaderingsmetode vir gewone differensiaalvergelykings toe te pas. Sodanige metodes diskretiseer die stelsel (2.32) met

betrekking tot tyd deur die afgeleides in tyd te benader deur eindige-verskille. Beskou weer die stelsel (2.32) in die volgende vorm:

$$\underline{\alpha}'(t) = -A^{-1} B \underline{\alpha}(t) + A^{-1} \underline{b} = \underline{f}$$

Hierdie stelsel is volgens Lambert [29] 'n stram stelsel. Die meeste klassieke metodes, soos die Adams- of Runga-Kutta-metodes, vereis vir stabiliteit dat

$$| -\Lambda \Delta t | < C, \quad 1 < C < 10$$

vir alle eiewaardes  $\Lambda$  van die matriks  $A^{-1} B$ . Daar word dus 'n streng beperking op die grootte van  $\Delta t$  geplaas. Omdat daar by elke tydstep 'n stelsel lineêre algebraïese vergelykings opgelos moet word, is dié metodes van geen praktiese waardes nie. Daar word dus na metodes gekyk wat nie die begrensdeheid van  $| -\Lambda \Delta t |$  vereis nie, dit wil sê metodes wat onvoorwaardelik stabiel of A-stabiel is.

Die "θ-metode" naamlik

$$\underline{\alpha}_{n+1} - \underline{\alpha}_n = \Delta t [(1-\theta)\underline{f}_{n+1} + \theta \underline{f}_n],$$

is seker een van die bekendste eerste orde enkelstepmetodes wat gebruik word vir die benaderde oplossing van 'n stelsel eerste orde gewone differensiaalvergelykings. Vir  $\theta \leq \frac{1}{2}$  is die metode A-stabiel [29].

Vir  $\theta = \frac{1}{2}$  word die trapesuimreël of die Crank-Nicolson-metode naamlik

$$\underline{\alpha}_{n+1} - \underline{\alpha}_n = \frac{\Delta t}{2} (\underline{f}_{n+1} + \underline{f}_n)$$

verkry.

Ons bespreek nou eers eindige-verskil- en dan eindige-element-  
metodes om die stelsel (2.32) numeries op te los.

### 2.5.3.1 Eindige-verskil-metodes in tyd

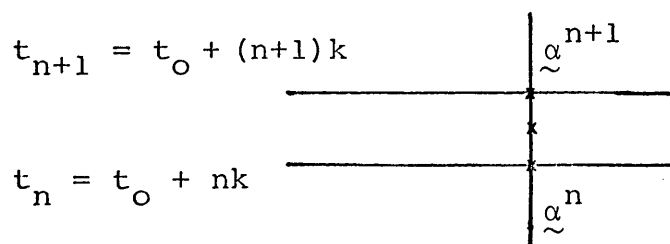
Die Galerkin-metode het die parsiële differensiaalvergelyking  
omgeskep in 'n stelsel gewone differensiaalvergelykings wat  
dus met eindige-verskil-metodes numeries opgelos kan word.  
Eindige-verskil-metodes vir gewone differensiaalvergelykings  
word breedvoerig in die literatuur behandel, byvoorbeeld in  
Gear [ 22 ] en Lambert [ 29 ].

Paraboliese parsiële differensiaalvergelykings met die gepaard-  
gaande eerste orde stelsel gewone differensiaalvergelykings  
(2.32) het geweldig baie aandag geniet.

Die mees populêre eindige-verskil-metode om die stelsel (2.32)  
op te los, is sekerlik die Crank-Nicolson-Galerkin-metode [ 34 ]  
wat die tyd sō diskretiseer:

Laat  $\tilde{\alpha}^n$  die benadering van  $\alpha(t_n)$  wees. Stel  $t_{n+1} - t_n = k$   
vir  $n = 0, 1, \dots, M = \frac{T}{k}$

$$\text{en} \quad t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{k}{2}.$$



Ons benader nou  $\alpha'(t)$  en  $\alpha(t)$  soos volg:

$$\tilde{\alpha}'(t) \approx \frac{\tilde{\alpha}^{n+1} - \tilde{\alpha}^n}{k}$$

$$\tilde{\alpha}(t) \approx \frac{\tilde{\alpha}^{n+1} + \tilde{\alpha}^n}{2}$$

Die stelsel

$$A \underline{\alpha}'(t) + B \underline{\alpha}(t) = \underline{b}$$

word dus nou

$$A \left\{ \frac{\underline{\alpha}^{n+1} - \underline{\alpha}^n}{k} \right\} + B \left\{ \frac{\underline{\alpha}^{n+1} + \underline{\alpha}^n}{2} \right\} = \underline{b}(t_{n+\frac{1}{2}}) \quad \dots (2.46)$$

$$(n = 0, 1, \dots, M)$$

Uit (2.46) volg dan dat

$$\left( \frac{A}{k} + \frac{B}{2} \right) \underline{\alpha}^{n+1} = \left( \frac{A}{k} - \frac{B}{2} \right) \underline{\alpha}^n + \underline{b}(t_{n+\frac{1}{2}}) \quad \dots (2.47)$$

$$(n = 0, 1, \dots, M)$$

Die stelsel (2.47) lewer nou 'n enkelstapmetode om  $\alpha^j$  te bereken by elke tydstap  $j$  waar  $j = 1, \dots, M$ . Dié enkelstap of voortsmaarsjeer-in-tydproses word aan die gang gesit deur dat  $\alpha^0$ , die beginvoorwaarde, bekend is.

Alhoewel die eindige-verskil-metode in tyd hier net vir die stelsel eerste orde gewone differensiaalvergelykings bespreek is, kan dié metode ook op tweede orde gewone differensiaalvergelykings, wat uit die hiperboliese vergelyking volg, toegepas word. Enkele voorbeelde uit die literatuur van die toepassings van die metode op paraboliese sowel as hiperboliese vergelykings word nou gegee:

1. Davies [12] beskou die hittevergelyking sowel as die golfvergelyking in voorbeelde wat opgelos word met behulp van die Crank-Nicolson-Galerkin-metode.
2. Douglas en Dupont [14] beskryf die vloeï van water en olie deur 'n poreuse medium in terme van 'n stelsel paraboliese



parsiële differensiaalvergelykings. Die ruimteveranderlike word gediskretiseer met behulp van kubiese latfunksies. Die stelsel gewone differensiaalvergelykings wat dan verkry word, word met die Crank-Nicolson-eindige-verskil-metode opgelos.

Ongelukkig is die eksakte oplossing van hierdie probleme nie bekend nie. Douglas en Dupont [14] vergelyk dus die verskillende benaderings wat verkry word deur die dimensie van die deelruimte te varieer. Hieruit maak hulle die volgende gevolgtrekkings:

- (i) Die Galerkin-metode lewer 'n goeie benadering vir die probleem.
- (ii) Die metode is prakties. Beter resultate word verkry as met eindige-verskil-metodes.
- (iii) Die metode kan uitgebrei word na hoër dimensies.
- (iv) Die keuse van kubiese latfunksies as basisfunksies is waarskynlik nie optimaal nie. Ander basisfunksies kan gevind word wat moontlik meer effektief kan wees.

3. Price, Cavendish en Varga [37] beskou die geleiding-diffusie-probleem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad (x, t) \in [0, l] \times (0, T]$$

met randvoorwaardes

$$u(0, t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$\text{en} \quad u(x, 0) = 0 \quad , \quad 0 < x \leq l.$$

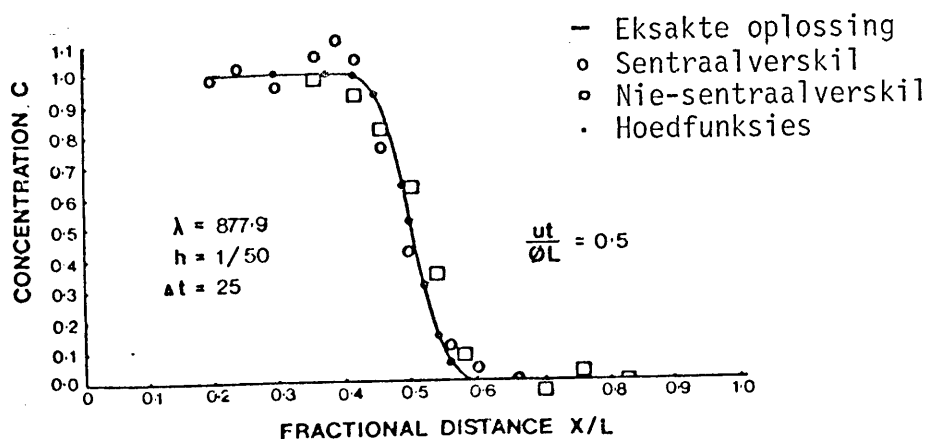
Hulle gebruik die volgende metodes om in ruimte te diskretiseer:

- (i) Sentraalverskilbenadering vir die ruimtelike afgeleides.
- (ii) Eindige-verskilbenadering wat nie 'n sentraalverskil is nie.
- (iii) Galerkin-benadering met behulp van lineêre hoedfunksies, kubiese en kwadratiese polinome as basisfunksies.
- (iv) Interpolasie van die veranderlikes.

In al bogenoemde metodes is die Crank-Nicolson-benadering vir die tydafgeleide gebruik. Dieselfde tydstap word ook gebruik by elke metode.

Die numeriese resultate vir  $\lambda = 877,9$  toon dat indien 'n fout van 0,02 aanvaarbaar is, is die Galerkin-Crank-Nicolson-metode met lineêre basisfunksies die beste keuse. Vir akkuraatheid groter as 0,005 moet die interpolasiemetode gebruik word.

Die volgende grafiek (figuur 2.2) illustreer hoe die verskillende metodes met mekaar vergelyk deur die oplossing vir elke metode na die verloop van 'n sekere vaste tydsinterval te gee. Die resultate verkry deur die hoedfunksies is baie akkurater as die resultate van enige van die ander metodes.



FIGUUR 2,2

4. Die volgende algemene diffusievergelyking word deur Zienkiewicz en Parekh [ 50 ] ondersoek:

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) + Q - C \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

met randvoorwaardes

$$\phi = \phi_B$$

$$\text{en } k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q + \alpha(\phi - \phi_C) = 0$$

Die oplossing  $\phi$  word benader deur

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i(t) N_i(x, y, z)$$

met  $N_i$  vormfunksies.

Die Galerkin-metode lewer nou 'n stelsel differensiaalvergelings van die vorm

$$H \{\phi\} + P \{\phi'\} + \{F\} = 0$$

met  $H$ ,  $P$  matrikse en  $F$  'n vektor.

Hierdie vergelyking word nou benader deur

$$H \{\phi\}_{t + \frac{\Delta t}{2}} + P \left[ \{\phi\}_{t + \Delta t} - \{\phi\}_t \right] / \Delta t + \{F\} = 0$$

Waar  $H$ ,  $P$  en  $F$  se waardes by die middelpunt van die intervalle bereken word. Twee- en drie-dimensionale isoparametriese basisfunksies word gebruik in die voorbeelde wat hulle bespreek.

5. Griffiths [ 24 ] beskou ook die geleiding-diffusie-probleem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial u}{\partial x}$$

met periodiese, Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes deur van die Crank-Nicolson-Galerkin-metode gebruik te maak. Hierdie numeriese resultate sal in hoofstuk 4 met betrekking tot die huidige studie bespreek word.

6. Zlámal [51] beskou hittegeleiding-probleme wat dan met behulp van die Galerkin-metode reduceer na die stelsel

$$C \underline{\tilde{a}}' + K \underline{\tilde{a}} = \underline{\tilde{f}}(t) \quad \dots (2.48)$$

$$\text{met} \quad \underline{\tilde{a}}(0) = \underline{\tilde{a}}^{(0)}$$

Die stelsel (2.48) word geskryf as

$$\underline{\tilde{a}}' = -C^{-1}K\underline{\tilde{a}} + C^{-1}\underline{\tilde{f}}(t)$$

wat in die algemeen beskou kan word as 'n stelsel

$$\underline{\tilde{a}}' = \underline{g}(\underline{\tilde{a}}, t) \quad \dots (2.49)$$

$$\underline{\tilde{a}}(0) = \underline{\tilde{a}}^{(0)}$$

Om hierdie stelsel op te los kies Zlámal lineêre veelstap-metodes. Die algemene vorm van die k-de lineêre veelstap-metode vir die oplossing van (2.49) word gegee deur:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{\tilde{a}}^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{\tilde{g}}^{n+j}, \quad n = 0, 1, \dots (2.50)$$

waar  $\underline{\tilde{a}}^n$  die benaderde waarde van  $\underline{\tilde{a}}(n \Delta t)$  is. Deur (2.50) nou op (2.48) toe te pas word die volgende stelsel verkry:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j C + \beta_j \Delta t K) \underline{\tilde{a}}^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{\tilde{f}}^{n+j} \quad \dots (2.51)$$

Indien  $\underline{\tilde{a}}^0, \underline{\tilde{a}}^1, \dots, \underline{\tilde{a}}^{k-1}$ , nou bekend is, word  $\underline{\tilde{a}}^k, \underline{\tilde{a}}^{k+1}, \dots$  bereken uit (2.51). Op elke tydstip word 'n lineêre algebraïese vergelyking, met dieselfde matriks,  $B = \alpha_k C + \beta_k \Delta t K$ , opgelos.

As toepassing van die metode beskou Zlámal

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$T(0, t) = T(1, t) = 0, \quad t > 0$$

Vir  $k = 1$  en  $\sum_{j=0}^k \beta_j = 1$  word die oplossing van (2.49) gegee deur

$$\tilde{a}^{n+1} - \tilde{a}^n = \Delta t [(1 - \theta)g^{n+1} + \theta g^n]$$

Vir  $\theta = \frac{1}{2}$  word (2.51) die Crank-Nicolson-Galerkin-skema naamlik

$$(C + \frac{1}{2} \Delta t K) \tilde{a}^{n+1} = -(C - \frac{1}{2} \Delta t K) \tilde{a}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\tilde{f}^{n+1} + \tilde{f}^n) \quad \dots (2.52)$$

In tabel 2.1 word die numeriese resultate vir hierdie probleem gegee [51] :

t	x=0.1		x=0.2		x=0.3		x=0.4		x=0.5	
	$\theta = \frac{1}{3}$	$\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{1}{3}$	$\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{1}{3}$	$\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{1}{3}$	$\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{1}{3}$	$\theta = \frac{1}{2}$
0.01	10.8	28.2	1.6	3.2	0.6	0.7	0.6	0.1	0.5	0.2
0.02	0.5	3.5	2.1	9.5	0.1	0.0	0.5	0.7	0.7	0.4
0.03	1.3	9.9	0.5	0.7	0.8	3.1	0.5	0.2	0.5	0.6
0.05	0.5	4.5	0.4	0.2	0.5	2.3	0.4	0.8	0.5	1.0
0.10	0.1	1.4	0.1	2.0	0.1	1.5	0.1	1.9	0.1	1.6
0.15	0.3	2.2	0.3	2.1	0.3	2.2	0.3	2.1	0.3	2.2
0.20	0.6	2.6	0.6	2.6	2.6	2.6	0.6	2.6	0.6	2.6
0.30	1.4	3.5	1.4	3.5	1.4	3.5	1.4	3.5	1.4	3.5

TABEL 2.1: Persentasie foute vir  $\theta = \frac{1}{3}$  en  $\theta = \frac{1}{2}$  met  $\Delta t = 0,01$ .

Die akkuraatste resultate word verkry vir  $\theta = \frac{1}{3}$ . Die groot persentasiefout by  $t = 0,01$  en  $x = 0,1$  kan sekerlik aan die

diskontinuuïteit van die oplossing by  $x=0$  en  $t=0$  toegeskryf word.

7. Wheeler [48] lei  $L_\infty$ -norm foutafskattings af vir die Crank-Nicolson-Galerkin-metode toegepas op paraboliese en hiperboliese vergelykings. Dupont [16] en Baker [3] lei  $L_2$ -norm foutafskattings af vir hierdie metode toegepas op hiperboliese vergelykings.

8. Douglas en Dupont [13] beskou ook nie-lineêre paraboliese vergelykings. Die stelsel (2.32) is dus 'n stelsel nie-lineêre gewone differensiaalvergelykings. Die oplossing van (2.46) behels dus die oplossing van 'n stelsel nie-lineêre algebraïese vergelykings. Om hierdie probleem te voorkom, gebruik Douglas en Dupont voorspeller-hersteller-metodes. Die stelsel (2.46) word dan vervang met die voorspeller

$$\begin{aligned}
 A \left\{ \frac{\beta^{n+1} - \alpha^n}{k} \right\} + B(\alpha^n) \left\{ \frac{\beta^{n+1} + \alpha^n}{2} \right\} \\
 = \tilde{b}(t_{n+\frac{1}{2}}) \quad \dots (2.53)
 \end{aligned}$$

en hersteller

$$\begin{aligned}
 A \left\{ \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{k} \right\} + B \left( \frac{\beta^{n+1} + \alpha^n}{2} \right) \\
 = b(t_{n+\frac{1}{2}}) \quad \dots (2.54)
 \end{aligned}$$

Die voorspeller (2.53) gee 'n eerste benadering  $\tilde{\beta}^{n+1}$  terwyl die hersteller (2.54) iteratief gebruik word om dié benadering te verbeter.

Die literatuur bevat talle verdere voorbeelde van die toepassing van dié metode. Ons volstaan egter met 'n laaste ver-

wysing na die onlangse oorsigpublikasie van Gladwell en Wait [ 23 ] waar onder andere die Crank-Nicolson-Galerkin-metode breedvoerig behandel word.

### 2.5.3.2 Eindige-elemente in tyd

In § 2.5.2 het ons gesien dat deur toepassing van die Galerkin-metode kan paraboliese en hiperboliese vergelykings verwerk word na stelsels gewone differensiaalvergelykings. So byvoorbeeld lei 'n paraboliese probleem na die oplossing van die volgende stelsel gewone differensiaalvergelykings in tyd:

$$\begin{aligned} A \tilde{\alpha}'(t) + B \tilde{\alpha}(t) &= \tilde{b} \\ \tilde{\alpha}(0) &= \tilde{c} \end{aligned} \quad \dots (2.55)$$

Die vraag ontstaan nou of die stelsel (2.55) nie opgelos kan word deur eindige-elemente in tyd te gebruik nie?

Hierdie vraag word positief deur Hulme ([ 25 ], [ 26 ]) beantwoord deur 'n nuwe metode voor te stel vir die numeriese oplossing van stelsels eerste orde gewone differensiaalvergelykings waarin gebruik gemaak word van Galerkin-metodes. Die metode van Hulme maak dit nou moontlik om *eers* die ruimteveranderlike te diskretiseer met behulp van basisfunksies, en *dan* die tyd te diskretiseer met basisfunksies in tyd. Eindige-elemente word dus *afsonderlik* en *agtereenvolgend* op die probleem toegepas.

Die eindige-element-metode in tyd word deur Mitchell en Wait [ 34 ] toegepas op die stelsel (2.55). Die eksakte oplossing  $\tilde{\alpha}(t)$  word op elke deelinterval  $(t_n, t_n + \Delta t)$  benader deur

$$\tilde{\alpha}^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^S \tilde{\alpha}_j^{(n)} \phi_j^n(t), \quad n = 0, 1, \dots, \dots (2.56)$$

met  $\phi_j^{(n)}$  geskikte vormfunksies.

Die koëffisiënte  $\alpha_j^{(n)}$  ( $j = 1, \dots, S$ ) word dan bepaal deur

$$(A \dot{\alpha}^{(n)} + B \alpha^{(n)}, \phi_j^{(n)})_n = (b, \phi_j^{(n)})_n \dots (2.57)$$

met  $j = 1, 2, \dots, S$ ;  $n = 0, 1, \dots$

tesame met 'n kontinuïteitsvoorwaarde

$$\alpha^{(n)}(t_n^+) = \alpha^{(n-1)}(t_n^-), \quad n = 1, 2, \dots, \dots (2.58)$$

Die  $i$ -de komponent van die vektor  $(\underline{u}, \underline{v})_n$  word gegee deur

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} u_i(t) v(t) dt$$

met  $\underline{u} = (u_1, \dots, u_N(t))^t$

In (2.56) is daar  $(S+1)$  basisfunksies terwyl die stelsel (2.57) slegs  $S$  vergelykings bevat en die vorm van die benadering word dus deur die ordening van die basisfunksies bepaal.

Die deelinterval  $(t_n, t_n + \Delta t)$  word s6 verdeel:

$$t_n = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_S^{(n)} = t_n + \Delta t$$

met  $t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)} = \frac{\Delta t}{S}, \quad j = 1, \dots, S.$

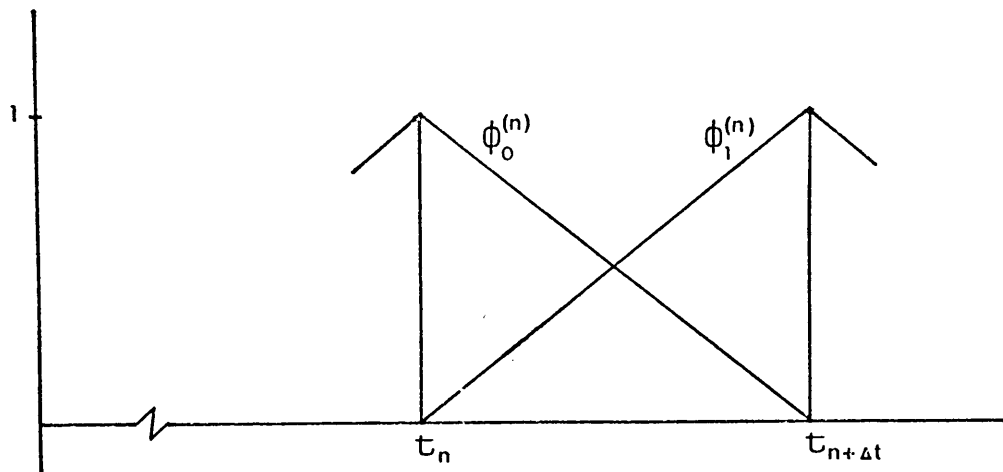
Veronderstel dat die funksies  $\phi_j^{(n)}, j = 0, \dots, S$ , 'n basis vir Lagrange-interpolasie op elke interval  $(t_n, t_n + \Delta t)$  vorm dit wil sê

$$\phi_j^{(n)}(t_k^{(n)}) = \begin{cases} 1 & , \quad j = k \\ 0 & , \quad j \neq k \end{cases}$$

en  $\phi_j^{(n)}(t)$  is polinome van graad  $S$  op  $[t_n, t_n + \Delta t]$ .



Vir  $S = 1$  kan ons die diskretisering skematies s6 voorstel:



Uit (2.56) volg dat

$$\alpha_{\sim 0}^{(n)} = \alpha_{\sim S}^{(n-1)} = \alpha_{\sim n} \approx \alpha(t_n).$$

Vir  $S \geq 2$  kan  $\alpha_j^{(n)}$ ,  $j = 1, \dots, S - 1$ , uit (2.57) geelimineer word om 'n enkele vergelyking vir  $\alpha_{(n+1)}$  in terme van  $\alpha_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , te vind.

Indien  $b_{\sim} = 0$  en  $S = 1$  dan volg dat [11]

$$\left(A + \frac{2}{3} \Delta t B\right) \alpha_{\sim n+1} = \left(A - \frac{\Delta t}{3} B\right) \alpha_{\sim n}$$

Hulme ([25], [26]) toon ook aan dat verskeie eindige-verskilmetodes geformuleer kan word as enkelstap Galerkin-metodes. Indien in (2.56) die basisfunksies  $\phi_j^{(n)}$  behou word maar in (2.57) met  $t^{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, S$ , vervang word, dan volg vir  $S = 1$  dat

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2} B\right) \alpha_{\sim n+1} = \left(A - \frac{\Delta t}{2} B\right) \alpha_{\sim n}$$

die Crank-Nicolson-Galerkin-metode (2.47) lewer.

Cella [8] beskou paraboliese en hiperboliese operatore waarvan die swak oplossings soos volg geformuleer word:

Vind 'n funksie  $u(x, t)$  wat 'n element van die deelruimte  $U$  van die Hilbert-ruimte  $V$  is sō dat

(i) *parabolies*

$$\begin{aligned} a(u, v) + (u_t, v) &= (f, v) \quad , \quad t > 0, v \in V \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad , \quad t = 0 \quad \dots (2.59) \end{aligned}$$

(ii) *hiperbolies*

$$\begin{aligned} a(u, v) + (u_{tt}, v) &= (f, v) \quad , \quad t > 0, v \in V \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) \quad \dots (2.60) \end{aligned}$$

Uit die Galerkin-benadering met

$$\begin{aligned} u &\approx \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) e_j(x) = \tilde{u} e \\ v &\approx \sum_{j=1}^N \beta_j(t) e_j(x) = \tilde{v} e \end{aligned}$$

lewer (2.59) en (2.60) die volgende stelsels vir die paraboliese en hiperboliese vergelykings respektiewelik:

$$K \tilde{u} + M \tilde{u}_t = \tilde{f} \quad \dots (2.61)$$

$$\text{en} \quad K \tilde{u} + M \tilde{u}_{tt} = \tilde{f} \quad \dots (2.62)$$

$$\text{met} \quad (K)_{i,j} = a(e_i, e_j)$$

$$(M)_{i,j} = (e_i, e_j)$$

$$\text{en} \quad \{f\}_i = (f, e_i)$$

Die stelsel (2.61) word in tyd gediskretiseer deur sentraal-verskil, terugwaartse-verskil en eindige-element-metodes. Al drie metodes lewer volgens Cella [8] betroubare resultate on-

geag van die orde van polinome wat in die benadering gebruik word.

Vir die stelsel (2.62) word sentraal-verskil-metodes en Newmark-metodes gebruik vir die numeriese oplossing van dié stelsel gewone differensiaalvergelykings. Sonder om die numeriese resultate aan te gee maak Cella die gevolgtrekking dat die sentraal-verskil-metode goeie benaderings lewer.

Parsiële differensiaalvergelykings word dus deur Galerkin-metodes met eindige-elemente in die ruimte getransformeer na 'n stelsel gewone differensiaalvergelykings. Dié stelsel kan dan óf met eindige-verskil-metodes óf met behulp van eindige-elemente in tyd numeries opgelos word. In laasgenoemde geval is dit belangrik om daarop te let dat die ruimteveranderlike eers met behulp van eindige-elemente gediskretiseer word en *dan* word die tydsveranderlike gediskretiseer met eindige-elemente.

## 2.6 KOLLOKASIE-METODE

Laastens, vir volledigheid, bespreek ons net kortliks die kollokasie-metode. Gestel  $X$  is 'n lineêre deelruimte van  $L_2(\Omega)$  met  $\Omega$  'n deelversameling van  $\mathbb{R}$  of  $\mathbb{R}^2$ . Laat  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  'n lineêr onafhanklike deelversameling van  $X$  wees met

$$X_N = \text{span} \{ \phi_1, \dots, \phi_N \}.$$

Beskou nou die operatorvergelyking

$$A x = y \quad \dots \quad (2.63)$$

met  $A: X \rightarrow X$ ,  $y \in X$ .

Die benaderde oplossing van (2.63) met die kollokasie-metode behels die bepaling van 'n funksie

$$x_N(t) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(t)$$

só dat die  $N \times N$  lineêre stelsel

$$\begin{aligned} A x_N(t_i) &= \sum_{i=1}^N a_i A \phi_i(t_i) \\ &= y(t_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

bevredig word met  $t_1, \dots, t_N$   $N$  verskillende punte van  $\Omega$ .

Ons sê die funksies  $x_N$  kollokeer  $y$  by die punte  $t_1, \dots, t_N$ .

Prenter [36] pas die kollokasie-metode toe op 'n klas gewone differensiaalvergelykings en ook op elliptiese vergelykings.

Douglas en Dupont [15] gee 'n breedvoerige beskrywing van die kollokasie-metode vir die paraboliese vergelyking

$$c(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T$$

met

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u(0, t) &= g_0(t) \quad , \quad 0 < t \leq T \\ u(1, t) &= g_1(t) \quad , \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Hulle bewys ook dat die diskrete-Galerkin-metode en die kollokasie-metode ekwivalent is, dit wil sê die metodes lewer dieselfde numeriese resultate. Die kollokasie-metode gaan nie verder in hierdie studie gebruik word nie en ons volstaan dus met hierdie kort beskrywing.

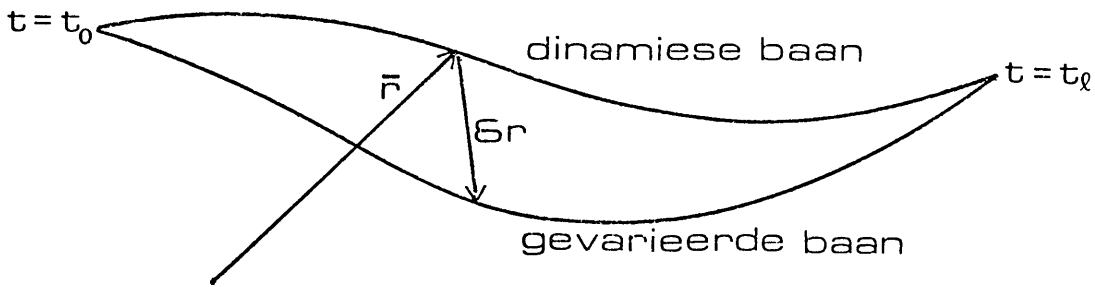
HOOFSTUK 3EINDIGE-ELEMENTE IN TYD: TOEPASSING OP EENDIMENSIONALE  
PROBLEME3.1 INLEIDING

Ons het reeds in die vorige hoofstuk, paragraaf 2.5.2, gesien dat die Rayleigh-Ritz-metode 'n minimeringsproses is. Die Rayleigh-Ritz-metode kan dan ook so geformuleer word dat 'n sekere funksionaal oor 'n geskikte ruimte van toelaatbare funksies 'n minimum gemaak moet word. Hamilton se beginsel vir die beweging van 'n partikel is 'n treffende voorbeeld waar so 'n funksionaal 'n stasionêre waarde aanneem. Die heel eerste pogings om eindige-elemente in tyd te gebruik vir die diskretisering van tydafhanklike probleme word deur Argyris en Scharpf [2] juis op die Hamilton-beginsel toegepas. Ons beskou nou in detail die toepassing van eindige-element-metodes op hierdie probleme met die doel om 'n beter praktiese insig te kry vir die gedrag van dié metode en met die hoop dat dit mag lei tot nuwe idees wat ook op meer-dimensionale probleme toegepas kan word.

3.2 HAMILTON SE BEGINSEL

Ons gee eers die algemene vorm van Hamilton se beginsel vir 'n enkele partikel [41]. Beskou die beweging van 'n partikel met massa  $m$  onder die invloed van 'n krag  $\vec{F}$ . Volgens Newton word die bewegingsvergelyking gegee deur

$$\frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\vec{r}}{dt} \right] - \vec{F} = \vec{0} \quad \dots (3.1)$$



FIGUUR 3.1

Gestel  $\delta \bar{r}$  is 'n arbitrêre klein verplasing wat die partikel neem vanaf 'n punt  $\bar{r}$  op die oorspronklike dinamiese baan na 'n "ooreenkomstige" punt op die gevarieerde baan (kyk figuur 3.1). Met "ooreenkomstige" punt verstaan ons die punt wat op dieselfde tydstep bereik word, met ander woorde,  $\delta t=0$ . Bereken nou die skalaarproduk van (3.1) met  $\delta \bar{r}$ , dan is

$$\frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\bar{r}}{dt} \right] \cdot \delta \bar{r} - \bar{F} \cdot \delta \bar{r} = 0 \quad \dots (3.2)$$

Maar

$$\frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \delta \bar{r} \right] = \frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\bar{r}}{dt} \right] \cdot \delta \bar{r} + m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} (\delta \bar{r})$$

dus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\bar{r}}{dt} \right] \cdot \delta \bar{r} &= \frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \delta \bar{r} \right] - m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} (\delta \bar{r}) \\ &= \frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \delta \bar{r} \right] - m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \delta \left( \frac{d}{dt} \bar{r} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \delta \bar{r} \right] - \frac{m}{2} \delta \left[ \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2 \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \delta \bar{r} \right] - \delta \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) \end{aligned}$$

Uit (3.2) volg dan dat

$$\frac{d}{dt} \left[ m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \delta \bar{r} \right] = \delta \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) + \bar{F} \cdot \delta \bar{r} \quad \dots (3.3)$$

Integreer nou (3.3) met betrekking tot die tyd vanaf  $t = t_0$  na

$t = t_\ell$ , dan is

$$m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \delta \bar{r} \Big|_{t_0}^{t_\ell} = \delta \int_{t_0}^{t_\ell} \frac{1}{2} m V^2 dt + \int_{t_0}^{t_\ell} (\bar{F} \cdot \delta \bar{r}) dt \dots (3.4)$$

Maar die eindpunte van die dinamiese en gevarieerde baan is dieselfde, dus

$$m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \delta \bar{r} \Big|_{t_0}^{t_\ell} = 0.$$

Indien voorgeskryf word dat  $\bar{F}$  nie gevarieer word nie, dan volg uit (3.4) dat

$$\delta \int_{t_0}^{t_\ell} (\frac{1}{2} m V^2 + \bar{F} \cdot \bar{r}) dt = 0 \dots (3.5)$$

Vergelyking (3.5) is die algemene Hamilton-beginsel naamlik:

Die beweging van 'n stelsel vanaf tydstep  $t = t_0$  tot by  $t = t_\ell$  is sō dat

$$\int_{t_0}^{t_\ell} (\frac{1}{2} m V^2 + \bar{F} \cdot \bar{r}) dt$$

stasionêr is.

Vir die eendimensionale geval, dit wil sê vir die beweging van die partikel langs die  $x$  - as, kan ons (3.5) skryf as:

$$\delta \int_{t_0}^{t_\ell} (\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + f x) dt = 0 \dots (3.6)$$

Argyris en Scharpf [2.] beskou nou die volgende variasieprobleem:

Bereken 'n stasionêre waarde vir die funksionaal

$$A = \int_{t_0}^{t_\ell} (\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + f x) dt \dots (3.7)$$

onderhewig daaraan dat die eindpunte  $x(t_0)$  en  $x(t_\ell)$  van die dinamiese en gevarieerde baan dieselfde bly. Vergelyking (3.6) moet dus numeries opgelos word vir  $x$  en  $\dot{x}$ . Op hierdie stadium merk ons op dat die geassosieerde Euler-Lagrange-vergelyking van (3.7) die bekende Newton-vergelyking naamlik

$$m \ddot{x} - f = 0$$

lewer.

Argyris en Scharpf diskretiseer vergelyking (3.7) in tyd deur die interval  $[t_0, t_\ell]$  in deelintervalle  $[t_{j-1}, t_j]$ ,  $j=1, \dots, \ell$  te verdeel. Die waardes van  $x$  en  $\dot{x}$  op enige tydstip  $t$ ,  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ , kan nou benader word deur geskikte keuses van die basisfunksies wat afhanklik van tyd is.

### 3.3 FORMULERING VAN DIE METODE VAN ARGYRIS EN SCHARPF

Argyris en Scharpf [2] beperk hulle tot die gebruik van kubiese Hermiet-polinome as basisfunksies. Dié kubiese polinome oor die interval  $[t_{j-1}, t_j]$  word gegee deur:

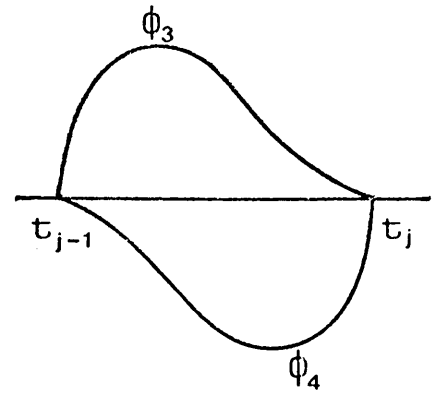
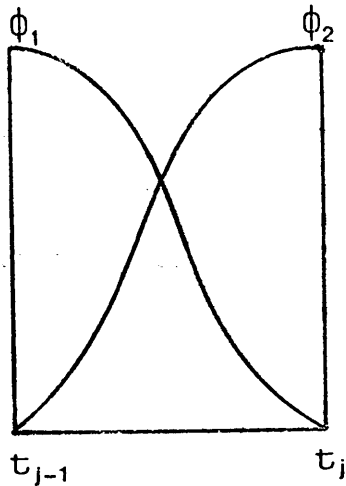
$$\phi_1(t) = \frac{(t_j - t)^2}{(t_j - t_{j-1})^3} [(t_j - t_{j-1}) + 2(t - t_{j-1})]$$

$$\phi_2(t) = \frac{(t - t_{j-1})^2}{(t_j - t_{j-1})^3} [t_j - t_{j-1} + 2(t_j - t)]$$

$$\phi_3(t) = \frac{(t - t_{j-1})(t_j - t)^2}{(t_j - t_{j-1})^2}$$

$$\phi_4(t) = \frac{(t - t_{j-1})^2(t - t_j)}{(t_j - t_{j-1})^2}$$





Laat  $\tau = \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}$  'n tydparameter voorstel met  $\tau \in [0,1]$ . Die Hermiet-interpolasie-polinoom in tyd word dan gegee deur  $w(\tau)$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - 3\tau^2 + 2\tau^3)x(0) + (\tau - 2\tau^2 + \tau^3)x'(0) \\
 &\quad + (3\tau^2 - 2\tau^3)x(1) + (-\tau^2 + \tau^3)x'(1) \\
 &= \tilde{w}(\tau) \tilde{x}
 \end{aligned}$$

waar

$$\tilde{w}(\tau) = [1 - 3\tau^2 + 2\tau^3, \tau - 2\tau^2 + \tau^3, 3\tau^2 - 2\tau^3, -\tau^2 + \tau^3] \dots \quad (3.8)$$

en  $\tilde{x} = [x(0), x'(0), x(1), x'(1)]^T$

Laat u die benaderde oplossing van x in vergelyking (3.7) voorstel en  $u_j = u(t_j)$ . Op die tydstippe  $t_{j-1}$  en  $t_j$  word die ruimte-tyd-vektor

$$\hat{u}_j = \begin{bmatrix} u_{j-1} \\ \dot{u}_{j-1} \\ u_j \\ \dot{u}_j \end{bmatrix}$$

gevorm wat met (3.8) korrespondeer. Kies nou die tydintervalle gelyk, dit wil sê,

$$t_j - t_{j-1} = h, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Die Hermiet-polinoom kan dus geskryf word as:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= (1 - 3\tau^2 + 2\tau^3)u_{j-1} + h(\tau - 2\tau^2 + \tau^3)\dot{u}_{j-1} \\
 &\quad + (3\tau^2 - 2\tau^3)u_j + h(-\tau^2 + \tau^3)\dot{u}_j \\
 &= W_j(t)\hat{u}_j
 \end{aligned}$$

met  $W_j(t) = \tilde{w}(\tau)d_j$  waar  $d_j$  die diagonaalvektor  $(1 \ h \ 1 \ h)$  is.

Netso is

$$\dot{u}(t) = \dot{W}_j(t)\hat{u}_j$$

$$\begin{aligned}
 \text{met } \dot{W}_j(t) &= \frac{d}{dt} W_j = \left(\frac{d}{d\tau} \tilde{w}(\tau)d_j\right) \cdot \frac{d\tau}{dt} \\
 &= \frac{1}{h} \tilde{w}' d_j
 \end{aligned}$$

$$\text{en } \tilde{w}' = [-6\tau + 6\tau^2 \quad 1 - 4\tau + 3\tau^2 \quad -6\tau - 6\tau^2 \quad -2\tau + 3\tau^2].$$

Nou kan die integraal A van vergelyking (3.7) benader word oor die  $j$ -de tydinterval. Die funksie  $f$  word terselftertyd veralgemeen na  $f - c\dot{u} - ku$  met  $c$  en  $k$  die dempings- en veer- konstantes respektiewelik.

Nou is

$$\begin{aligned}
 A_j &\approx \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{u})^2 + u(f - c\dot{u} - ku) \right] dt \\
 &= \frac{1}{2} m \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\dot{W}_j(t)\hat{u}_j)^2 dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} W_j(t)\hat{u}_j f dt \\
 &\quad - c \int_{t_{j-1}}^{t_j} (W_j(t)\hat{u}_j)(\dot{W}_j(t)\hat{u}_j) dt - k \int_{t_{j-1}}^{t_j} (W_j(t)\hat{u}_j)^2 dt \\
 &= \hat{u}_j^T \left[ \frac{1}{2} m h_j^{11} - c h_j^{01} - k h_j^{00} \right] + \hat{u}_j^T h_j^{00} \hat{f}_j \quad \dots (3.9)
 \end{aligned}$$

$$\text{met } h_j^{11} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{W}_j^T \dot{W}_j dt$$

$$h_j^{01} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} W_j^T \dot{W}_j dt$$

$$\text{en } h_j^{00} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} W_j^T W_j dt$$

Die funksie  $f$  word ook geïnterpoleer deur

$$f(t) \approx W_j(t) \hat{f}_j \quad \text{waar}$$

$$\hat{f}_j = (f_{j-1} \quad \dot{f}_{j-1} \quad f_j \quad \dot{f}_j)$$

Vervolgens word die integrale  $h_j^{00}$ ,  $h_j^{01}$  en  $h_j^{11}$  bereken.

$$h_j^{00} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} W_j^T W_j dt$$

$$= h d_j \left[ \int_0^1 \tilde{w}^T \tilde{w} d\tau \right] d_j$$

$$= h d_j h^{00} d_j$$

met

$$h^{00} = \int_0^1 \tilde{w}^T \tilde{w} d\tau$$

$$= \int_0^1 (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4)^T \cdot (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4) d\tau$$

$$= \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ & 4 & 13 & -3 \\ & & 156 & -22 \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

simmetries.

Deur substitusie kry ons dus

$$h_j^{00} = \frac{h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix}$$

Netso is

$$h_j^{01} = d_j h^{01} d_j$$

en  $h_j^{11} = \frac{1}{h} d_j h^{11} d_j$

waar

$$h^{01} = \begin{bmatrix} -30 & 6 & 30 & -6 \\ -6 & 0 & 6 & -1 \\ -30 & -6 & 30 & 6 \\ 6 & 1 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

en  $\frac{1}{60}$

$$\text{en } h^{11} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ & 4 & -3 & -1 \\ & & 36 & -3 \\ \text{simmetries.} & & & 4 \end{bmatrix}$$

Indien daar  $\ell$  tydintervalle is, word die  $(2\ell + 2)$ -dimensionale oplossingsvektor

$$\hat{u} = (u_0, \dot{u}_0, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_\ell, \dot{u}_\ell)$$

gevorm.

Die Boolse-transformasie

$$\hat{u}_j = \tilde{a}_{Tj} \hat{u}$$

gee die algemene deelvektor waar

$$\tilde{a}_{Tj} = \begin{matrix} O_{4, j-2} & I_4 & O_{4, 2\ell-2j} \end{matrix}$$

'n  $4 \times (2\ell + 2)$  matriks is met  $O$  en  $I$  die nul- en eenheidsmatrikse respektiewelik.

Die volledige  $4\ell \times (2\ell + 2)$  matriks  $\tilde{a}_T$  word dan gegee deur

$$\tilde{a}_T = \{\tilde{a}_{T1} \quad \tilde{a}_{T2} \quad \dots \quad \tilde{a}_{T\ell}\}.$$

Die sommasie van die  $A_j$  oor die  $\ell$  intervalle lewer dan die volgende uitdrukking:

$$A \approx \frac{1}{2} m \hat{u}^T H^{11} \hat{u} - c \hat{u}^T H^{01} \underline{\hat{u}} - k \hat{u}^T H^{00} \underline{\hat{u}} + \hat{u}^T H^{00} \hat{f} \quad \dots (3.10)$$

$$\text{met } \underline{H}^{nm} = (\tilde{a}_T)^T h^{nm} \underline{\tilde{a}_T} \quad \dots (3.11)$$

$$\text{en } h^{nm} = \{h_1^{nm} \quad h_2^{nm} \quad \dots \quad h_\ell^{nm}\}, n=0,1; m=0,1$$

Vir  $A$  om stasionêr te wees moet dan geld dat

$$\frac{\partial A}{\partial \hat{u}^T} = 0.$$

Die twee vektore wat in vergelyking (3.10) onderstreep is, moet ons as konstant beskou want hulle verteenwoordig 'n deel van die kragfunksie wat volgens aanname nie varieer nie. Dit wil sê vir 'n minimum moet

$$[m H^{11} - c H^{01} - k H^{00}] \hat{u} + H^{00} \underline{\hat{f}} = 0 \quad \dots (3.12)$$

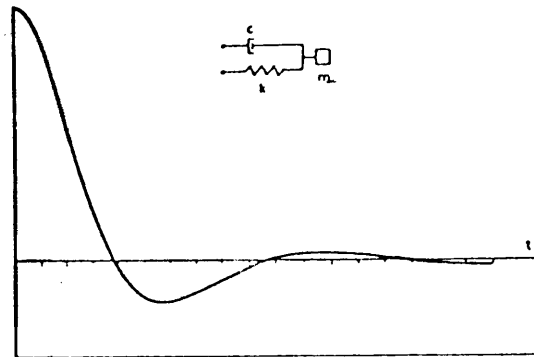
Uit hierdie stelsel word dan opgelos vir die  $2\ell$  onbekendes nl.

$$u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2, \dots, u_\ell, \dot{u}_\ell$$

In plaas daarvan om hierdie stelsel globaal op te los, d.i. gelyktydig oor die hele interval  $[t_0, t_\ell]$ , kan die bewerking

verdeel word in 'n ry intervalle  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t$  wat dan agter-eenvolgens opgelos word. Die eindwaardes van 'n interval tree telkens op as die beginwaardes vir die daaropvolgende interval. *Argyris en Scharpf gee geen voorbeelde van die toepassing van hul metode nie.*

Fried [21] pas *dieselfde metode* as Argyris en Scharpf op 'n dinamiese en hittegeleiding-probleem toe. Eerstens beskou Fried die vibrasie van 'n veer in 'n gedempte stelsel. In figuur 3.2 word die amplitude teenoor die tyd voorgestel. Die numeriese resultate is volgens Fried korrek tot vier desimale syfers.



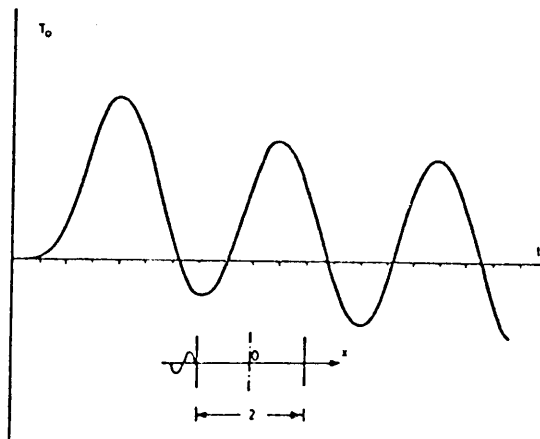
FIGUUR 3.2: Amplitude teenoor tyd vir gedempte stelsel.

Tweedens beskou Fried die hittegeleiding in 'n staaf wat deur die vergelyking

$$k \tau + c \dot{\tau} - h q = 0$$

gegees word. Die vektore  $\tau$ ,  $\dot{\tau}$  en  $q$  stel respektiewelik die temperatuur, die tempo van verandering van die temperatuur en 'n hittebron voor. Die matrikse  $k$ ,  $c$  en  $h$  stel respektiewelik die geleiding, hittekapasiteit en die hitteontwikkeling voor. Hierdie probleem word numeries opgelos deur van die Hamilton-beginsel gebruik te maak. In figuur 3.3 verskyn die numeriese resultate van Fried. Die ruimteinterval is in 10 elemente

verdeel terwyl die diskretisering in tyd verkry word deur 40 tydintervalle in 2 stappe te neem.



FIGUUR 3.3: Temperatuur variasie  $T_0$  by  $x = 0$  teenoor tyd.

Soos reeds gemeld, is die praktiese implimentering van die metode van Argyris en Scharpf van groot belang met die oog op 'n veralgemening na meerdimensionale-probleme. Ons gaan dus hül metode toepas op 'n dinamiese probleem sonder demping. Dié besondere probleem word gekies omdat die oplossing ossileer en dus 'n meer sensitiewe vergelyking met die eksakte oplossing sal lewer.

### 3.4 TOEPASSING

Beskou die volgende funksionaal:

$$A = \int_0^{t_2} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 + k x^2 \right] dt \quad \dots (3.13)$$

met  $m = 3/8$  en  $k = -12$ .

Die geassosieerde Euler-Lagrange vergelyking word gegee deur

$$\frac{3}{8} \ddot{x} + 24 x = 0.$$

As beginvoorwaardes kies ons

$$x(0) = 1/3, \quad \dot{x}(0) = -2.$$

Die eksakte oplossing van hierdie beginvoorwaarde-probleem word gegee deur

$$x(t) = \frac{1}{3} \cos 8t - \frac{1}{4} \sin 8t.$$

### 3.4.1 Enkelstapoplossing

Ons bereken eerstens die benaderde oplossing van die funksionaal in (3.13) deur net een tydstap  $h$  te neem.

Dus

$$A \approx A_1 = \int_0^h [\frac{1}{2} m (\dot{u})^2 - 12 u^2] dt$$

Uit vergelyking (3.10) met die nodige substitusies, vind ons

$$A_1 = \hat{u}_1^T (\frac{1}{2} m h_1^{11} - k h_1^{00}) \hat{u}_1$$

waar  $m = 3/8$  en  $k = 12$ .

Verder is

$$h_1^{00} = \frac{h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ & & 156 & -22h \\ \text{simmetries} & & & 4h^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{en } h_1^{11} = \frac{1}{30h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & -36 & 3h \\ & 4h^2 & -3h & -h^2 \\ & & 36 & -3h \\ \text{simmetries} & & & 4h^2 \end{bmatrix}$$

Ons kan  $A_1$  dan só skryf:

$$A_1 = \frac{m}{60h} (u_0, \dot{u}_0, u_1, \dot{u}_1) \begin{bmatrix} 36u_0 + 3h\dot{u}_0 - 36u_1 + 3h\dot{u}_1 \\ 3hu_0 + 4h^2\dot{u}_0 - 3hu_1 - h^2\dot{u}_1 \\ -36u_0 - 3h\dot{u}_0 + 36u_1 - 3h\dot{u}_1 \\ 3hu_0 - h^2\dot{u}_0 - 3hu_1 + 4h^2\dot{u}_1 \end{bmatrix}$$



$$- \frac{kh}{420} (u_0, \dot{u}_0, u_1, \dot{u}_1) \begin{bmatrix} 156u_0 + 22h\dot{u}_0 + 54u_1 - 13h\dot{u}_1 \\ 22hu_0 + 4h^2\dot{u}_0 + 13hu_1 - 3h^2\dot{u}_1 \\ 54u_0 + 13h\dot{u}_0 + 156u_1 - 22h\dot{u}_1 \\ -13hu_0 - 3h^2\dot{u}_0 - 22hu_1 + 4h^2\dot{u}_1 \end{bmatrix}$$

Vir 'n stasionêre oplossing moet

$$\frac{\partial A_1}{\partial \hat{u}^T} = 0 \quad \dots (3.14)$$

Aangesien  $\hat{u} = (u_0, \dot{u}_0, u_1, \dot{u}_1)$ , kry ons dus hieruit vier vergelykings vir die oplossing van  $u_0, \dot{u}_0, u_1, \dot{u}_1$ . Maar  $u_0$  en  $\dot{u}_0$  is reeds bekend uit die beginvoorwaardes. Ons het dus net twee onbekendes nl.  $u_1$  en  $\dot{u}_1$ . Die variasie-beginsel vereis egter dat die waardes  $x(0) = u_0$  en  $x(h) = u_1$  konstant gehou word, dus die twee vergelykings

$$\frac{\partial A_1}{\partial u_0} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial A_1}{\partial u_1} = 0$$

moet weggelaat word uit die stelsel (3.14). Ons los dus vir  $u_1$  en  $\dot{u}_1$  op uit

$$\frac{\partial A_1}{\partial \dot{u}_0} = 0$$

en 
$$\frac{\partial A_1}{\partial \dot{u}_1} = 0$$

Dit lewer twee vergelykings naamlik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \dot{u}_0} &= \frac{m}{30h} [3hu_0 + 4h^2\dot{u}_0 - 3hu_1 - h^2\dot{u}_1] \\ &- \frac{kh}{210} [22hu_0 + 4h^2\dot{u}_0 + 13hu_1 - 3h^2\dot{u}_1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{en } \frac{\partial A_1}{\partial \dot{u}_1} &= \frac{m}{30h} [3hu_0 - h^2\dot{u}_0 - 3hu_1 + 4h^2\dot{u}_1] \\
 &\quad - \frac{kh}{210} [-13hu_0 - 3h^2\dot{u}_0 - 22hu_1 + 4h^2\dot{u}_1] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

In matriksnotasie kry ons dan die volgende:

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} -m/10 & - & 13kh^2/210 & -mh/30 & + & 3kh^3/210 \\ -m/10 & + & 22kh^2/210 & 4mh/30 & - & 4kh^3/210 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \end{matrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -m/10 & + & 22kh^2/210 & -4mh/30 & + & 4kh^3/210 \\ -m/10 & - & 13kh^2/210 & mh/30 & - & 3kh^3/210 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{of } C \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{bmatrix} \quad \dots (3.15)$$

Die waardes van  $u_1$  en  $\dot{u}_1$  tree nou as beginvoorwaardes op vir die volgende interval nl  $[h, 2h]$ , - 'n proses wat homself herhaal.

Die stelsel (3.15) kan dus in die algemeen as die volgende stelsel geskryf word:

$$C \begin{bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ \dot{u}_{i-1} \end{bmatrix} \quad \dots (3.16)$$

met  $i = 1, 2, \dots, \ell$ .

Die stelsel (3.16) lewer 'n enkelstapalgoritme om op elke tydstap  $u_i$  en  $\dot{u}_i$  te bereken.

### 3.4.2 Globale oplossing

In plaas daarvan om 'n iteratiewe enkelstapproses te gebruik, gaan ons nou die probleem oor 'n gegewe tydinterval beskou en



en

$$F = \frac{-kh}{210} \begin{bmatrix} 13h & -3h^2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 312 & 0 & 54 & -13h & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 8h^2 & 13h & -3h^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 54 & 13h & 312 & 0 & 54 & -13h & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -13h & -3h^2 & 0 & 8h^2 & 13h & -3h^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 54 & 13h & 312 & 0 & 54 & -13h & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -13h & -3h^2 & 0 & 8h^2 & 13h & -3h^2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -13h & -3h^2 & 0 & 8h^2 & 13h & -3h^2 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix}$$

L en M is  $(2\ell \times 2)$  matrikse wat gegee word deur

$$L = \frac{-m}{30h} \begin{bmatrix} 3h & 4h^2 \\ -36 & -3h \\ 3h & -h^2 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{en } M = \frac{kh}{210} \begin{bmatrix} 22h & 4h^2 \\ 54 & 13h \\ -13h & -3h^2 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.5 LINEÊRE LAGRANGE-POLINOME AS BASISFUNKSIES

Omdat in die variasie-probleem die beginwaardes  $x(0)$  en  $\dot{x}(0)$  gegee word, beskou Argyris en Scharpf die kubiese Hermiet-polinome

as die laagste orde polinoom wat gebruik kan word as basisfunksies. Ons toon egter aan dat die orde van die basisfunksies suksesvol verlaag kan word.

Die interpolasie-polinoom, in tyd, oor die interval  $[t_{j-1}, t_j]$  word gegee deur

$$u(t) = \left\{ \frac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}} \right\} u_{j-1} + \left\{ \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \right\} u_j$$

met die transformasie  $\tau = \frac{t - t_{j-1}}{\Delta t_j}$  kan  $u(t)$  s6 geskryf word:

$$u(t) = (1 - \tau) u_{j-1} + \tau u_j$$

Die Lagrange-interpolasie-polinoom word dus gegee deur die vektor

$$\tilde{w}(t) = [1 - \tau \quad \tau], \quad \tau \in [0, 1].$$

$$\text{Stel } \hat{u}_j = \begin{bmatrix} u_{j-1} \\ u_j \end{bmatrix}$$

In matriksnotasie kan ons  $u(t)$  nou skryf as:

$$u(t) = W_j(t) \hat{u}_j, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j$$

waar  $W_j(t) = [1 - \tau \quad \tau]$

Netso is

$$\dot{u}(t) = \dot{W}_j(t) \hat{u}_j$$

met  $\dot{W}_j(t) = \frac{d}{dt} W_j = \frac{1}{h} [-1 \quad 1]$

Die integraal

$$A = \int_0^{\ell} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - kx^2 \right] dt$$

kan nou oor die  $j$ -de tydinterval benader word deur

$$\begin{aligned} A_j &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{u})^2 - ku^2 \right] dt \\ &= \frac{1}{2} m \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\dot{w}_j(t) \hat{u}_j)^2 dt - k \int_{t_{j-1}}^{t_j} (w_j(t) \hat{u}_j)^2 dt \\ &= \hat{u}_j^T \left[ \frac{1}{2} m h_j^{11} - k h_j^{00} \right] \hat{u}_j \quad \dots (3.19) \end{aligned}$$

$$\text{met } \bar{h}_j^{11} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{en } h_j^{00} = \frac{h}{3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Die sommasie van die  $A_j$ 's oor die  $\ell$  intervalle lewer nou die volgende benadering vir  $A$  naamlik:

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{j=1}^{\ell} A_j \\ &= \frac{m}{2h} \sum_{j=1}^{\ell} (u_{j-1}, u_j) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_{j-1} \\ u_j \end{bmatrix} \\ &+ \frac{kh}{3} \sum_{j=1}^{\ell} (u_{j-1}, u_j) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_{j-1} \\ u_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{m}{2h} - \frac{kh}{3}\right) u_0^2 + \left(-\frac{m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_0 u_1 \\
 &+ \left(\frac{m}{h} - \frac{2kh}{3}\right) u_1^2 + \left(-\frac{m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_1 u_2 \\
 &+ \left(\frac{m}{h} - \frac{2kh}{3}\right) u_2^2 + \dots + \left(\frac{m}{h} - \frac{2kh}{3}\right) u_{\ell-1}^2 \\
 &+ \left(-\frac{m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_{\ell-1} u_\ell + \left(\frac{m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_\ell^2 \quad \dots \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Vir 'n stasionêre waarde moet

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 0, \quad \text{vir } i = 0, 1, \dots, \ell.$$

Uit hierdie stelsel word dan opgelos vir  $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ .

Netsoos in § 3.3 kan ons die oplossings bereken deur die stelsel globaal of as 'n ry intervalle te beskou.

### 3.5.1 Enkelstapoplossing

Aangesien ons by die lineêre basisfunksies nie die afgeleides eksplisiet bereken nie, gebruik ons die beginwaardes  $u(0) = \frac{1}{3}$  en  $\dot{u}(0) = -2$  om  $u(h)$  te bereken.

Ons kry dan

$$\begin{aligned}
 u(t) &= W_1(t) \hat{u}_1 \\
 &= (1 - \tau) u(0) + \tau u(h)
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \dot{u}(t) = -\frac{1}{h} u(0) + \frac{1}{h} u(h)$$

$$\text{en } u(h) = -2h + \frac{1}{3}.$$

Ons benader nou  $A$  deur

$$A \approx A_1 + A_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{m}{2h} - \frac{kh}{3}\right) u_0^2 + \left(\frac{-m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_0 u_1 \\
 &+ \left(\frac{m}{h} - \frac{2kh}{3}\right) u_1^2 + \left(\frac{-m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_1 u_2 \\
 &+ \left(\frac{m}{2h} - \frac{kh}{3}\right) u_2^2
 \end{aligned}$$

Vir 'n stasionêre waarde moet

$$\frac{\partial A}{\partial u_1} = 0$$

waaruit dan volg dat

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{-m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_0 + 2\left(\frac{m}{h} - \frac{2kh}{3}\right) u_1 \\
 &+ \left(\frac{-m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_2 = 0
 \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{-m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_2 &= \left(\frac{m}{h} + \frac{kh}{3}\right) u_0 \\
 &+ 2\left(\frac{-m}{h} + \frac{2kh}{3}\right) u_1 \quad \dots (3.21)
 \end{aligned}$$

Hieruit word dan vir  $u_2$  opgelos.

Die stelsel (3.21) kan nou in die algemeen as die volgende stelsel geskryf word:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{-m}{h} - \frac{kh}{3}\right) u_{j+1} &= \left(\frac{m}{h} + \frac{kh}{3}\right) u_{j-1} \\
 &+ 2\left(\frac{-m}{h} + \frac{2kh}{3}\right) u_j \quad \dots (3.22)
 \end{aligned}$$

$$\text{met } j = 1, 2, \dots, (\ell - 1)$$

Alhoewel ons basisfunksies lineêr is, kan ons nogtans die



afgeleides by die verskillende tydstappe benader deur

$$\dot{u}(t_j) = \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{h}$$

of deur die sentrale-verskil  $O(h^2)$ -benadering

$$\dot{u}(t_j) = \frac{u(t_{j+1}) - u(t_{j-1})}{2h}.$$

### 3.5.2 Globale oplossing

Ons beskou nou weer die  $\ell$  tydintervalle gelyktydig. Die voorwaardes dat  $\frac{\partial A}{\partial u_i} = 0$  vir  $i=0, 1, \dots, \ell$

lewer dus  $(\ell+1)$  vergelykings en volgens dieselfde redenasie soos vroeër laat ons weer die twee vergelykings

$$\frac{\partial A}{\partial u_0} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial A}{\partial u_\ell} = 0 \quad \text{weg.}$$

Ons verkry dus  $(\ell-1)$  vergelykings waaruit vir die  $(\ell-1)$  onbekendes  $u_2, u_3, \dots, u_\ell$  opgelos word.

In matriksnotasie kan ons die stelsel skryf as:

$$R \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_\ell \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.23)$$

met  $R$  die  $(\ell-1) \times (\ell-1)$  matriks:

$$\begin{bmatrix} -m/h & -kh/3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 2m/h & -4kh/3 & -m/h & -kh/3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -m/h & -kh/3 & 2m/h & -4kh/3 & -m/h & -kh/3 & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & -m/h & -kh/3 & 2m/h & -4kh/3 & -m/h & -kh/3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & -m/h & -kh/3 & 2m/h & -4kh/3 & -m/h & -kh/3 \end{bmatrix}$$

en S die  $(\ell-1) \times 2$  matriks:

$$S = \begin{bmatrix} m/h + kh/3 & 2m/h + 4kh/3 \\ 0 & m/h + kh/3 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die voorafgaande kan kortliks saamgevat word in die volgende twee opmerkings:

Die enkelstapmetode lewer by kubiese polinome 'n  $(2 \times 2)$  stelsel (3.16) wat herhaaldelik opgelos kan word tot by die gevraagde tydstap. By lineêre polinome kry ons 'n enkele vergelyking naamlik (3.22) by elke tydstap wat agtereenvolgens opgelos word.

Die globale metode beskou 'n voorgeskrewe tydstap sê  $t_\ell$  wat in deelintervalle verdeel word. Die stelsels (3.18) en (3.23) moet dan opgelos word.

### 3.6 GALERKIN-METODE

In plaas daarvan om die variasieprobleem

$$\delta \left( \int_0^{t_\ell} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + kx^2 \right] dt \right) = 0, \text{ met } m \text{ en } k \text{ konstantes,}$$

op te los, gaan ons nou die funksionaal

$$A = \int_0^{t_\ell} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + kx^2 \right] dt$$

se geassosieerde Euler-Lagrange-differensiaalvergelyking oplos. Hierdie vergelyking word gegee deur

$$\frac{d}{dt} [m \dot{x}] - \frac{d}{dx} [kx^2] = 0$$

Vir hierdie differensiaalyvergelyking kies ons dieselfde beginvoorwaardes as in paragraaf 3.4 naamlik

$$x(0) = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad \dot{x}(0) = -2.$$

Ons beskou dus nou in besonder die beginvoorwaardeprobleem

$$m\ddot{x} - 2kx = 0 \quad \dots (3.24)$$

met  $x(0) = \frac{1}{3}$ ,  $\dot{x}(0) = -2$ ,  $m = \frac{3}{8}$  en  $k = -12$ .

Ons gaan nou (3.24) numeries oplos deur van die Galerkin-metode gebruik te maak soos voorgestel deur Hulme ([25], [26]). Deur in tyd te diskretiseer, word die oplossing  $x$  van (3.24) benader deur 'n lineêre kombinasie van basisfunksies wat afhanklik van die tyd is. Laat u die Galerkin-benadering van die eksakte oplossing  $x$  wees, dit wil sê

$$x(t) \approx u(t) = \sum_{i=0}^{\ell} u_i \phi_i(t)$$

Die Galerkin-metode lewer dan vir ons die stelsel

$$m \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_i'', \phi_j) u_i + k \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_i, \phi_j) u_i = 0 \quad \dots (3.25)$$

met  $m = \frac{3}{8}$ ,  $k = 24$  en  $j = 0, \dots, \ell$

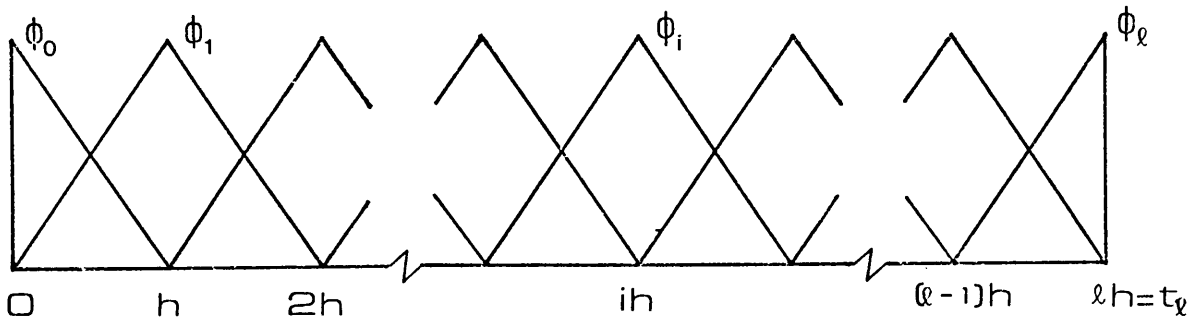
Ons gaan dié stelsel (3.25) oplos deur eerstens van lineêre latte en dan van kubiese latte as basisfunksies gebruik te maak.

### 3.6.1 Lineêre Lagrange-polinome as basisfunksies

Die lineêre latte of hoedfunksies wat ons as basisfunksies gaan gebruik, word sô gedefinieer:

$$\phi_i(t) = \begin{cases} \frac{(t - t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})} & , t_{i-1} \leq t \leq t_i \\ \frac{(t_{i+1} - t)}{(t_{i+1} - t_i)} & , t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & , \text{andersins.} \end{cases}$$

Die interval  $[t_0, t_\ell]$  verdeel ons in  $\ell$  gelyke deelintervalle en sodoende verkry ons dan die volgende  $(\ell+1)$  basisfunksies.



met  $h = (t_{i+1} - t_i)$  vir  $i = 0, 1, \dots, \ell-1$ .

Uit die beginvoorwaardes volg dat  $u_0 = x(0) = \frac{1}{3}$  en uit die beginsnelheid kan ons ook die benaderde oplossing  $u_1$  by  $t=h$  vind. Ons gaan twee benaderings vir  $u_1$  beskou naamlik

A:  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} \approx \frac{u_1 - u_0}{h}$

di  $-2 = \frac{u_1 - u_0}{h}$

di  $u_1 = \frac{1}{3} - 2h$

en

B:  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2h}$

di  $u_1 = u_{-1} - 4h$

of  $u_{-1} = u_1 + 4h$

In die stelsel (3.25) is  $u_0$  en  $u_1$  bekend en ons moet vir die  $(\ell-1)$  onbekendes  $u_2, \dots, u_\ell$  oplos. Hiervoor het ons dus  $(\ell-1)$  vergelykings nodig en die binneprodukte in (3.25) word net met die  $(\ell-1)$  basisfunksies  $\phi_j, j=1, 2, \dots, \ell-1$ , geneem. Die stelsel word dus

$$m \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_i'', \phi_j) u_i + k \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_i, \phi_j) u_i = 0 \quad \dots (3.26)$$

met  $j = 1, 2, \dots, \ell-1$ .

Maar

$$\begin{aligned} (\phi_i'', \phi_j) &= \int_0^{\ell h} \phi_i'' \phi_j dt \\ &= \phi_i'(\ell h) \phi_j(\ell h) - \phi_i'(0) \phi_j(0) \\ &\quad - \int_0^{\ell h} \phi_i' \phi_j' dt \\ &= - (\phi_i'; \phi_j') \end{aligned}$$

want  $\phi_j(0) = 0 = \phi_j(\ell h)$  vir  $j=1, \dots, (\ell-1)$

Die stelsel (3.26) word

$$- m \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_i', \phi_j') u_i + k \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_i, \phi_j) u_i = 0 \quad \dots (3.27)$$

met  $j=1, 2, \dots, \ell-1$ .

Die binneprodukte word gegee deur

$$(\phi_i, \phi_i) = \begin{cases} \frac{2h}{3} & , \quad i = 1, 2, \dots, (\ell-1) \\ \frac{h}{3} & , \quad i = 0; i = \ell \end{cases}$$

$$(\phi_i, \phi_{i+1}) = \frac{h}{6} \quad , \quad i = 0, \dots, (\ell-1)$$

$$\begin{aligned}
 (\phi_i, \phi_{i+2}) &= 0, \quad i = 0, \dots, (\ell-2) \\
 (\phi'_i, \phi'_i) &= \begin{cases} \frac{2}{h}, & i = 1, \dots, (\ell-1) \\ \frac{1}{h}, & i = 0; i = \ell \end{cases} \\
 (\phi'_i, \phi'_{i+1}) &= -\frac{1}{h}, \quad i = 0, \dots, (\ell-1) \\
 (\phi'_i, \phi'_{i+2}) &= 0, \quad i = 0, \dots, (\ell-2).
 \end{aligned}$$

Ons kan nou (3.27) op twee maniere oplos deur eerstens 'n enkelstap rekursiewe prosedure te gebruik en tweedens die globale  $(\ell-1) \times (\ell-1)$  stelsel op te los.

### 3.6.1.1 Enkelstapmetode

Aangesien ons uit die beginvoorwaardes  $u_0$  en  $u_1$  kan vind (uit A), gaan ons nou die benaderde oplossing by  $t = 2h$ , naamlik  $u_2$ , bereken. In die stelsel (3.27) stel ons  $\ell = 2$  en dan geld:

$$\begin{aligned}
 & -m\{(\phi'_0, \phi'_1) u_0 + (\phi'_1, \phi'_1) u_1 + (\phi'_2, \phi'_1) u_2\} \\
 & +k\{(\phi_0, \phi_1) u_0 + (\phi_1, \phi_1) u_1 + (\phi_2, \phi_1) u_2\} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{m}{h} + \frac{kh}{6}\right) u_2 &= \left(-\frac{m}{h} - \frac{kh}{6}\right) u_0 \\
 & + \left(\frac{2m}{h} - \frac{2kh}{3}\right) u_1 \quad \dots \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Uit (3.28) word  $u_2$  nou bereken en dan tree  $u_1$  en  $u_2$  weer as beginvoorwaardes op om  $u_3$  te bereken. In die algemeen kan

ons dus (3.28) skryf as

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{h} + \frac{kh}{6}\right)u_i &= \left(-\frac{m}{h} - \frac{kh}{6}\right)u_{i-2} \\ &+ \left(\frac{2m}{h} - \frac{2kh}{3}\right)u_{i-1} \quad \dots \quad (3.29) \end{aligned}$$

met  $i = 2, \dots, \ell$ .

Indien ons  $u_1$  bereken deur B te gebruik, skryf ons (3.29) s6:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{h} + \frac{kh}{6}\right)u_i &= \left(-\frac{m}{h} - \frac{kh}{6}\right)u_{i-2} \\ &+ \left(\frac{2m}{h} - \frac{2kh}{3}\right)u_{i-1} \quad \dots \quad (3.30) \end{aligned}$$

met  $i = 1, 2, \dots, \ell$ .

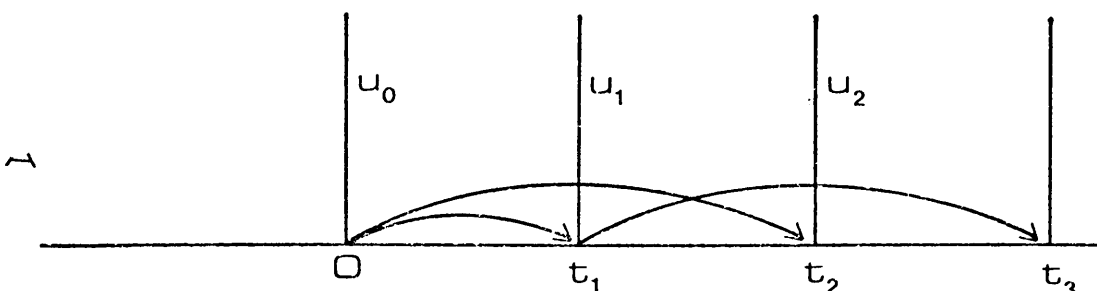
Vir  $i=1$  volg dan dat

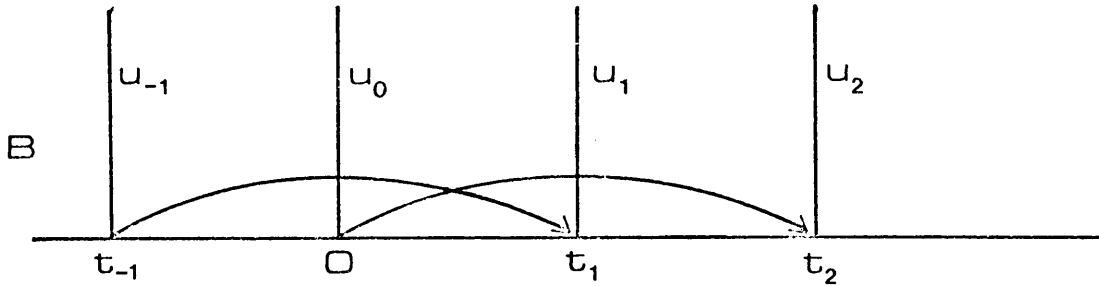
$$\left(\frac{m}{h} + \frac{kh}{6}\right)u_1 = \left(-\frac{m}{h} - \frac{kh}{6}\right)u_{-1} + \left(\frac{2m}{h} - \frac{2kh}{3}\right)u_0$$

dus

$$2\left(\frac{m}{h} + \frac{kh}{6}\right)u_1 = -4m - \frac{4kh^2}{6} + \left(\frac{2m}{h} - \frac{2kh}{3}\right)u_0$$

Hieruit bereken ons  $u_1$  en uit (3.30) los ons dan rekursief op vir  $u_2, u_3, \dots, u_\ell$ . Ons kan die twee metodes skematies s6 voorstel:





Die oplossing  $u_i$  word telkens bereken met behulp van die waardes  $u_{i-1}$  en  $u_{i-2}$ . Hierdie voortmarsjeer-in-tyd-metode sal by die tweedimensionale probleme weer 'n groot rol speel.

### 3.6.1.2 Globale metode

Die stelsel (3.27) lewer 'n  $(\ell-1) \times (\ell-1)$  stelsel van vergelykings wat ons gelyktydig oplos. In matriksnotasie skryf ons die stelsel as:

$$A \underline{u} = B \underline{y} \quad \dots (3.31)$$

met A 'n  $(\ell-1) \times (\ell-1)$  matriks, B 'n  $(\ell-1) \times 2$  matriks,  $\underline{u} = (u_2, u_3, \dots, u_\ell)^t$  en  $\underline{y} = (u_0, u_1)$ .

In besonder is A 'n matriks, met 'n bandstruktuur, waarvan die elemente soos volg verkry word:

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= -m(\phi''_i, \phi'_{i+1}) + k(\phi_i, \phi_{i+1}) \quad , \quad i = 1, \dots, \ell-1. \\
 &= \frac{m}{h} + \frac{kh}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{i+1,i} &= -m(\phi'_{i+1}, \phi'_{i+1}) + k(\phi_{i+1}, \phi_{i+1}) \\
 &= -\frac{2m}{h} + \frac{2kh}{3} \quad , \quad i = 1, \dots, \ell-2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{i+2,i} &= -m(\phi'_{i+2}, \phi'_{i+1}) + k(\phi_{i+2}, \phi_{i+1}) \\
 &= \frac{m}{h} + \frac{kh}{6} \quad , \quad i = 1, \dots, \ell-3.
 \end{aligned}$$



en  $a_{ij} = 0$  vir  $j > i$  of  $i - j \geq 3$ .

Die elemente van B word gegee deur:

$$b_{i1} = m(\phi'_0; \phi'_i) - k(\phi_0, \phi_i)$$

$$\text{en } b_{i2} = m(\phi'_1; \phi'_i) - k(\phi_1, \phi_i)$$

met  $i = 1, 2, \dots, \ell - 1$ .

Die matriks A is onderdriehoekig met 'n bandwydte van drie.

Deur van hierdie eienskap van A gebruik te maak, kan die stelsel (3.31) dus ekonomies opgelos word.

### 3.6.2 Kubiese Hermiet-polinome as basisfunksies

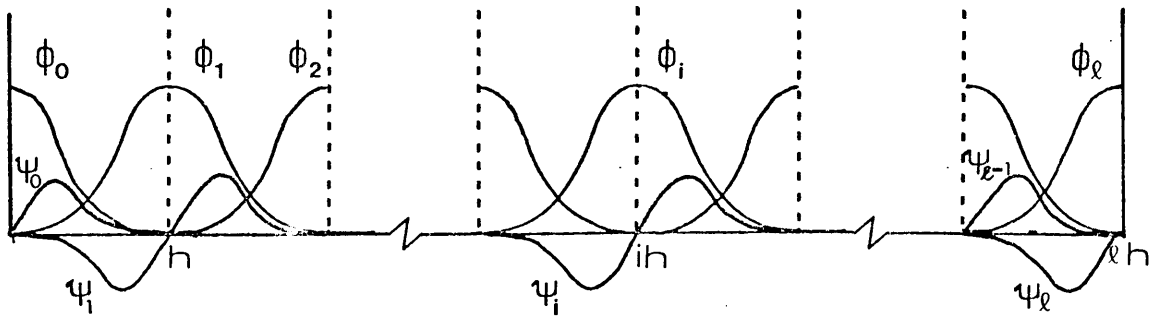
As basisfunksies gebruik ons nou in die stelsel (3.27) die Hermiet-polinome. Die polinome interpoleer die funksie sowel as sy afgeleide by die roosterpunte. Om 'n onderskeid te maak tussen dié basisfunksies wat die funksiewaarde interpoleer en dié wat die afgeleide interpoleer, gebruik ons die volgende notasie:

$$\phi_j(t) = \begin{cases} \frac{(t_{j+1} - t)^2}{(t_{j+1} - t_j)^3} [(t_{j+1} - t_j) + 2(t - t_j)], & t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ \frac{(t - t_{j-1})^2}{(t_j - t_{j-1})^3} [(t_j - t_{j-1}) + 2(t_j - t)], & t_{j-1} \leq t \leq t_j \end{cases}$$

en

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \frac{(t - t_j)(t_{j-1} - t)^2}{(t_j - t_{j-1})^2}, & t_{j-1} \leq t \leq t_j \\ \frac{(t - t_{j+1})^2(t - t_j)}{(t_{j+1} - t_j)^2}, & t_j \leq t \leq t_{j+1} \end{cases}$$

Ons verdeel die interval  $[t_0, t_\ell]$  weer in  $\ell$  gelyke deelinter-  
 valle en die basisfunksies kan ons dan grafies s6 voorstel:



Die oplossing van die differensiaalvergelyking (3.24) word  
 nou benader deur

$$x(t) \approx u(t) = \sum_{i=0}^{\ell} u_i \phi_i + \sum_{i=0}^{\ell} u_i^* \psi_i \quad \dots (3.32)$$

Die Galerkin-benadering lewer deur die binneprodukte met die  
 basisfunksies  $\phi_j$  en  $\psi_j$  te neem die volgende stelsel:

$$\begin{aligned}
 & m \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_j'', \phi_j) u_i + m \sum_{i=0}^{\ell} (\psi_i'', \phi_j) u_i^* \\
 & + k \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_i, \phi_j) u_i + k \sum_{i=0}^{\ell} (\psi_i, \phi_j) u_i^* = 0
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 & m \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_i'', \psi_j) u_i + m \sum_{i=0}^{\ell} (\psi_i'', \psi_j) u_i^* \\
 & + k \sum_{i=0}^{\ell} (\phi_i, \psi_j) u_i + k \sum_{i=0}^{\ell} (\psi_i, \psi_j) u_i^* = 0
 \end{aligned}$$

met  $j = 0, 1, \dots, \ell$ . ... (3.33)

Die beginvoorwaardes bepaal  $u_0$  en  $u_0^*$ . Die stelsel (3.33) be-  
 vat dus  $2\ell$  onbekendes. Ons soek dus na  $2\ell$  vergelykings om

vir die onbekendes op te los en derhalwe word die binneprodukte met die basisfunksies  $\phi_j$ ,  $j = 1, \dots, \ell - 1$  en  $\psi_j$ ,  $j = 0, \dots, \ell$  geneem.

Die stelsel (3.33) reduceer dan tot 'n  $(2\ell \times 2\ell)$  stelsel.

Die binneprodukte in (3.33) word deur die volgende vergelykings gegê:

$$\begin{aligned}
 (\phi_i'', \phi_j) &= \begin{cases} \frac{6}{5h} & , \quad |i - j| = 1 \\ -\frac{72}{30h} & , \quad i = j, \quad j \neq \ell \\ -\frac{36}{30h} & , \quad i = j = \ell \\ 0 & , \quad \text{andersins} \end{cases} \\
 (\psi_i'', \phi_j) &= \begin{cases} \frac{1}{10} & , \quad i = j - 1 \\ -\frac{1}{10} & , \quad i = j + 1 \\ 0 & , \quad i = j \neq \ell \\ \frac{11}{10} & , \quad i = j = \ell \end{cases} \\
 (\phi_i, \phi_j) &= \begin{cases} \frac{54h}{420} & , \quad |i - j| = 1 \\ \frac{312h}{420} & , \quad i = j \neq \ell, \quad j \neq 1 \\ \frac{156h}{420} & , \quad i = j = \ell, \quad i = j = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(\psi_i, \phi_j) = \begin{cases} \frac{13h^2}{420} & , \quad i = j - 1 \\ -\frac{13h^2}{420} & , \quad i = j + 1 \\ 0 & , \quad i = j \neq \ell, j \neq 0 \\ -\frac{22h^2}{420} & , \quad i = j = \ell \\ \frac{22h^2}{420} & , \quad i = j = 0 \end{cases}$$

$$(\phi_i'', \psi_j) = \begin{cases} -\frac{1}{10} & , \quad i = j - 1 \\ \frac{1}{10} & , \quad i = j + 1 \\ 0 & , \quad i = j \neq \ell \\ -\frac{1}{10} & , \quad i = j = \ell \\ \frac{1}{10} & , \quad i = j = 0 \end{cases}$$

$$(\psi_i'', \psi_j) = \begin{cases} \frac{h}{30} & , \quad |i - j| = 1 \\ -\frac{8h}{30} & , \quad i = j \neq \ell, j \neq 0 \\ -\frac{4h}{30} & , \quad i = j = \ell, i = j = 0 \end{cases}$$

$$(\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} -\frac{3h^3}{420} & , \quad |i - j| = 1 \\ \frac{8h^3}{420} & , \quad i = j \neq \ell \\ \frac{4h^3}{420} & , \quad i = j = \ell, i = j = 0 \end{cases}$$

met  $i = 0, 1, \dots, \ell$  en  $j = 1, \dots, \ell$ .

Die stelsel (3.33) gaan ons nou weer oplos deur eerstens 'n enkelstappesedure te gebruik en tweedens die stelsel globaal op te los.

### 3.6.2.1 Enkelstapmetode

Aangesien  $u_0$  en  $u_0^*$  bekend is uit die beginvoorwaardes gaan ons nou  $u_1$  en  $u_1^*$  bereken by die eerste tydstap naamlik  $t = h$ . Ons stel dus in (3.33) vir  $\ell = 1$ . Die stelsel reduseer dan tot die volgende twee vergelykings:

$$\begin{aligned}
 & m \sum_{i=0}^1 (\phi_i'' ; \phi_1) u_i + m \sum_{i=0}^1 (\psi_i'' ; \phi_1) u_i^* \\
 & + k \sum_{i=0}^1 (\phi_i, \phi_1) u_i + k \sum_{i=0}^1 (\psi_i, \phi_1) u_i^* = 0
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 & m \sum_{i=0}^1 (\phi_i'' ; \psi_1) u_i + m \sum_{i=0}^1 (\psi_i'' ; \psi_1) u_i^* \\
 & + k \sum_{i=0}^1 (\phi_i, \psi_1) u_i + k \sum_{i=0}^1 (\psi_i, \psi_1) u_i^* = 0
 \end{aligned}$$

Deur die waardes van die binneprodukte te vervang, word dié twee vergelykings:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -\frac{36m}{30h} + \frac{156hk}{420} & \frac{11m}{10} - \frac{22kh^2}{420} \\ \frac{m}{10} - \frac{22kh^2}{420} & -\frac{4mh}{30} + \frac{4kh^3}{420} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1^* \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} -\frac{6m}{5h} - \frac{54kh}{420} & -\frac{m}{10} - \frac{13kh^2}{420} \\ \frac{m}{10} + \frac{13kh^2}{420} & -\frac{mh}{30} + \frac{3kh^3}{420} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0^* \end{pmatrix} \\
 \delta f \quad & A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1^* \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0^* \end{pmatrix} \quad \dots (3.34)
 \end{aligned}$$

met A en B bogenoemde twee matrikse.

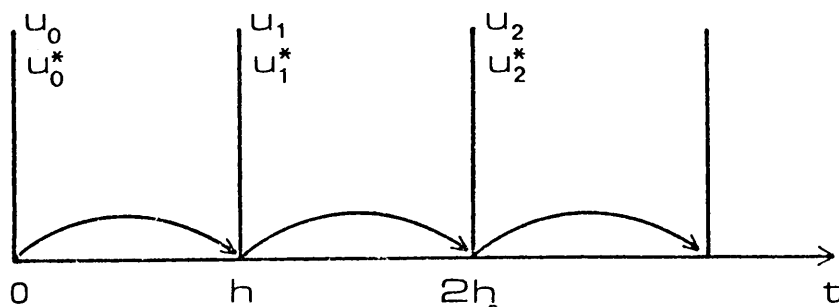
Ons los dus op vir  $u_1$  en  $u_1^*$  en gebruik dan dié waardes as

die beginwaardes vir die oplossing oor die interval  $[h, 2h]$ .  
 In die algemeen skryf ons die stelsel (3.34) dan as die stelsel

$$A \begin{pmatrix} u_i \\ u_i^* \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_{i-1}^* \end{pmatrix} \quad \dots, (3.35)$$

met  $i = 1, \dots, \ell$

Skematies kan ons die prosedure sō voorstel:



### 3.6.2.2 Globale oplossing

Ons beskou nou weer die stelsel (3.33) maar ons los gelyktydig op vir die  $2\ell$  onbekendes  $u_1, u_1^*, \dots, u_\ell, u_\ell^*$ .

Eerstens beskou ons die binneprodukte met die basisfunksies  $\phi_j, j=1, \dots, \ell-1$ . Dit lewer vir ons  $(\ell-1)$  vergelykings. In besonder geld vir  $j=1$  dat

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{72m}{30h} + \frac{312kh}{420}\right)u_1 + \left(\frac{6m}{5h} + \frac{54kh}{420}\right)u_2 \\ & + 0 \cdot u_1^* + \left(-\frac{m}{10} - \frac{13kh^2}{420}\right)u_2^* \\ & = \left(-\frac{6m}{5h} - \frac{54kh}{420}\right)u_0 + \left(-\frac{m}{10} - \frac{13kh^2}{420}\right)u_0^* \end{aligned}$$

Vir  $j = \ell - 1$  kry ons:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{6m}{5h} + \frac{54kh}{420}\right)u_{\ell-2} + \left(-\frac{72m}{30h} + \frac{312kh}{420}\right)u_{\ell-1} \\
 & + \left(\frac{6m}{5h} + \frac{54kh}{420}\right)u_{\ell} + \left(\frac{m}{10} + \frac{13kh^2}{420}\right)u_{\ell-2}^* \\
 & + 0 \cdot u_{\ell-1}^* + \left(-\frac{m}{10} - \frac{13kh^2}{420}\right)u_{\ell}^* = 0
 \end{aligned}$$

Nou beskou ons die binneprodukte van (3.33) met die basisfunksies  $\psi_j$ ,  $j = 0, \dots, \ell$ . Dit lewer vir ons  $(\ell+1)$  vergelykings. In besonder geld respektiewelik vir  $j=0$  en  $j=\ell$  dat:

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{m}{10} + \frac{13kh^2}{420}\right)u_1 + \left(\frac{mh}{30} - \frac{3kh^3}{420}\right)u_1^* \\
 & = \left(\frac{m}{10} - \frac{22kh^2}{420}\right)u_0 + \left(\frac{4mh}{30} - \frac{4kh^3}{420}\right)u_0^*
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{m}{10} - \frac{13kh^2}{420}\right)u_{\ell-1} + \left(\frac{m}{10} - \frac{22kh^2}{420}\right)u_{\ell} \\
 & + \left(\frac{mh}{30} - \frac{3kh^3}{420}\right)u_{\ell-1}^* + \left(-\frac{4mh}{30} + \frac{4kh^3}{420}\right)u_{\ell}^* \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Ons kry dus  $2\ell$  vergelykings en ons skryf die stelsel as die volgende matriksvergelyking:

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{\ell} \\ u_{\ell}^* \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} u_0 \\ u_0^* \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.36)$$

A en B is die volgende  $(2\ell \times 2\ell)$  en  $(2\ell \times 2)$  matrikse respektiewelik:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2\ell, 2\ell-3} & a_{2\ell, 2\ell-2} & a_{2\ell, 2\ell-1} & a_{2\ell, 2\ell} & & & \cdot \end{bmatrix}$$

met

$$a_{11} = \frac{m}{10} + \frac{13kh^2}{420}$$

$$a_{12} = \frac{mh}{30} - \frac{3kh^3}{420}$$

$$a_{2i, 2i-1} = -\frac{72m}{30h} + \frac{312kh}{420}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1$$

$$a_{2i+1, 2i} = -\frac{8mh}{30} + \frac{8kh^3}{420}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1$$

$$a_{2i, 2i+1} = \frac{6m}{h} + \frac{54kh}{420}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1$$

$$a_{2i, 2i} = 0, \quad i = 1, \dots, \ell - 1$$

$$a_{2i+1, 2i-1} = 0, \quad i = 1, \dots, \ell - 1$$

$$a_{2i, 2i+2} = -\frac{m}{10} - \frac{13kh^2}{420}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1$$

$$a_{2i+1, 2i+1} = a_{11}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1$$

$$a_{2i+1, 2i+2} = \frac{mh}{30} - \frac{3kh^3}{420}, \quad i = 1, \dots, \ell - 1$$

$$a_{2i+2, 2i-1} = -a_{23}, \quad i = 1, \dots, \ell - 2$$

$$a_{2i+2, 2i} = a_{11}, \quad i = 1, \dots, \ell - 2$$

$$a_{2i+3, 2i-1} = -a_{11}, \quad i = 1, \dots, \ell - 2$$

$$a_{2i+3, 2i} = a_{12}, \quad i = 1, \dots, \ell - 2$$

$$a_{2\ell, 2\ell} = \frac{a_{32}}{2}$$

$$a_{2\ell, 2\ell-1} = \frac{m}{10} - \frac{22kh^2}{420}$$



$$a_{2\ell, 2\ell-2} = a_{12}$$

$$a_{2\ell, 2\ell-3} = a_{12}$$

$$a_{2\ell, 2\ell-4} = -a_{11}$$

en

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ b_{2\ell, 1} & b_{2\ell, 2} \end{bmatrix}$$

met

$$b_{11} = \frac{m}{10} - \frac{22kh^2}{420}$$

$$b_{12} = \frac{-4mh}{30} - \frac{4kh^3}{420}$$

$$b_{21} = \frac{-6m}{5h} - \frac{54kh}{420}$$

$$b_{22} = -\frac{m}{10} - \frac{13kh^2}{420}$$

$$b_{31} = -b_{22}$$

$$b_{32} = -\frac{mh}{30} + \frac{3kh^3}{420}$$

$$b_{ij} = 0 \quad \text{vir } i = 3, \dots, 2\ell \text{ en } j = 1, 2$$

Die matriks A het 'n bandwydte 4 en die stelsel (3.36) kan ekonomies opgelos word.

### 3.7 NUMERIESE RESULTATE

Ons gebruik die volgende norms vir die berekening van die foutfunksies naamlik

$$\|x - u\| = |x(ih) - u(ih)|$$

$$\|x - u\|_R = \frac{\|x - u\|}{\|x\|}$$

$$\|x - u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq \ell} |x(ih) - u(ih)|$$

en 
$$\|x - u\|_{\infty}^R = \frac{\|x - u\|}{\|x\|_{\infty}}$$

Die variasiebeginsel en Galerkin-metode lewer telkens numeriese resultate wat, soos verwag kon word, ekwivalent is. Ons gaan dus net die Galerkin-metode numeries ontleed vir die enkelstap- en globale-prosedure met die verskillende basisfunksies.

In tabel 3.1 beskou ons die foutfunksie van die stelsel(3.36). Vir  $l = 50$  het ons dus 'n  $100 \times 100$  matriks opgelos vir die berekening van  $u_i$  en  $\frac{du_i}{dt}$  met  $i = 1, \dots, 50$ .

In tabel 3.2 beskou ons die fout vir die afgeleides van die oplossing.

Ons merk op dat

$$\|x - u\|_{\infty} = 1,0 \text{ E-9}$$

$$\text{en } \|\dot{x} - \dot{u}\|_{\infty} = 3,0 \text{ E-8}$$

Galerkin-metode  
Hermiet-polinome

- (i) *Globaal* (Stelsel 3.36).  
 $h = 0,001; l = 50$

TABEL 3.1

T	x	u	$\ x - u\ $	$\ x - u\ _R$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
10h	,312288562	,312288562	< E-9	< E-9
20h	,289246209	,289246209	< E-9	< E-9
30h	,264353668	,264353668	< E-9	< E-9
40h	,237770165	,237770165	< E-9	< E-9
50h	,209665746	,209665745	1,0 E-9	4,8 E-9

TABEL 3,2

T	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{du}{dt}$	$\ \dot{x} - \dot{u}\ $	$\ \dot{x} - \dot{u}\ _R$
0	-2,0	-2,0	0	0
10h	-2,20670926	-2,20670928	2,0 E-8	9,1 E-9
20h	-2,39930312	-2,39930313	1,0 E-8	4,2 E-9
30h	-2,57654962	-2,57654964	2,0 E-8	7,8 E-9
40h	-2,73731500	-2,73731501	1,0 E-8	3,7 E-9
50h	-2,88057090	-2,88057093	3,0 E-8	1,0 E-8

In tabelle 3.3 en 3.4 word die foutafskattings vir die stelsel (3.35) gegee. Hier is

$$\|x - u\|_{\infty} = 1,5 \text{ E-6}$$

$$\text{en } \|\dot{x} - \dot{u}\|_{\infty} = 9,1 \text{ E-6}$$

Die eksakte oplossing van ons differensiaalvergelyking

$$x(t) = \frac{1}{3} \cos 8t - \frac{1}{4} \sin 8t$$

word voorgestel in figuur 3.4. Ons merk op dat die maksimumfout telkens voorkom indien die absolute funksiewaardes relatief klein is, terwyl die fout by die ekstreempunte weer relatief akkurater is. Dié situasie is by die foutfunksie vir die afgeleides net die omgekeerde.

In tabel 3.5 verskyn die foutfunksie met lineêre polinome as basisfunksies. Hier het ons 'n  $50 \times 50$  stelsel opgelos om  $u_1$ ,  $u=1, \dots, 50$  te bereken.

Tabelle 3.6 en 3.7 lewer die numeriese resultate vir die enkelstapmetode met lineêre basisfunksies. In die stelsel (3.29) word  $u_1$  uit die beginvoorwaardes bereken deur 'n eindige-verskil oor een interval terwyl in (3.30) word  $u_1$  oor

'n dubbelinterval benader.

Uit figuur 3.5 A merk ons dat

$$\|u - x\|_{\infty}^R = 3,2 \text{ E-3}$$

en dat dié fout nie groter word met toename in tyd nie.

Uit figuur 3.5 B volg dat

$$\|u - x\|_{\infty}^R = 4,6 \text{ E-5}$$

Hierdie fout word na 2500 stappe verkry. Figuur 3.5 B toon duidelik die fouttoename met betrekking tot tyd.

(ii) *Enkelstap* (Stelsel 3.35)

$$h = 0,001; \quad 1000 \text{ stappe.}$$

TABEL 3.3

T	x	u	$\ x - u\ $	$\ x - u\ _R$	$\ x - u\ _{\infty}^R$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
100h	,528965471 E-1	,528964664 E-1	8,1 E-8	1,5 E-6	1,9 E-7
200h	-,259626575	-,259626720	1,5 E-7	5,8 E-7	3,6 E-7
300h	-,414663700	-,414663662	3,8 E-8	9,2 E-8	9,1 E-8
400h	-,318171389	-,318170938	4,5 E-7	1,4 E-6	1,1 E-6
500h	-,286805831 E-1	-,286797973 E-1	7,9 E-7	2,8 E-5	1,9 E-6
600h	,278207480	,278208141	6,6 E-7	2,4 E-6	1,6 E-6
700h	,416338619	,416338584	3,5 E-8	8,4 E-8	8,4 E-8
800h	,301924338	,301923374	9,6 E-7	3,2 E-6	2,3 E-6
900h	,436680555 E-2	,436531147 E-2	1,5 E-6	3,4 E-4	3,6 E-6
1000h	-2,95839573 E-1	-2,95840693 E-1	1,1 E-6	3,8 E-6	2,6 E-6

TABEL 3.4

T	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{du}{dt}$	$\  \dot{x} - \dot{u} \ $	$\  \dot{x} - \dot{u} \ _R$	$\  \dot{x} - \dot{u} \ _\infty^R$
0	-2,0	-2,0	0	0	0
100h	-3,30636299	-3,30636420	1,2 E-6	3,7 E-7	3,6 E-7
200h	-2,60713056	-2,60713021	3,5 E-7	1,3 E-7	1,0 E-7
300h	-,326447717	-,326444432	3,3 E-6	1,0 E-5	9,9 E-7
400h	2,15225393	2,15225836	4,4 E-6	2,1 E-6	1,3 E-6
500h	3,32542723	3,32542880	1,6 E-6	4,7 E-7	4,8 E-7
600h	2,48144099	2,48143671	4,3 E-6	1,7 E-6	1,3 E-6
700h	,132245944	,132236894	9,1 E-6	6,8 E-5	2,7 E-6
800h	-2,29716772	-2,29717613	8,4 E-6	3,7 E-6	2,5 E-6
900h	-3,33315027	-3,33315153	1,3 E-6	3,8 E-7	3,9 E-7
1000h	-2,34728859	-2,34727990	8,7 E-6	3,7 E-6	2,6 E-6

Lineêre polinome

(i) *Globaal* (Stelsel 3.31)

$$h = 0,001, \quad \ell = 50$$

TABEL 3.5

T	x	u	$\  x - u \ $	$\  x - u \ _R$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
10h	,312288562	,312394907	1,1 E-4	3,4 E-4
20h	,289246209	,289458231	2,1 E-4	7,3 E-4
30h	,264353668	,264670019	3,2 E-4	1,2 E-3
40h	,237770166	,238188831	4,2 E-4	1,8 E-3
50h	,209665746	,210184056	5,2 E-4	2,5 E-3

(ii) *Enkelstap* (Stelsel 3.29) Kyk figuur 3.5A

$h = 0,001$  , 2000 stappe.

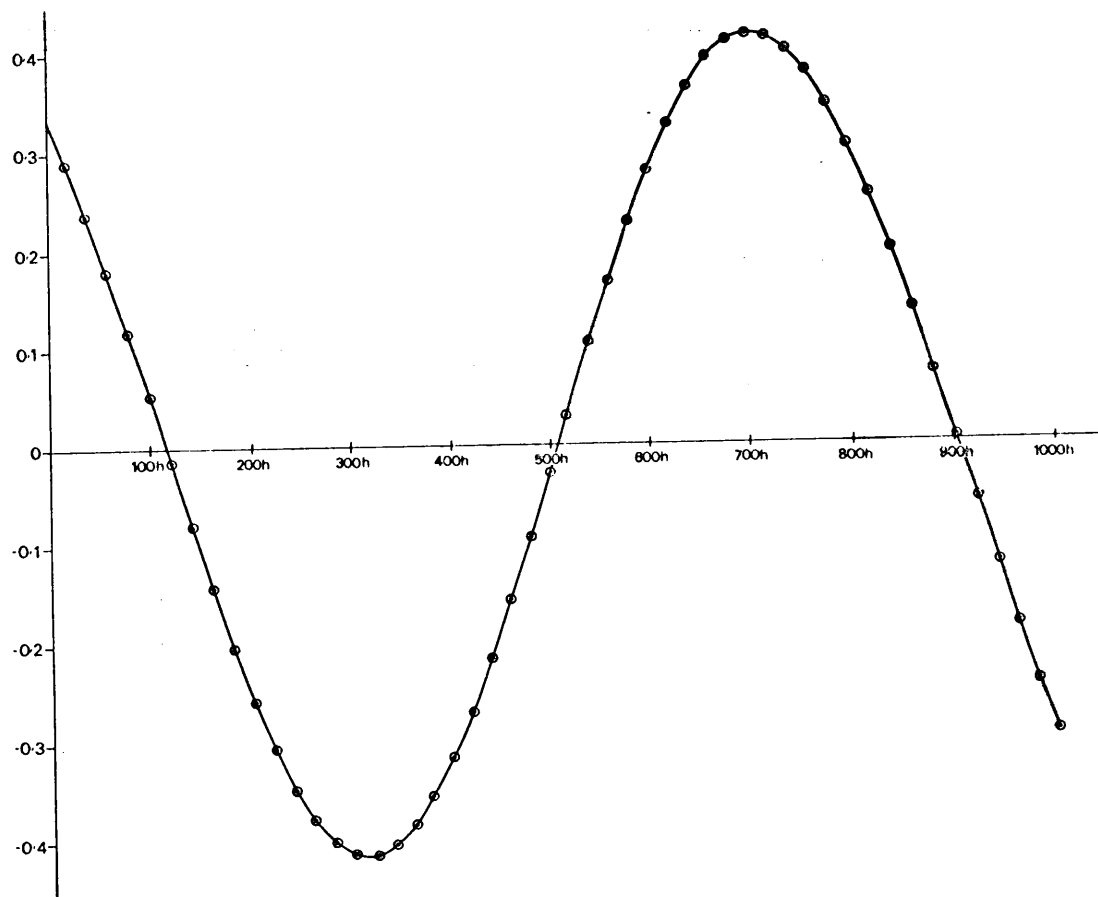
TABEL 3.6

T	x	u	$\ x - u\ $	$\ x - u\ _R$	$\ x - u\ _\infty^R$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
100h	,528965471 E-1	,538515129 E-1	9,5 E-4	1,8 E-2	2,28 E-3
200h	-,259626575	-,258295748	1,3 E-3	5,1 E-3	3,12 E-3
300h	-,414663700	-,413765064	9,0 E-4	2,2 E-3	2,16 E-3
400h	-,318171389	-,318251312	8,0 E-5	2,5 E-4	1,92 E-3
500h	-,286805831 E-1	-,296915577 E-1	1,0 E-3	3,5 E-2	2,40 E-3
600h	,278207480	,276878606	1,3 E-3	4,8 E-3	3,12 E-3
700h	,416338619	,415498770	8,4 E-4	2,0 E-3	2,02 E-3
800h	,301924338	,302084227	1,6 E-4	5,3 E-4	3,84 E-4
900h	,436680555 E-2	,543037059 E-2	1,1 E-3	2,4 E-1	2,64 E-3
1000h	-,295839573	-,294517459	1,3 E-3	4,5 E-3	3,12 E-3
1100h	-,416593636	-,415815852	7,8 E-4	1,9 E-3	1,87 E-3
1200h	-,284647590	-,284887201	2,4 E-4	8,4 E-4	2,02 E-3
1300h	,199618648 E-1	,188493311 E-1	1,1 E-3	5,6 E-2	2,64 E-3
1400h	,312462720	,311152170	1,3 E-3	4,2 E-3	3,12 E-3
1500h	,415671433	,414949718	7,2 E-4	1,7 E-3	1,73 E-3
1600h	,266400066	,266718866	3,2 E-4	1,2 E-3	7,68 E-4
1700h	-,442224522 E-1	-,430647670 E-1	1,2 E-3	2,6 E-2	2,88 E-3
1800h	-,328020230	-,326726022	1,3 E-3	3,9 E-3	3,12 E-3
1900h	-,412845333	-,412200656	6,4 E-4	1,6 E-3	1,53 E-3
2000h	-,249919118	-,250305992	3,9 E-4	1,5 E-3	9,36 E-4

(iii) *Enkelstap* (Stelsel 3.30) Kyk figuur 3.5B

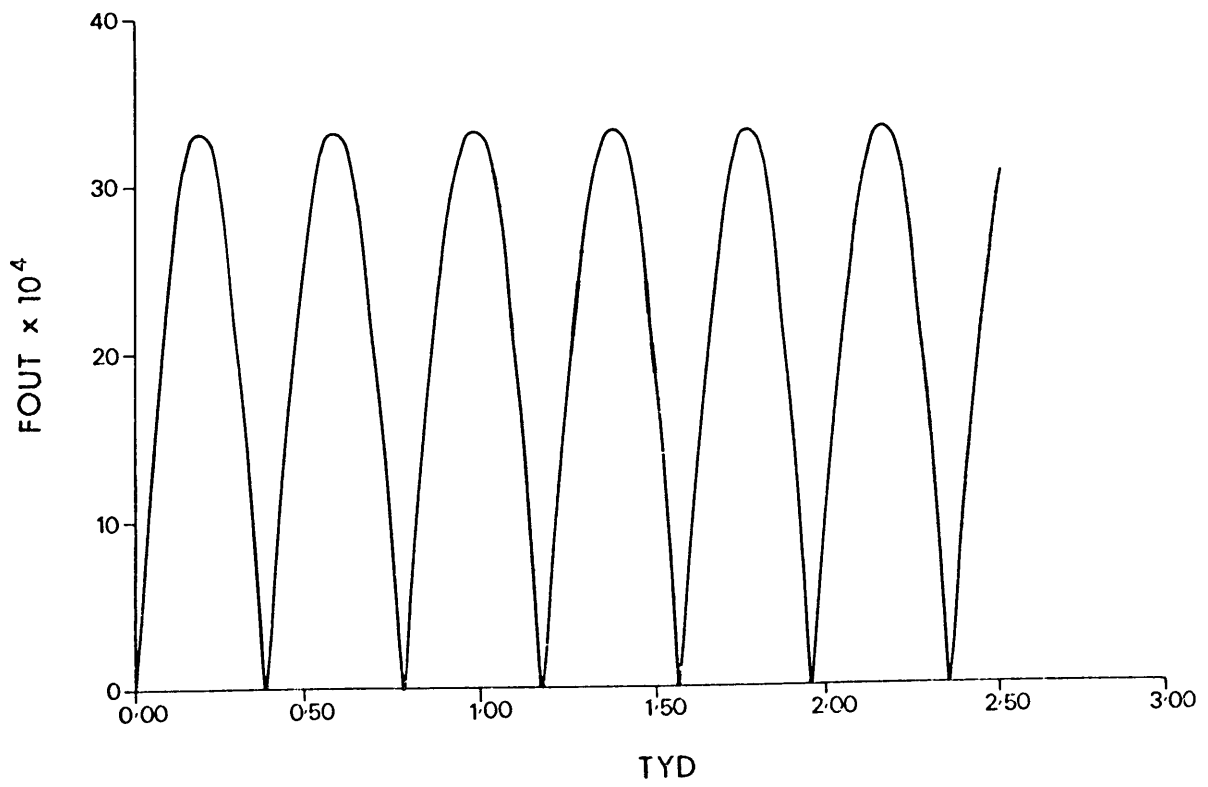
TABEL 3.7

T	x	u	$\ x - u\ $	$\ x - u\ _R$	$\ x - u\ _\infty^R$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
100h	,528965471 E-1	,528950376 E-1	1,5 E-6	2,6 E-5	3,6 E-6
200h	-,259626575	-,259628516	1,9 E-6	7,5 E-6	4,6 E-6
300h	-,414663700	-,414665691	2,0 E-6	4,8 E-6	4,8 E-6
400h	-,318171389	-,318173491	2,1 E-6	6,6 E-6	5,0 E-6
500h	-,286805831 E-1	-,286824943 E-1	1,9 E-6	6,7 E-5	4,6 E-6
600h	,278207480	,278206830	6,5 E-7	2,3 E-6	1,6 E-6
700h	,416338619	,416340476	1,9 E-6	4,5 E-6	4,6 E-6
800h	,301924338	,301928850	4,5 E-6	1,5 E-5	1,1 E-5
900h	,436680555 E-2	,437215953 E-2	5,4 E-6	1,2 E-3	1,3 E-5
1000h	-,295839573	-,295836611	3,0 E-6	1,0 E-5	7,2 E-6
1100h	-,416593636	-,416595769	2,1 E-6	5,1 E-6	5,0 E-6
1200h	-,284647590	-,284654798	7,2 E-6	2,5 E-5	1,7 E-5
1300h	-,199618648 E-1	-,199530820 E-1	8,8 E-6	4,4 E-4	2,1 E-5
1400h	,312462720	,312457752	5,0 E-6	1,6 E-5	1,2 E-5
1500h	,415427882	,415430698	2,8 E-6	6,8 E-6	6,7 E-6
1600h	,266400066	,266410229	1,0 E-5	3,8 E-5	2,4 E-5
1700h	-,442224562 E-1	-,442102944 E-1	1,2 E-5	2,8 E-4	2,9 E-5
1800h	-,328020230	-,328013582	6,6 E-6	2,0 E-5	1,6 E-5
1900h	-,412845333	-,412849236	3,9 E-6	9,5 E-6	9,1 E-6
2000h	-,247243998	-,247257347	1,3 E-5	5,4 E-5	3,1 E-5

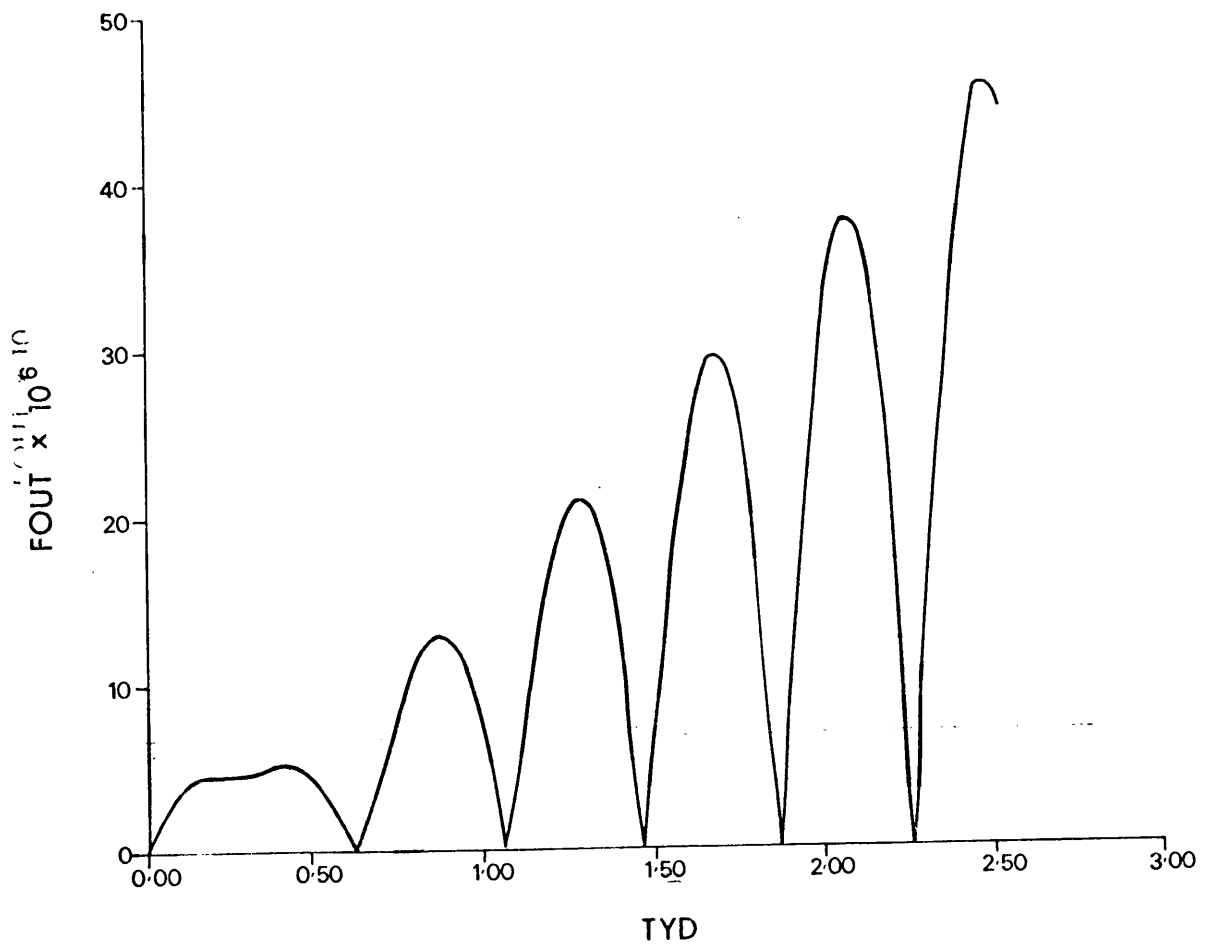


FIGUUR 3-4:  $x(t) = \frac{1}{3} \cos 8t - \frac{1}{4} \sin 8t$





FIGUUR 3.5A



FIGUUR 3.5B

### 3.7.1 Gevolgtrekkings aangaande numeriese resultate

Die numeriese resultate vir die Hermiet-polinome en lineêre Lagrange-polinome vergelyk baie goed met die analitiese oplossing. Met die Hermiet-polinome as basisfunksies kry ons byvoorbeeld na 1000 stappe dat

$$\| u - x \|_{\infty}^R = O(E-6)$$

$$\text{en } \| \dot{u} - \dot{x} \|_{\infty}^R = O(E-6)$$

Met die lineêre Lagrange-polinome geld na 2 500 stappe, dit wil sê na 2,5 sekondes, dat (kyk figuur 3.5 B).

$$\| u - x \|_{\infty}^R = O(E-5).$$

Die enkelstapmetode met lineêre basisfunksies lewer 'n ekonomiese metode met effektiewe resultate. Die stelsels (3.29) en (3.30) bestaan slegs uit 'n enkele algebraïese vergelyking wat rekursief opgelos word. Tensy daar dus spesifiek vir benaderde waardes van die afgeleides van die oplossing gesoek word, is dit voldoende om lineêre latte te gebruik.

Die enkelstapmetode is so aantreklik dat die vraag ontstaan of 'n soortgelyke metode nie veralgemeen kan word na tweedimensionale probleme en in besonder na evolusieprobleme nie? Hierdie vraag word in die volgende twee hoofstukke beantwoord.

## HOOFSTUK 4

### 'N NUWE GALERKIN-TIPE-METODE VIR PARABOLIESE PROBLEME

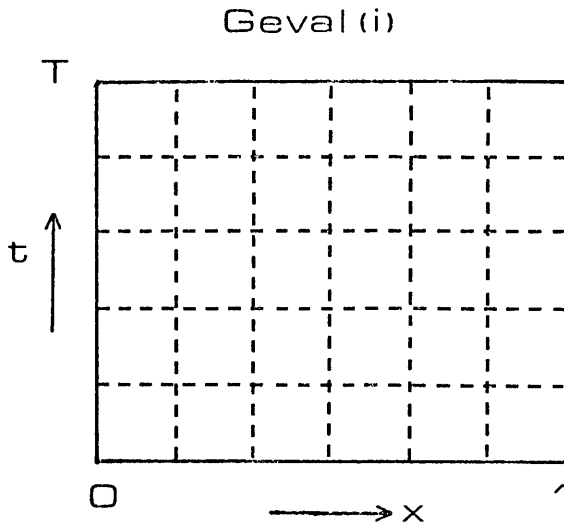
#### 4.1 EINDIGE-ELEMENT-METODES GELYKTYDIG TOEGEPAS IN RUIMTE EN TYD

##### 4.1.1 Inleiding

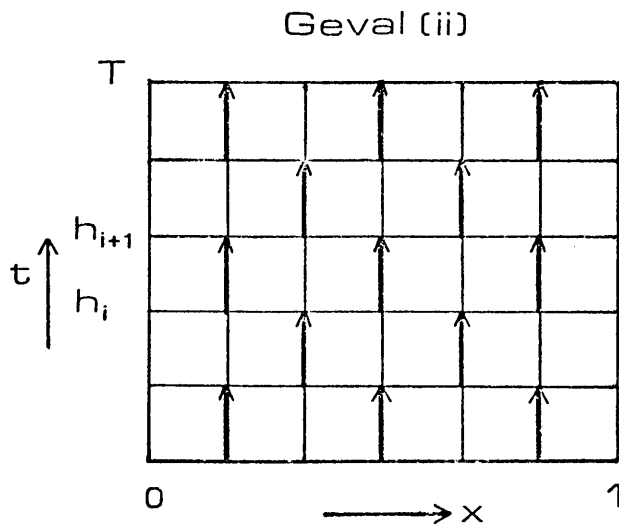
Fix en Strang [ 20 ] maak die opmerking dat eindige-element-metodes ook vir tydsveranderlike probleme gebruik kan word maar dat dié metodes nie veel sukses gehad het nie. Wiskundig is dit vir hulle aanvaarbaar dat daar in *twee stappe* gediskretiseer word naamlik met eindige-elemente in die *ruimte* en *daarna* met eindige-elemente in *tyd*. Alhoewel hulle geen meetkundige probleme voorsien, deur eindige-elemente in tyd te gebruik, verwag hulle dat die koppeling van alle tydsvlakke juis die voortplanting-in-tyd-eienskap van eindige-verskil-metodes sal vernietig. Hulle vermoed dus dat die *koppeling tussen opeenvolgende tydsvlakke* verloor sal word as die tydinterval "groot" of vergelykbaar is in verhouding met die ruimtelike afmetings. In hoofstuk 3 het ons egter met sukses eindige-element-metodes in tyd toegepas op een-dimensionale probleme deur 'n globale (koppeling van alle tydsvlakke) en 'n enkelstapmetode in tyd te beskou.

Die vraag kan nou gestel word tot watter mate die koppeling behou word indien in die geval van partiële differensiaal-vergelykings eindige-element-metodes in *ruimte en tyd gelyktydig* toegepas word maar waar die tydinterval "klein" is in verhouding met die ruimtelike afmetings?

Skematies kan ons die uiterste moontlikhede s6 voorstel:



Figuur 4.1: Eindige-element-metodes gelyktydig toegepas op die gebied  $[0,1] \times [0,T], T \gg 1$ .



Figuur 4.2: Eindige-element-metodes gelyktydig toegepas op  $[0,1] \times [h_i, h_{i+1}]$  waar  $\Delta h \ll 1, i=0,1,2,\dots$ .

Die idee van hierdie enkelstapmetode in ruimte en tyd volg uit die enkelstapmetode in tyd vir eendimensionale probleme in hoofstuk 3 bespreek.

Die eksplisiete vraag is nou tot watter mate sal die oplossing in geval (ii) verskil van dié vir geval (i)? As  $\Delta h$  klein genoeg is kan ons nie verwag dat tydskoppeling in geval (ii) tot 'n groot mate behoue sal bly nie? Dit sluit aan by die vraag wat ook deur Mitchell [31] gestel is: Kan variasiebeginselmetodes soos toegepas in die geval van ewewigstoestandprobleme suksesvol oorgedra word na evolusieprobleme? Ongelukkig, sê Mitchell, is die antwoord op hierdie oomblik (April 1976) nader aan nee as aan ja. Gedeeltelik is die doel van hierdie studie dus om meer gedetailleerde antwoorde op hierdie vrae te gee. Dit sal o.a. gedoen word deur gepaste numeriese eksperimente uit te voer.

Ter inleiding beskou ons nou van dié metodes wat reeds aangewend is om gelyktydig in ruimte en tyd eindige-elemente toe te pas. Metodes vir beide paraboliese en hiperboliese probleme sal beskou word alhoewel die ontwikkeling en toepassing van 'n nuwe metode in hierdie hoofstuk beperk sal wees tot paraboliese probleme.

#### 4.1.2 'n Metode van Sigillito [39]

Sigillito beskou die hittevergelyking gedefinieer op 'n gebied in die  $(x,t)$ -vlak. Hy benader die eksakte oplossing deur 'n funksie

$$\phi(x,t) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x,t)$$

met  $\phi_i$  'n versameling van  $n$  lineêr onafhanklike toetsfunksies. Die Rayleigh-Ritz-metode word dan gebruik om die optimale waardes van die  $c_i$ 's te bepaal. Die toetsfunksies  $\phi_i$  moet verkieslik, uit 'n teoretiese oogpunt, elemente van 'n volledige versameling wees. Vir numeriese oplossings maak dit egter nie veel saak of elemente uit 'n volledige versameling gebruik word nie. Sigillito pas sy metode nou toe deur die volgende randvoorwaarde-probleem te beskou:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad , \quad -\pi < x < \pi ; \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \cos x \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

As toetsfunksies word die polinome

$$\phi_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-2} t^{n-k}}{(2k-2)! (n-k)!} \quad , \quad n=1, \dots$$

gekies. Deur 10 toetsfunksies te gebruik, stem die numeriese resultate goed ooreen met die eksakte oplossings.

So byvoorbeeld is,

$$(a) \quad |u(0, 8\pi; 1) - u^*(0, 8\pi; 1)| = 1,4 \text{ E-5}$$

$$(b) \quad |u(0, 8\pi; 2) - u^*(0, 8\pi; 2)| = 6,2 \text{ E-5}$$

$$(c) \quad |u(0, 8\pi; 3) - u^*(0, 8\pi; 3)| = 5,7 \text{ E-4}$$

$$(d) \quad |u(0, 8\pi; 4) - u^*(0, 8\pi; 4)| = 3,1 \text{ E-3}$$

met  $u^*(x, t)$  die benaderde oplossing. Ons merk op dat vir  $t \geq 3$  verswak die resultate aansienlik en meer toetsfunksies sal gebruik moet word om 'n gegewe fout te handhaaf. Die toetsfunksies wat Sigillito beskou is oor die hele gebied

$[-\pi, \pi] \times [0, T]$  gedefinieer en verskil dus ietwat van die klassieke eindige-element-metodes. Dié metode kan ook beskou word as 'n voorbeeld van geval (i) in figuur 4.1.

#### 4.1.3 'n Metode van Mitchell [31]

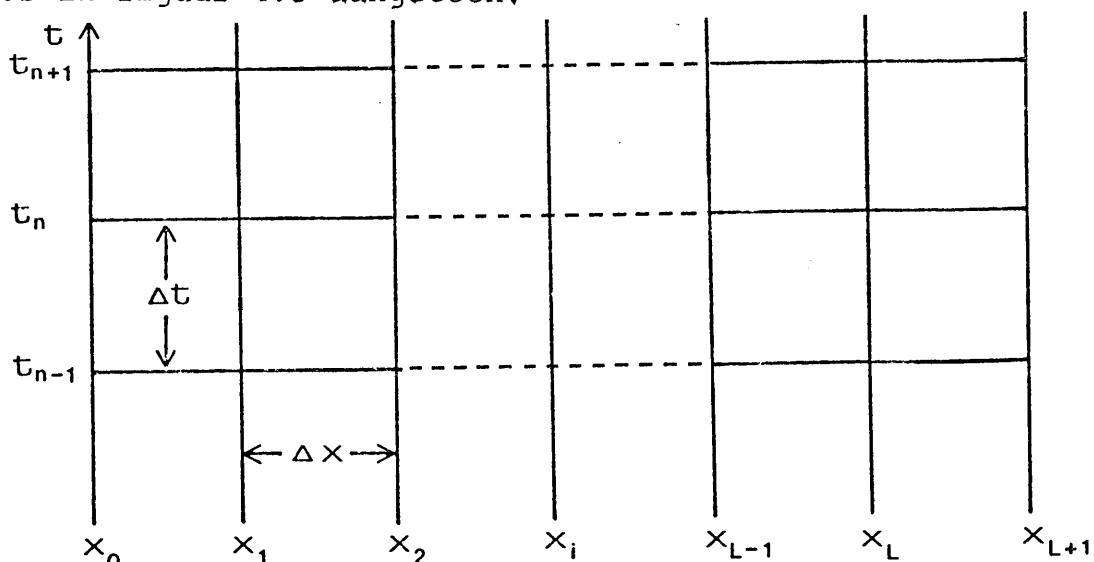
volgens Mitchell [31] is die grootste probleem met variasiebeginsels, wat vir evolusieprobleme gekonstrueer word, dat hulle langdradig en dikwels onmoontlik is om numeries tot uitvoer te bring. Selfs as dit moontlik is, is die metode funksioneel nie vergelykbaar met ander metodes nie. Mitchell beskou egter twee voorbeelde wat as uitsonderings beskou kan word:

##### 4.1.3.1 Die golfvergelyking [31]

Beskou

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= u_{xx} & , (x,t) \in [0,1] \times (0,T] \\
 u(0,t) &= u(1,t) = 0, & 0 \leq t \leq T \\
 u(x,0) &= f(x) \\
 \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) & \dots (4.1)
 \end{aligned}$$

Die gebied  $[0,1] \times [0,T]$  word in gelyke deelgebiede verdeel soos in figuur 4.3 aangetoon.



FIGUUR 4.3: Verdeling van gebied  $[0,1] \times [0,T]$



Hamilton se beginsel (§ 3.2) vereis dat die funksionaal

$$I_n(u) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^1 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dt \quad \dots (4.2)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N-1)$$

'n stasionêre waarde moet besit (nie noodwendig 'n ekstreem-waarde nie).

Die oplossing  $u$  van (4.2) word benader deur  $U$ , met

$$U(x, t) = \sum_{j=n-1}^{n+1} \sum_{i=1}^L \phi_{ij}(x, t) U_i^j, \quad n=1, \dots, N-1$$

waar  $U_i^j$  die benaderde oplossing by die roosterpunt  $(i\Delta x, j\Delta t)$  voorstel (kyk figuur 4.3).

Die waardes  $U_i^{n-1}, U_i^n$  ( $i=1, \dots, L$ ) moet bekend wees om die waardes  $U_i^{n+1}$  ( $i=1, \dots, L$ ) te bereken uit

$$\frac{\partial}{\partial U_j^n} I_n \left( \sum_{j=n-1}^{n+1} \sum_{i=1}^L \phi_{ij}(x, t) U_i^j \right) = 0, \quad i=1, \dots, L \quad \dots (4.3)$$

Aangesien daar egter met 'n beginvoorwaarde-probleem gewerk word, word  $U_i^{n-1}$  en  $U_i^n$  as gegee beskou en  $U_i^{n+1}$  word bereken uit (4.3). Die voortmarsjeer-in-tyd-proses word aan die gang gesit deur  $n=1$  te kies. Die beginvoorwaardes lewer dan  $U_i^0$  en  $U_i^1$  ( $i=1, \dots, L$ ) en die randvoorwaardes gee  $U_0^j$  en  $U_{L+1}^j$  ( $j=0, 1, 2$ ). Uit (4.3) word dan vir  $U_i^2$  ( $i=1, \dots, L$ ) opgelos en die proses word herhaal vir  $n=2, 3, \dots, N-1$ .

#### 4.1.3.2 Die hittevergelyking [31]

Beskou die vergelyking

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & , (x, t) \in [0, 1] \times (0, T] \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & , 0 < t < T \\ u(x, 0) &= f(x) & , 0 \leq x \leq 1. \dots (4.4) \end{aligned}$$

Deur die toegevoegde stelsel

$$-u_t^* = u_{xx}^* \quad , \quad (x,t) \in [0,1] \times (0,T]$$

$$u^*(0,t) = u^*(1,t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T$$

$$u^*(x,T) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

te implementeer reduseer Mitchell [31] die probleem (4.4) na die bepaling van 'n stasionêre waarde vir

$$I(u, u^*) = \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} u^* + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) dx dt$$

Die gebied word netsó verdeel soos by die golfvergelyking en gevolglik is

$$u^*(x,t) \approx U(x,t) = \sum_{j=n-1}^{n+1} \sum_{i=1}^L \phi_{ij}(x,t) U_i^j .$$

Mitchell [31] lewer geen kommentaar oor die numeriese implementering van hierdie metode by die golf- of hittevergelyking nie.

#### 4.1.4 'n Metode van Noble [35]

Laastens beskou ons 'n artikel van Noble [35] waarin hy beweer dat die meeste variasiebeginsels, vir beginvoorwaardeprobleme, slegs in die ruimteveranderlike gebruik word en dat die tydsveranderlike dan op 'n ad hoc basis ingevoer word. Andersins word variasiebeginsels in ruimte en tyd slegs gebruik vir die afleiding van 'n funksionaal wat stasionêr maar nie ekstreem is nie. Sodanige kwasivariasiebeginsels is wel bekend [19].

Noble [35] ondersteun die volgende dogmatiese siening van

Finlayson en Scriven [19]: "The applied scientist and engineer are better advised to turn immediately to direct approximate methods for their problems rather than search for or try to understand quasi-variational formulations and restricted variational principles ... there is no practical need for variational formulations of the sort examined".

Die doel van Noble se artikel is nou om 'n suiwer variasiebeginsel eindige-element-metode te ontwikkel wat geklassifiseer kan word as 'n stasionêre beginsel wat nie 'n ekstreembeginsel is nie.

Noble beskou óók die hittevergelyking naamlik:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\phi(0,t) = \phi(1,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

$$\phi(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \dots (4.5)$$

Die volgende funksionaal is stasionêr as  $\phi$  om die eksakte oplossing  $\phi$  varieer:

$$I(\phi) = \int_0^1 \int_0^T \left\{ c \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Psi \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} dt dx$$

$$- \int_0^1 f(x) \phi(x,t) dx \quad \dots (4.6)$$

met  $\Psi(x, T-t) = \phi(x,t)$  en  $\phi$  bevredig die essensiële randvoorwaardes in (4.5).

Stel as toetsfunksies

$$\phi(x,t) = \sum_{i=1}^n X_i(x) \phi_i(t) \quad \dots (4.7)$$

Vir die funksies  $X_i(t)$  word die lineêre hoof funksies geneem terwyl

$$\Phi_i(t) = \Phi_i(0) + b_i t \quad , \quad i=1, \dots, N. \dots (4.8)$$

gekies word met  $b_i$  'n willekeurige konstante.

Deur nou (4,7) en (4,8) in (4.6) te vervang en

$$\frac{\partial I}{\partial b_i} = 0$$

te stel vir  $i=1, \dots, n$ , word die volgende formule gevind wat  $\Phi(T)$  en  $\Phi(0)$  koppel:

$$\begin{aligned} & (1 + \mu)\phi_i(T) + \frac{1}{4}(1 - 2\mu) \{ \phi_{i+1}(T) + \phi_{i-1}(T) \} \\ & = (1 - 2\mu)\phi_i(0) + \frac{1}{4}(1 + 4\mu) \{ \phi_{i+1}(0) + \phi_{i-1}(0) \} \end{aligned}$$

met  $\mu = cT/h^2$ .

Hieruit kan vir  $\phi_i(T)$  opgelos word en deur die resultaat in (4,7) te vervang, verkry ons  $\Phi(x,T)$ .

Dieselfde benaderingsprosedure word deur Noble ook op die golfvergelyking toegepas. Die onderliggende idee in hierdie drie voorbeelde is om basis funksies te gebruik wat van die ruimte en tyd afhanklik is. Die tydsveranderlike word dus as 'n ekstra dimensie beskou en die ruimte-tyd-vlak word dan in deelgebiede verdeel.

Die vraag ontstaan nou of, in plaas daarvan om via variasiebeginsels hierdie probleme op te los, 'n Galerkin-prosedure nie nou direk op die partiële differensiaalvergelyking toegepas kan word nie? Hierdie idee word reeds deur Zienkiewicz

en Parekh [50] genoem sonder dat hul sover gaan om dit te gebruik. Die belangrike voordele van so 'n benadering bo die variasiebeginselmetode is:

1. Dit is nie nodig om 'n funksionaal te vind wat ekwivalent is aan die oorspronklike differensiaalvergelyking nie.
2. Die metode kan uitgebrei word na probleme waarvan die funksionaal nie bestaan of dalk nog nie gevind is nie.

Die volgende outeurs pas die metode in *verskillende vorms* toe op hoofsaaklik paraboliese probleme: Bruch en Zyvoloski [5], Cella en Cecchi [9], Van Niekerk [47] en Davies [12].

Hierdie metode waarin ons *gelyktydig in ruimte en tyd die Galerkin-metode* toepas, sal na verwys word as die GRTG-metode.

#### 4.1.5 Formulering van die GRTG-metode

Om die metode beter te kan beskryf gebruik ons 'n spesifieke differensiaalvergelyking in plaas van 'n algemene operator. Davies [12] beskou die hittevergelyking gedefinieer op 'n gebied  $D$  in die  $xy$ -vlak. Laat  $\partial D$  die rand van die gebied voorstel met  $C_1 \cup C_2 = \partial D$ .

Beskou nou

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{k} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{in } D \subset \mathbb{R}^2$$

met  $\phi = g(s, t)$ , op 'n deel  $C_1$  van  $\partial D$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \sigma(s, t)\phi = h(s, t), \text{ op 'n deel } C_2 \text{ van } \partial D$$

$$\text{en } \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y) \quad \dots (4.9)$$

Gestel dat die benadering in die xyt-ruimte gegee word deur

$$\phi = \sum_e \phi^e \quad \dots (4.10)$$

met 
$$\phi^e = N^e(x, y, t) \delta^e \quad \dots (4.11)$$

$N^e$  is die vormfunksie-matriks en  $\delta^e$  die verplasingvektor.

Die Galerkin-metode (2.24) en (2.35) lewer dan

$$\begin{aligned} & \int_0^T \iint_D (-\nabla^2 \phi + \frac{1}{k} \frac{\partial \phi}{\partial t}) n_i \, dx \, dy \, dt \\ & + \int_0^T \int_{C_1} (\phi - g) n_i \, ds \, dt + \int_0^T \int_{C_2} (\frac{\partial \phi}{\partial n} + \sigma \phi - h) n_i \, ds \, dt \\ & = 0 \quad \dots (4.12) \end{aligned}$$

Sonder verlies aan algemeenheid kan ons aanvaar dat  $g \equiv 0$  op  $C_1$ , dit wil sê,  $n_i \equiv 0$  op  $C_1$ . Deur toepassing van Green se stelling kan (4.12) dan geskryf word as:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \iint_D (\text{grad } n_i \cdot \text{grad } \phi + \frac{n_i}{k} \frac{\partial \phi}{\partial t}) \, dx \, dy \, dt \\ & + \int_0^T \int_{C_2} (\sigma \phi - h) \, ds \, dt \\ & = 0 \quad \dots (4.13) \end{aligned}$$

Deur (4.10) en (4.11) te vervang in (4.13) word die volgende stelsel algebraïese vergelykings verkry:

$$K \phi = F \quad \dots (4.14)$$

Die elemente van die matrikse  $K$  en  $F$  word verkry uit die volgende:

$$k_{ij}^e = \int_0^T \iint_{D^e} \left( -\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \frac{1}{k} N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial t} \right) dx dy dt$$

$$\bar{k}_{ij}^e = \int_0^T \int_{C_2^e} \sigma N_i^e N_j^e ds dt$$

$$\text{en } \bar{f}_i^e = \int_0^T \int_{C_2^e} h N_i^e ds dt$$

Uit (4.14) tesame met die rand- en beginvoorwaardes word 'n algoritme gevind om die oplossing op tydstip T te bereken. S6 kan dan stapsgewys in tyd voortbeweeg word tot by die verlangde tydstip. Davies [12] illustreer di6 metode deur die volgende voorbeeld:

Laat

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad , \quad 0 \leq x \leq 2, t > 0$$

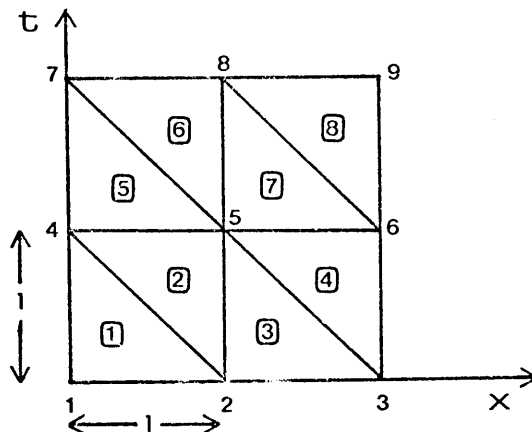
met

$$\phi(0, t) = t$$

$$\phi(2, t) = 2 + t$$

$$\text{en } \phi(x, 0) = \frac{x^2}{2}$$

Die gebied in die xt-vlak word s6 verdeel:



FIGUUR 4.4

Die gebied  $[0,1] \times [0,1]$  word in 4 driehoekige deelgebiede verdeel. Oor elk van die deelgebiede word daar nou eindige-

elemente van die vorm

$$\phi^e(x, t) = a_0 + a_1 x + a_2 t$$

gekies.

Laat

$$\begin{aligned} \phi^e &= N^e \delta^e \\ &= [L_1, L_2, L_3] \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \end{aligned}$$

Die vormfunksies  $L_i$  kan bereken word omdat  $L_i = \delta_{ij}$  by die  $j$ -de knooppunt en elke  $L_i$  lineêr in  $x$  en  $t$  is oor die deelgebied. Die stelsel (4.14) reduceer dan, vir die benaderde oplossing by  $\phi_5$ , na die enkele vergelyking

$$\begin{aligned} &(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}) \phi_2 + (0 - \frac{1}{6}) \phi_3 - \frac{1}{2} \phi_4 \\ &+ (\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}) \phi_5 - \frac{1}{3} \phi_6 = 0 \end{aligned}$$

Uit die rand- en beginvoorwaardes volg dat

$$\phi_3 = 2, \quad \phi_4 = 1, \quad \phi_6 = 3 \quad \text{en} \quad \phi_2 = \frac{1}{2}$$

waaruit dan volg dat  $\phi_5 = \frac{3}{2}$ .

Daar word nou na die volgende tydsvlak  $t=2$  beweeg waar vir  $\phi_8$  opgelos word. Dié prosedure word nou herhaal tot die gevraagde tydsvlak bereik word. Davies [12] maak dus van 'n enkelstapmetode in tyd gebruik deur basisfunksies op 'n driehoekige deelgebied te beskou.

In die nuwe vorm van die gelyktydige-ruimte-tyd-Galerkin-metode wat nou hier aangebied sal word (kyk ook Van Niekerk [47]), word die deelgebied in reghoeke verdeel. Aanvanklik is die benaderde oplossing globaal bereken [47]. Uit die



werk van hoofstuk 3 vir gewone differensiaalvergelykings (kyk ook Van Niekerk [45] en [46]), het die idee egter ontstaan om parsiële differensiaalvergelykings, met die gelyktydige-ruimte-tyd-Galerkin-metode, ook in enkelstappe in die tydriktigting op te los. Ons beskou nou twee paraboliese probleme wat met die nuwe vorm van die gelyktydige-ruimte-tyd-Galerkin-metode opgelos kan word. Ons sal in wat volg na dié metode verwys as die GRTG-metode.

#### 4.2 TOEPASSING VAN DIE GRTG-METODE OP DIE HITTEVERGELYKING

Ons ontwikkel nou 'n nuwe vorm van die GRTG-metode deur dit toe te pas op die volgende randvoorwaarde-probleem:

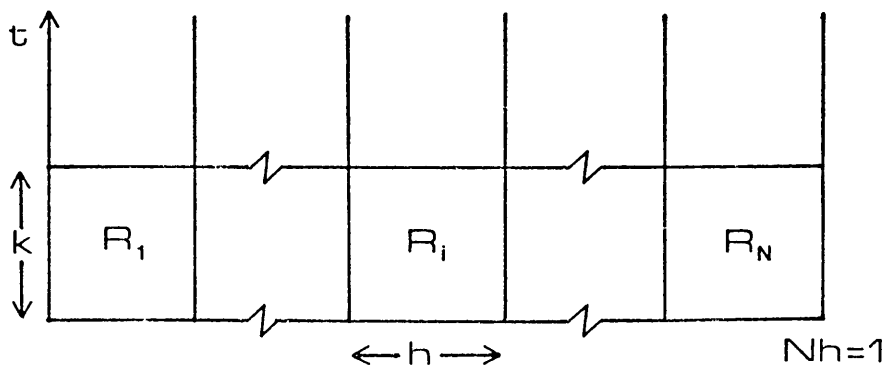
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad (x,t) \in [0,1] \times (0,T]$$

met  $u(x,0) = \sin \pi x \quad , \quad x \in [0,1]$   
 $u(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0$   
 en  $u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad \dots (4.14)$

Die eksakte oplossing van (4.14) word gegee deur

$$U(x,t) = \text{Exp}(-\pi^2 t) \cdot \sin \pi x$$

Die gebied  $[0,1] \times [0,T]$  in die  $xt$ -vlak word nou soos in figuur 4.5 aangetoon, in reghoekige deelgebiede verdeel:

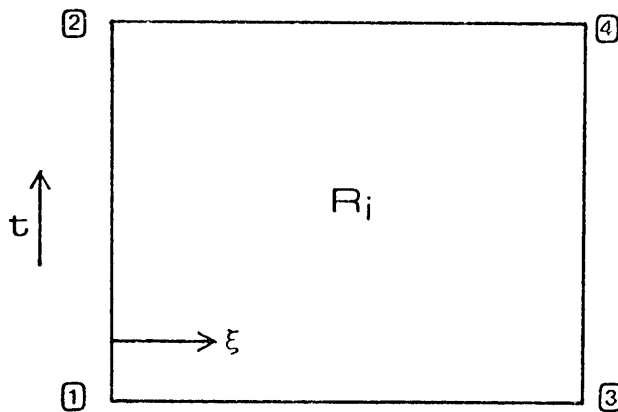


FIGUUR 4.5

#### 4.2.1 Keuse van basisfunksies

As basisfunksies gebruik ons funksies wat lineêr is in ruimte en tyd. Vir die berekening van hierdie funksies gebruik ons die volgende *notasie*:

Die hoekpunte van die deelgebied  $R_i$  word genommerr soos in figuur 4.6 aangetoon en  $u_1^{(i)}$ ,  $u_2^{(i)}$ ,  $u_3^{(i)}$  en  $u_4^{(i)}$  stel dan die oplossing by die hoekpunte 1, 2, 3 en 4 respektiewelik voor.



FIGUUR 4.6

Gerieflikheidshalwe bereken ons die basisfunksies eers in lokale koördinate naamlik

$$\xi = x - (i - 1)h.$$

As toetsfunksies  $u^i(\xi, t)$ , die benadering tot  $u(\xi, t)$  oor die gebied  $R_i$ , kies ons

$$\begin{aligned}
 u^i(\xi, t) &= \alpha_1^i + \alpha_2^i \xi + \alpha_3^i t + \alpha_4^i \xi t. \\
 &= [1 \quad \xi \quad t \quad \xi t] \underset{\sim}{\alpha}^i \quad \dots \quad (4.14.1)
 \end{aligned}$$

Definieer nou 'n vektor

$$\underline{u} = (u_1^i, u_2^i, u_3^i, u_4^i).$$

Die lokale knooppuntwaardes word gegee deur:

$$\begin{aligned} u^i(0,0) &= u_1^i &= \alpha_1^i \\ u^i(h,0) &= u_3^i &= \alpha_1^i + \alpha_2^i h \\ u^i(0,k) &= u_2^i &= \alpha_1^i + \alpha_3^i k \\ u^i(h,k) &= u_4^i &= \alpha_1^i + \alpha_2^i h + \alpha_3^i k + \alpha_4^i h k \end{aligned}$$

Dan word  $\underline{u}^i$  gegee deur die volgende matriksvergelyking waarin ons die boskrif  $i$  gerieflikheidshalwe weglaat:

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & 0 \\ 1 & h & k & hk \end{bmatrix} \underline{\alpha} \\ &= A \underline{\alpha} \end{aligned} \quad \dots (4.15)$$

en uit (4.14.1) volg dus

$$\underline{u} = [1 \quad \xi \quad t \quad \xi t] A^{-1} \underline{u}$$

Hieruit volg dan dat

$$\begin{aligned} u &= \left(1 - \frac{\xi}{h} - \frac{t}{k} + \frac{\xi t}{hk}\right) u_1 \\ &+ \left(\frac{\xi}{h} - \frac{\xi t}{hk}\right) u_3 + \left(\frac{t}{k} - \frac{\xi t}{hk}\right) u_2 \\ &+ \frac{\xi t}{hk} u_4 \\ &= \underline{N} \underline{u} \end{aligned}$$

Dus 
$$u^i = \sum_{j=1}^4 N_j^{(i)} u_j$$

met  $N_j^{(i)}$  vormfunksies en  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Indien ons nou  $\xi = x - (i-1)h$  vervang in die vormfunksies  $N_j^{(i)}$ , kry ons die vormfunksies in terme van  $x$  en  $t$  naamlik:

$$\begin{aligned}
 N_i^{(1)}(x,t) &= i - \frac{x}{h} - \frac{it}{k} + \frac{xt}{hk} \\
 N_i^{(2)}(x,t) &= \frac{it}{k} - \frac{xt}{hk} \\
 N_i^{(3)}(x,t) &= (1-i) + \frac{x}{h} + \frac{(i-1)t}{k} - \frac{xt}{hk} \\
 N_i^{(4)}(x,t) &= \frac{(1-i)t}{k} + \frac{xt}{hk} \qquad \dots(4.15.1)
 \end{aligned}$$

Met behulp van hierdie vormfunksies definieer ons nou die basisfunksies oor die gebied  $[0,1] \times [0,k]$  soos volg:

$$\phi_{2i-1}(x,t) = \begin{cases} N_i^{(3)}(x,t) & , (x,t) \in R_i \\ N_{i+1}^{(1)}(x,t) & , (x,t) \in R_{i+1} \\ 0 & , \text{andersins} \end{cases}$$

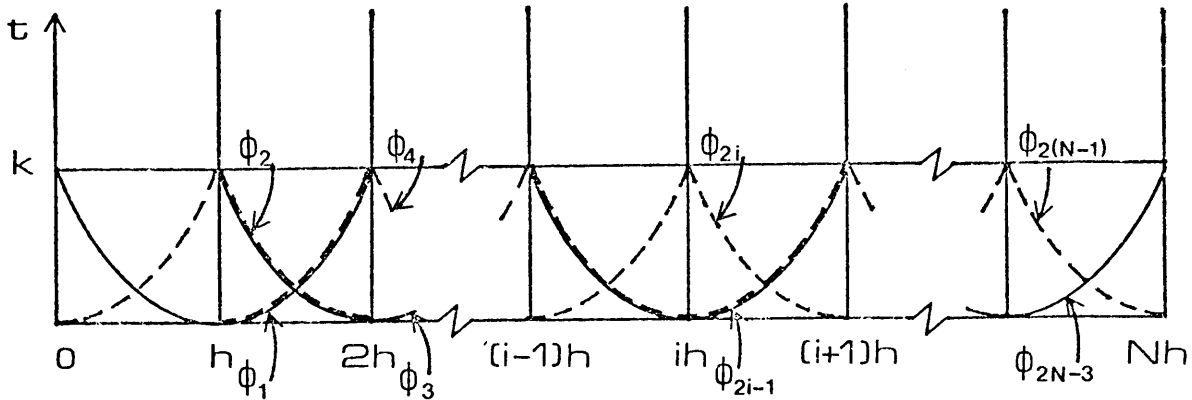
Uit (4.15.1) volg, vir  $i = 1, \dots, N-1$

$$\phi_{2i-1}(x,t) = \begin{cases} (1-i) + \frac{x}{h} + \frac{(i-1)t}{k} - \frac{xt}{hk} & , R_i \\ (1+i) - \frac{x}{h} - \frac{(1+i)t}{k} + \frac{xt}{hk} & , R_{i+1} \\ 0 & , \text{andersins} \end{cases} \dots(4.15.2)$$

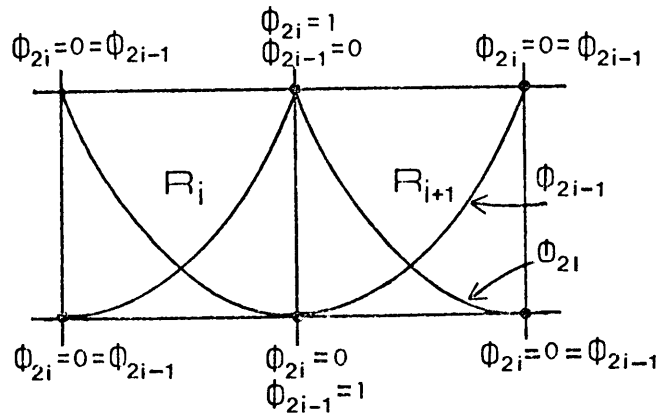
$$\phi_{2i}(x,t) = \begin{cases} N_i^{(4)}(x,t) & , (x,t) \in R_i \\ N_{i+1}^{(2)}(x,t) & , (x,t) \in R_{i+1} \\ 0 & , \text{andersins} \end{cases}$$

$$\phi_{2i}(x,t) = \begin{cases} \frac{(1-i)t}{k} + \frac{xt}{hk} & , R_i \\ \frac{(1+i)t}{k} - \frac{xt}{hk} & , R_{i+1} \\ 0 & , \text{andersins} \end{cases} \dots(4.15.3)$$

Skematies kan ons die basisfunksies s6 voorstel:

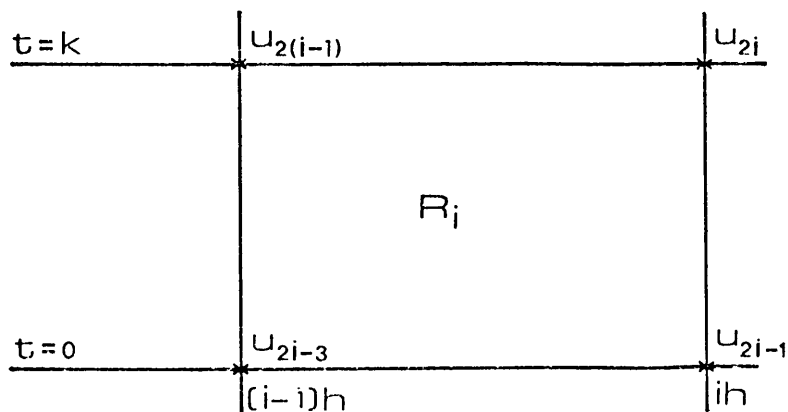


FIGUUR 4.7: Voorstelling van basisfunksies. Die sleutel tot hierdie diagram word in figuur 4.8 gegee.



FIGUUR 4.8

Die benaderde oplossing van (4.14) - by die globale knooppunte - word deur  $u_j$  voorgestel soos in figuur 4.9 aangetoon:



FIGUUR 4.9: Benaderde oplossing by knooppunte.

#### 4.2.2 Die GRTG-metode

Met hierdie basisfunksies pas ons nou die Galerkin-metode gelyktydig in ruimte en tyd toe op die hittevergelyking (4.14) oor die strook  $[0,1] \times [0,k]$ .

Laat  $u^*(x,t)$  die benaderde oplossing van die randwaardeprobleem wees en laat  $u^*(x,t)$  'n element van die deelruimte voortgebring deur die basisfunksies  $\phi_i$ ,  $i=1, \dots, 2(N-1)$  wees. Dan is

$$u(x,t) \approx u^*(x,t) = \sum_{j=1}^{2(N-1)} u_j \phi_j(x,t) \quad \dots (4.16)$$

met  $u_j$  die globale knooppuntwaardes en  $(x,t) \in [0,1] \times [0,k]$ .

Die basisfunksies bevredig die homogene randvoorwaardes en derhalwe bevredig  $u^*(x,t)$  ook dié voorwaardes.

Die Galerkin-benadering  $u^*(x,t)$  word nou gedefinieer deur die stelsel

$$(u_t^* - u_{xx}^*, \phi_i) = 0, \quad i=1, \dots, 2(N-1) \quad \dots (4.17)$$

$$\text{met } (f,g) = \int_0^k \int_0^1 f \cdot g \, dx \, dt$$

Deur (4.16) in (4.17) te vervang word die stelsel

$$\sum_{j=1}^{2(N-1)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \phi_i \right) u_j - \sum_{j=1}^{2(N-1)} \left( \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2}, \phi_i \right) u_j = 0, \quad i=1, \dots, 2(N-1).$$

Maar

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2}, \phi_i \right) &= \int_0^k \int_0^1 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \cdot \phi_i \, dx \, dt \\
 &= \int_0^k \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i \right]_0^1 dt - \int_0^k \int_0^1 \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \, dx \, dt \\
 &= - \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

want  $\phi_i(0, t) = \phi_i(1, t) = 0$ .

Die Galerkin-benadering reduceer dan na die volgende stelsel:

$$\sum_{j=1}^{2(N-1)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \phi_i \right) u_j + \sum_{j=1}^{2(N-1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_j, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i \right) u_j = 0 \quad \dots (4.18)$$

met  $i = 1, \dots, 2(N-1)$

Uit die beginvoorwaardes word die waardes van  $u_1 = u(h, 0)$ ,  $u_3 = u(2h, 0)$ ,  $\dots$ ,  $u_{2N-3} = u(\overline{N-1}h, 0)$  bereken. In die stelsel (4.18) het ons dus net  $(N-1)$  onbekendes naamlik  $u_2 = u(h, k)$ ,  $u_4 = u(2h, k)$ ,  $\dots$ ,  $u_{2(N-1)} = u(\overline{N-1}h, k)$  en derhalwe word die binneprodukte net met die  $(N-1)$  basisfunksies  $\phi_2, \phi_4, \dots, \phi_{2(N-1)}$  geneem. Hierdie basisfunksies word gekies omdat hulle die funksies is wat by  $t = k$  die waarde 1 in die knooppunte aanneem. Die stelsel (4.18) reduceer dan na 'n  $(N-1) \times (N-1)$  stelsel waaruit opgelos moet word vir  $u_2, u_4, \dots, u_{2(N-1)}$ . Die volgende matriksvergelyking word nou verkry:

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{B} \underline{v} \quad \dots (4.19)$$

Met

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t}, \phi_2\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial \phi_{2(N-1)}}{\partial t}, \phi_2\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t}, \phi_{2(N-1)}\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial \phi_{2(N-1)}}{\partial t}, \phi_{2(N-1)}\right) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_2, \frac{\partial}{\partial x} \phi_2\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2(N-1)}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_2\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_2, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2(N-1)}\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2(N-1)}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2(N-1)}\right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_1, \phi_2\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2N-3}, \phi_2\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_1, \phi_{2(N-1)}\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2N-3}, \phi_{2(N-1)}\right) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_1, \frac{\partial}{\partial x} \phi_2\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2N-3}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_2\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_1, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2(N-1)}\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2N-3}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2(N-1)}\right) \end{bmatrix}$$

$$u = (u_2, u_4, \dots, u_{2(N-1)})^t,$$



en  $\underline{y} = (u_1, u_3, \dots, u_{2N-3})^t$ .

Die binneprodukte in matrikse A en B word deur die volgende vergelykings gegee:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell-1}, \phi_{2\ell}\right) = -\frac{h}{3}, \quad \ell=1, \dots, (N-1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell-1}, \phi_{2\ell+2}\right) = -\frac{h}{12}, \quad \ell=1, \dots, (N-2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell+1}, \phi_{2\ell}\right) = -\frac{h}{12}, \quad \ell=1, \dots, (N-2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell}, \phi_{2\ell}\right) = \frac{h}{3}, \quad \ell=1, \dots, (N-1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell}, \phi_{2\ell+2}\right) = \frac{h}{12}, \quad \ell=1, \dots, (N-2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell}, \phi_{2\ell-2}\right) = \frac{h}{12}, \quad \ell=1, \dots, (N-2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell+3}, \phi_{2\ell}\right) = 0, \quad \ell=1, \dots, (N-3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_i, \phi_j\right) = 0, \quad |i-j| \geq 4$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}\right) = \frac{k}{3h}, \quad \ell=1, \dots, (N-1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}\right) = \frac{2k}{3h}, \quad \ell=1, \dots, (N-1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell+1}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}\right) = -\frac{k}{6h}, \quad \ell=1, \dots, (N-2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell-2}\right) = -\frac{k}{3h}, \quad \ell=1, \dots, (N-1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell+2}\right) = -\frac{k}{6h}, \quad \ell=1, \dots, (N-2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_i, \frac{\partial}{\partial x} \phi_j\right) = 0, \quad |i-j| \geq 4.$$

Die matriks A in (4.19) is dus 'n bandmatriks met bandwydte drie. Uit die stelsel (4.19) los ons op vir  $u_2, u_4, \dots, u_{2(N-1)}$ . Dié waardes kan dan gebruik word as beginvoorwaardes  $u_1, u_3, \dots, u_{2N-3}$  om die oplossing vir die volgende tydsinterval te bereken. Ons kry dus 'n voortmarsjeer-in-tydskema naamlik:

$$A \tilde{u}^i = B \tilde{u}^{i-1}, \quad i=1,2,\dots \dots (4.20)$$

wat herhaaldelik opgelos word tot die verlangde tydstip bereik is.

Alhoewel die eksakte oplossing van die probleem (4.14) bekend is, vergelyk ons ook die resultate van die GRTG-Metode met die resultate van die eindige-verskil Crank-Nicolson-metode [1].

#### 4.2.3 Numeriese resultate

Numeriese oplossings bereken deur middel van die nuwe GRTG-metode en die tradisionele Crank-Nicolson-metode (kyk Bylaag C), word uiteengesit in tabelle 4.1 en 4.2.

Die volgende norm word in die tabelle gebruik:

$$\| u - u^* \| = | u(x,t) - u^*(x,t) | / | u(x,t) |$$

met  $u(x,t)$  en  $u^*(x,t)$  die eksakte en benaderde oplossings respektiewelik.

TABEL 4.1

## GRTG - METODE

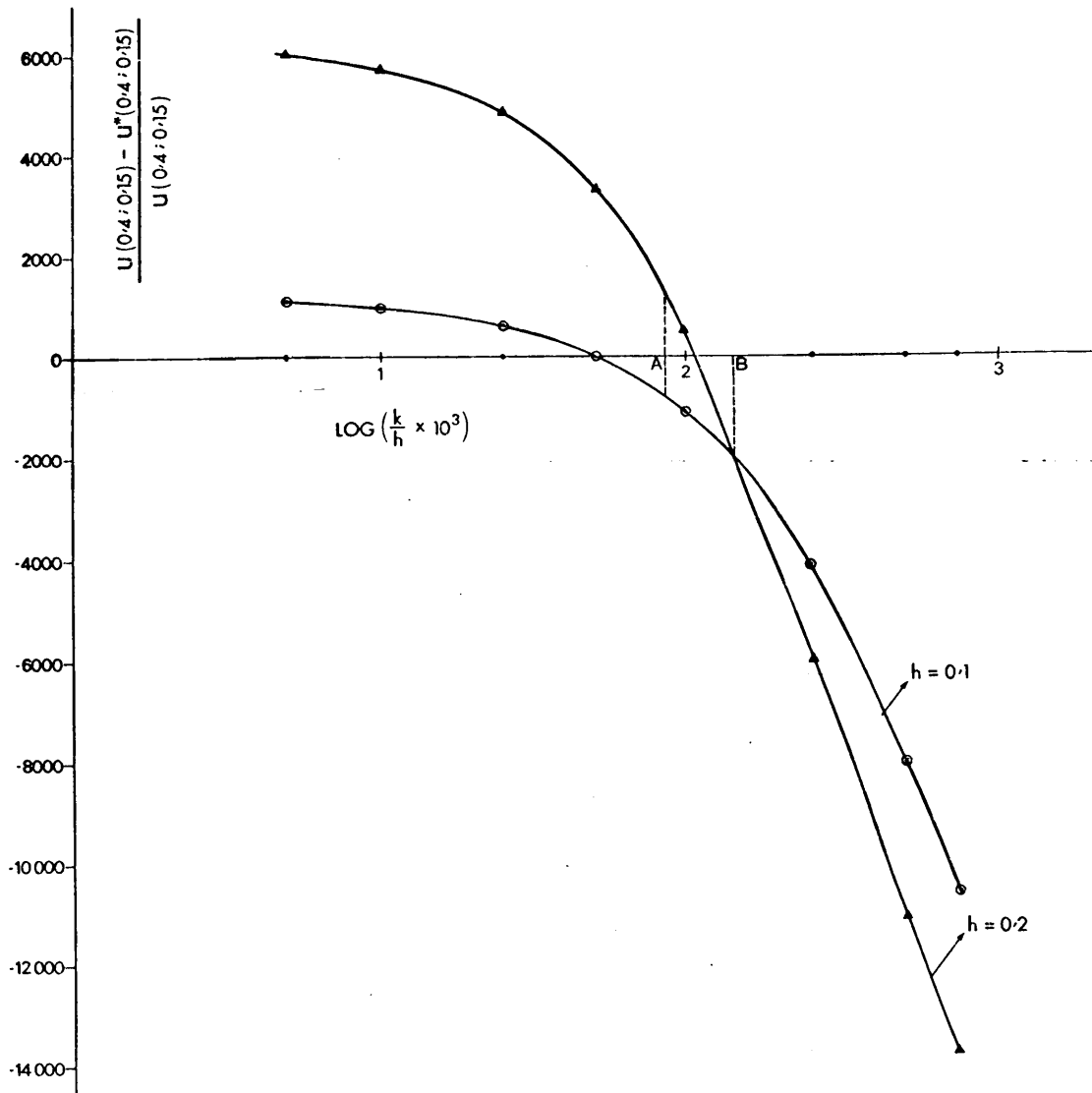
		h = 0,1; k = 0,01		h = 0,1; k = 0,005	
t	u(0,5; t)	u*(0,5; t)	u - u*	u*(0,5; t)	u - u*
0	1,0	1,0	0	1,0	0
,05	0,610498	0,612733	3,7 E-3	0,610449	8,0 E-5
,10	0,372708	0,375442	7,3 E-3	0,372648	1,6 E-4
,15	0,227537	0,230045	1,1 E-2	0,227483	2,4 E-4
,20	0,138911	0,140956	1,4 E-2	0,138867	3,2 E-4
,25	0,848050 E-1	0,863686 E-1	1,8 E-2	0,847710 E-1	4,0 E-4
,30	0,517733 E-1	0,529209 E-1	2,2 E-2	0,517484 E-1	4,8 E-4
,35	0,316075 E-1	0,324264 E-1	2,6 E-2	0,315898 E-1	5,6 E-4
,40	0,192963 E-1	0,198687 E-1	3,0 E-2	0,192839 E-1	6,4 E-4
,45	0,117803 E-1	0,121742 E-1	3,3 E-2	0,117719 E-1	7,1 E-4
,50	0,719188 E-2	0,745954 E-2	3,7 E-2	0,718613 E-2	8,0 E-4
		h = 0,05; k = 0,01		h = 0,05; k = 0,005	
t	u(0,5; t)	u*(0,5; t)	u - u*	u*(0,5; t)	u - u*
0	1,0	1,0	0	1,0	0
,05	0,610498	0,614552	6,6 E-3	0,612288	2,9 E-3
,10	0,372708	0,377674	1,3 E-2	0,374897	5,9 E-3
,15	0,227537	0,232101	2,0 E-2	0,229545	8,8 E-3
,20	0,138911	0,142638	2,7 E-2	0,140548	1,2 E-2
,25	0,848050 E-1	0,876585 E-1	3,4 E-2	0,860558 E-1	1,5 E-2
,30	0,517733 E-1	0,538707 E-1	4,0 E-2	0,526909 E-1	1,8 E-2
,35	0,316075 E-1	0,331064 E-1	4,7 E-2	0,322620 E-1	2,1 E-2
,40	0,192963 E-1	0,203456 E-1	5,4 E-2	0,197537 E-1	2,4 E-2
,45	0,117803 E-1	0,125034 E-1	6,1 E-2	0,120949 E-1	2,8 E-2
,50	0,719188 E-2	0,768401 E-2	6,8 E-2	0,740559 E-2	3,0 E-2

TABEL 4.1 (vervolg)

## GRTG-METODE

t	u(0,4; t)	h = 0,2; k = 0,01		h = 0,2; k = 0,0025	
		u*(0,4; t)	u - u*	u*(0,4; t)	u - u*
0	0,951057	0,951057	0	0,951057	0
0,05	0,580618	0,575797	8,3 E-3	0,572369	1,4 E-2
0,10	0,354466	0,348604	1,7 E-2	0,344466	2,8 E-2
0,15	0,216401	0,211055	2,5 E-2	0,207308	4,2 E-2
0,20	0,132112	0,127779	3,3 E-2	0,124763	5,6 E-2
0,25	0,806543 E-1	0,773611 E-1	4,1 E-2	0,750855 E-1	6,9 E-2
0,30	0,492393 E-1	0,468367 E-1	4,9 E-2	0,451883 E-1	8,2 E-2
0,35	0,300605 E-1	0,283563 E-1	5,7 E-2	0,271954 E-1	9,5 E-2
0,40	0,183519 E-1	0,171677 E-1	6,5 E-2	0,163669 E-1	1,1 E-1
0,45	0,112039 E-1	0,103938 E-1	7,2 E-2	0,985000 E-2	1,2 E-1
0,50	0,683989 E-2	0,629273 E-2	8,0 E-2	0,592797 E-2	1,3 E-1

In tabel 4.1 merk ons op dat vir  $h = 0,2$  en  $k = 0,0025$  die relatiewe fout groter is as in die geval waar  $h = 0,2$  en  $k = 0,01$ . Om hierdie verskynsel te ondersoek, het ons vir 'n vaste waarde van  $h$  die tydsinterval  $k$  al hoe kleiner gekies. In figuur 4.10 volg die grafiese voorstelling van hierdie resultate vir twee waardes van  $h$ , naamlik  $h = 0,1$  en  $h = 0,2$ .



FIGUUR 4.10: Verband tussen die fout en  $h$

TABEL 4.2

CRANK-NICOLSON-METODE (Eindige-verskil)

		h = 0,1; k = 0,01		h = 0,1; k = 0,005	
t	u(0,5; t)	u*(0,5; t)	u - u*	u*(0,5; t)	u - u*
0	1,0	1,0	0	1,0	0
0,05	0,610498	0,612733	3,7 E-3	0,612913	4,0 E-3
0,10	0,372708	0,375442	7,3 E-3	0,375662	7,9 E-3
0,15	0,227537	0,230045	1,1 E-2	0,230248	1,2 E-2
0,20	0,138911	0,140956	1,4 E-2	0,141122	1,6 E-2
0,25	0,848050 E-1	0,863686 E-1	1,8 E-2	0,864955 E-1	2,0 E-2
0,30	0,517733 E-1	0,529209 E-1	2,2 E-2	0,530142 E-1	2,4 E-2
0,35	0,316075 E-1	0,324264 E-1	2,6 E-2	0,324930 E-1	2,8 E-2
0,40	0,192963 E-1	0,198687 E-1	3,0 E-2	0,199154 E-1	3,2 E-2
0,45	0,117803 E-1	0,121742 E-1	3,3 E-2	0,122064 E-1	3,6 E-2
0,50	0,719188 E-2	0,745954 E-2	3,7 E-2	0,748147 E-2	4,0 E-2
		h = 0,05; k = 0,01		h = 0,05 k = 0,005	
t	u(0,5; t)	u*(0,5; t)	u - u*	u*(0,5; t)	u - u*
0	1,0	1,0	0	1,0	0
0,05	0,610498	0,610874	6,2 E-04	0,611056	9,1 E-04
0,10	0,372708	0,373167	1,2 E-03	0,373390	1,8 E-03
0,15	0,227537	0,227958	1,9 E-03	0,228162	2,7 E-03
0,20	0,138911	0,139253	2,5 E-03	0,139420	3,7 E-03
0,25	0,848050 E-1	0,850662 E-1	3,1 E-03	0,851935 E-1	4,6 E-03
0,30	0,517733 E-1	0,519647 E-1	3,7 E-03	0,520580 E-1	5,5 E-03
0,35	0,316075 E-1	0,317439 E-1	4,3 E-03	0,318104 E-1	6,4 E-03
0,40	0,192963 E-1	0,193915 E-1	4,9 E-03	0,194380 E-1	7,3 E-03
0,45	0,117803 E-1	0,118458 E-1	5,6 E-03	0,118777 E-1	8,3 E-03
0,50	0,719188 E-2	0,723626 E-2	6,2 E-03	0,725794 E-2	9,2 E-03

TABEL 4.2 (vervolg)

CRANK-NICOLSON-METODE (Eindige-verskil)

$h = 0,2; k = 0,01$			
$t$	$u(0,4; t)$	$u^*(0,4; t)$	$\  u - u^* \ $
0	0,951057	0,951057	0
0,05	0,580618	0,589782	1,6 E-2
0,10	0,354466	0,365743	3,2 E-2
0,15	0,216401	0,226810	4,8 E-2
0,20	0,132112	0,140652	6,5 E-2
0,25	0,806543 E-1	0,872231 E-1	8,1 E-2
0,30	0,492393 E-1	0,540900 E-1	9,9 E-2
0,35	0,300605 E-1	0,335430 E-1	1,2 E-1
0,40	0,183519 E-1	0,208011 E-1	1,3 E-1
0,45	0,112039 E-1	0,128995 E-1	1,5 E-1
0,50	0,683989 E-2	0,799939 E-2	1,7 E-1

#### 4.2.4 Bespreking van numeriese resultate

Aangesien die koëffisiëntmatriks  $A$  in die stelsel (4.20) 'n bandstruktuur het, naamlik 'n bandwydte van drie, kan die stelsel met 'n ekonomiese prosedure opgelos word.

Die GRTG-metode en die Crank-Nicolson-metode lewer vir die keuse van die parameters  $h = 0,1$  en  $k = 0,01$  dieselfde benaderde oplossings. Die rede hiervoor is dat die twee metodes, vir hierdie besondere keuse van die parameters, presies dieselfde stelsels lewer waaruit die benaderde oplossings bereken word. Die numeriese resultate is besonder akkuraat. Daar is byvoorbeeld na 0,5 sekondes (50 stappe) by die punt  $x = \frac{1}{2}$  slegs 0,7% van die aanvangstemperatuur aanwesig terwyl die relatiewe fout 3,7 E-2 is.

Vir dieselfde keuse van die parameters  $h$  en  $k$  lewer die GRTG-metode en die Crank-Nicolson-metode telkens dieselfde orde stelsels om op te los. Ons vergelyk dus die resultate soos volg:

(i)  $h = 0,2$  en  $k = 0,01$

Die *GRTG-metode* lewer resultate wat akkurater is as die Crank-Nicolson-resultate met 'n faktor van ongeveer 2.

(ii)  $h = 0,1$  en  $k = 0,005$

Die *GRTG-metode* lewer resultate wat akkurater is as die Crank-Nicolson-resultate met 'n faktor van ongeveer 50.

(iii)  $h = 0,05$  en  $k = 0,01$

Die *Crank-Nicolson-resultate* is nou akkurater met 'n faktor van ongeveer 10.

(iv)  $h = 0,05$  en  $k = 0,005$

Die *Crank-Nicolson-resultate* is akkurater as die GRTG-resultate met 'n faktor van ongeveer 3.

Die eksperimentele resultate van die studie toon duidelik aan dat die nuwe GRTG-metode nie net 'n betroubare maar ook 'n funksioneel praktiese metode is. *In besonder vertoon die GRTG-metode vir 'n relatief growwe verdeling van die interval  $[0,1]$  beter as die Crank-Nicolson-metode. Hierdie eienskap is voordelig in die sin dat die orde van die koëffisiëntmatriks  $A$  dus "klein" geneem kan word.*

Uit figuur 4.10 volg dat indien  $h$  vas gekies word en  $k$  al hoe kleiner geneem word, sal die relatiewe fout vanaf 'n "groot"



negatiewe waarde afneem totdat die fout van teken verander. Vir die punt  $(0,4; 0,15)$ , in die  $xt$ -vlak, beteken dit dus dat die benaderde oplossing in dié punt aanvanklik groter is as die eksakte oplossing in die punt. As  $k$  verder verklein word sal die benaderde oplossing kleiner as die eksakte oplossing in die punt wees. Uiteindelik sal die benaderde oplossing dus die eksakte oplossing van onder of nader.

'n Ander interessante verskynsel wat uit figuur 4.10 volg, is dat die benadering met  $h = 0,2$  akkurater is as die benadering met  $h = 0,1$  in die interval.

$$A \leq \log\left(\frac{k}{h} \times 10^3\right) \leq B.$$

Dit beteken dus dat in 'n omgewing van  $\frac{k}{h} = 0,1$  is die benadering met  $h = 0,2$  akkurater as dié met  $h = 0,1$ . Verder staaf dit dus die bewering dat die GRTG-metode vir 'n growwe verdeling van die interval  $[0,1]$  kompeterende resultate lewer.

Uit hierdie grafiek blyk ook dat indien  $\frac{k}{h}$  in die interval  $[0,01; 0,25]$  geneem word, verkry ons benaderings waarvoor, vir die relatiewe fout, geld dat

$$- 12 \times 10^{-2} \leq \frac{u(0,4; 0,15) - u^*(0,4; 0,15)}{u(0,4; 0,15)} \leq 4,8 \times 10^{-2}$$

Ten slotte kan ons dus sê dat die GRTG-metode met groot sukses op die hittevergelyking toegepas kan word. In die volgende paragraaf pas ons nou die GRTG-metode op 'n geleiding-diffusie-probleem toe.

### 4.3 TOEPASSING VAN DIE GRTG-METODE OP 'N GELEIDING-DIFFUSIE-PROBLEEM

Die volgende vergelyking lewer 'n geskikte model vir fisiese verskynsels wat geleiding- en diffusie-effekte bevat:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon > 0, \delta > 0$$

met  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)$ .

Die beginvoorwaarde is deurgaans van die vorm

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1)$$

maar drie verskillende moontlike randvoorwaardes word beskou, naamlik:

- (a) Homogene Dirichlet-voorwaardes
- (b) Periodiese voorwaardes
- (c) Neumann-voorwaardes

Die numeriese behandeling van hierdie probleem word deur Mitchell en Griffiths [33] asook Griffiths [24] ondersoek deur van die semi-diskrete-Galerkin-metode (kyk § 2.5.3) gebruik te maak. Ons beskou nou die numeriese oplossings van hierdie probleme met behulp van die GRTG-metode.

#### 4.3.1 Dirichlet-randvoorwaardes

Ons beskou nou die randvoorwaarde-probleem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon > 0, \delta > 0 \quad \dots (4.21)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1) \quad \dots (4.22)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad \dots (4.23)$$

Die gebied  $(0,1) \times (0,T)$  in die  $xt$ -vlak word soos in § 4.2 in reghoekige deelgebiede verdeel,

Laat

$$\pi_h: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$$

$$\text{en } \pi_k: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$$

die verdelings op die  $x$ - en  $t$ -asse respektiewelik voorstel. Gestel verder dat

$$x_i - x_{i-1} = h$$

$$\text{en } t_i - t_{i-1} = k \text{ vir alle } i.$$

Die oplossing  $u(x,t)$  word weer benader deur 'n lineêre kombinasie van geskikte basisfunksies. Ons neem hier dieselfde basisfunksies as dié in § 4.2. Ons kies dus die volgende basisfunksies wat lineêr is in ruimte en tyd:

$$\phi_{2i-1}(x,t) = \begin{cases} (1-i) + \frac{x}{h} + \frac{(i-1)t}{k} - \frac{xt}{hk}, & R_i \\ (1+i) - \frac{x}{h} - \frac{(1+i)t}{k} + \frac{xt}{hk}, & R_{i+1} \\ 0, & \text{andersins} \end{cases}$$

$$\phi_{2i}(x,t) = \begin{cases} \frac{(1-i)t}{k} + \frac{xt}{hk}, & R_i \\ \frac{(i+1)t}{k} - \frac{xt}{hk}, & R_{i+1} \\ 0, & \text{andersins} \end{cases}$$

Gestel nou dat

$$u(x,t) \approx u^*(x,t) = \sum_{j=1}^{2(N-1)} u_j \phi_j(x,t) \quad \dots (4.24)$$

Die basisfunksies beyredig die homogene randvoorwaardes (4.23) en derhalwe bevredig  $u^*(x,t)$  ook dié voorwaardes.

Die Galerkin-benadering  $u^*(x,t)$  word nou bepaal deur die stelsel

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}, \phi_i\right) = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}, \phi_i\right) - \delta \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}, \phi_i\right), \quad i=2,4,\dots,2(N-1) \dots (4.25)$$

Maar

$$\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}, \phi_i\right) = -\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right)$$

dus (4.25) word

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}, \phi_i\right) = -\varepsilon \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right) - \delta \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}, \phi_i\right) \dots (4.26)$$

Vervang (4.24) in (4.26) dan is

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2(N-1)} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial t}, \phi_i\right) u_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{2(N-1)} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right) u_j + \delta \sum_{j=1}^{2(N-1)} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i\right) u_j \\ & = 0, \quad i = 2,4,\dots, 2(N-1) \dots (4.27) \end{aligned}$$

Uit die beginvoorwaarde kan  $u_1, u_3, \dots, u_{2N-3}$  bereken word en die stelsel (4.27) reduceer dus na 'n  $(N-1) \times (N-1)$  stelsel wat in matriksnotasie geskryf kan word as:

$$A \underline{u} = B \underline{v} \dots (4.28)$$

met A en B  $(N-1) \times (N-1)$  matrikse,

$$\underline{u} = (u_2, u_4, \dots, u_{2(N-1)})$$

$$\text{en } \underline{v} = (u_1, u_3, \dots, u_{2N-3})$$

Laat  $A = (a_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, N-1$

en  $B = (b_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $j = 1, \dots, N-1$ .

Die elemente van A en B word dan gegee deur

$$a_{ij} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j}, \phi_{2i} \right) + \epsilon \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2i} \right) + \delta \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j}, \phi_{2i} \right) \dots (4.29.1)$$

$$\text{en } b_{ij} = - \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j-1}, \phi_{2i} \right) - \epsilon \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2i} \right) - \delta \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j-1}, \phi_{2i} \right) \dots (4.29.2)$$

respektiewelik.

Die binneprodukte  $\left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \phi_i \right)$  en  $\left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_j, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i \right)$

in (4.29.1) en (4.29.2) is reeds bekend uit § 4.2. Ons  
hoef dus slegs

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_j, \phi_i \right)$$

te bereken. Die waardes van hierdie binneprodukte word  
gegee deur:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}, \phi_{2(\ell+1)} \right) = -\frac{k}{6}, \quad \ell = 1, \dots, (N-2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2(\ell+1)}, \phi_{2\ell} \right) = \frac{k}{6}, \quad \ell = 1, \dots, (N-2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}, \phi_{2\ell} \right) = 0, \quad \ell = 1, \dots, (N-1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}, \phi_{2\ell+1} \right) = -\frac{k}{12}, \quad \ell = 1, \dots, (N-2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell+1}, \phi_{2\ell} \right) = \frac{k}{12}, \quad \ell = 1, \dots, (N-2)$$

Die matriks A het dus 'n bandwydte van drie en die gedetailleerde struktuur is soos volg:

$$A = \begin{bmatrix}
 \frac{h}{3} + \frac{2\epsilon k}{3h} & \frac{h}{12} - \frac{\epsilon k}{3h} + \frac{\delta k}{6} & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{h}{12} - \frac{\epsilon k}{3h} - \frac{\delta k}{6} & \frac{h}{3} + \frac{2\epsilon k}{3h} & \frac{h}{12} - \frac{\epsilon k}{3h} + \frac{\delta k}{6} & & \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \frac{h}{12} - \frac{\epsilon k}{3h} + \frac{\delta k}{6} & \\
 0 & \dots & 0 & \frac{h}{12} - \frac{\epsilon k}{3h} - \frac{\delta k}{6} & \frac{h}{3} + \frac{2\epsilon k}{3h}
 \end{bmatrix}$$

Netso het die matriks B 'n bandwydte van drie, en die volgende struktuur:

$$B = \begin{bmatrix}
 \frac{h}{3} - \frac{\epsilon k}{3h} & \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} - \frac{\delta k}{12} & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} + \frac{\delta k}{12} & \frac{h}{3} - \frac{\epsilon k}{3h} & \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} - \frac{\delta k}{12} & & \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} - \frac{\delta k}{12} & \\
 0 & \dots & 0 & \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} + \frac{\delta k}{12} & \frac{h}{3} - \frac{\epsilon k}{3h}
 \end{bmatrix}$$

Uit die stelsel (4.28) word dan opgelos vir  $u_2, \dots, u_{2(N-1)}$  en dié waardes tree dan as beginvoorwaardes op vir die volgende tydsinterval. Ons kry dus weer eens 'n enkelstap prosedure

$$A \underline{u}^{(i)} = B \underline{u}^{(i-1)} \quad \dots \quad (4.30)$$

wat agtereenvolgens opgelos kan word tot die gevraagde tyd-stip bereik is.

Ons sal die numeriese resultate van (4.30) vergelyk met die resultate van Griffiths [46] asook met die eksakte oplossing van die vergelykings (4.21), (4.22) en (4.23).

Die bepaling van die eksakte oplossing deur die metode van skeiding van veranderlikes word in Bylaag A behandel.

#### 4.3.1.1 Numeriese resultate

Vir die numeriese oplossing van

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial u}{\partial x}$$

word die diffusie-koëffisiënt  $\epsilon$  as 0,01 en die dryf-koëffisiënt  $\delta$  as 1,0 gekies. Vir die beginfunksies  $u_0(x)$  kies ons 'n impuls met eenheidshoogte, basiswydte 0,2 en gesentreer by  $x = 0,3$  (kyk figuur 4.11). Die beginvoorwaarde (4.22) word dus uitgedruk as:

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{h_1} - 2 & , \quad 2h_1 \leq x \leq 3h_1 \\ -\frac{x}{h_1} + 4 & , \quad 3h_1 \leq x \leq 4h_1 \\ 0 & , \quad \text{andersins.} \end{cases}$$

met  $h_1 = 0,1$ .

Die numeriese resultate wat verkry word deur toepassing van die GRTG-metode word in figuur 4.11 aangetoon. Die interval  $[0,1]$  is in 20 gelyke dele verdeel, dit wil sê  $h = 1/20$ .

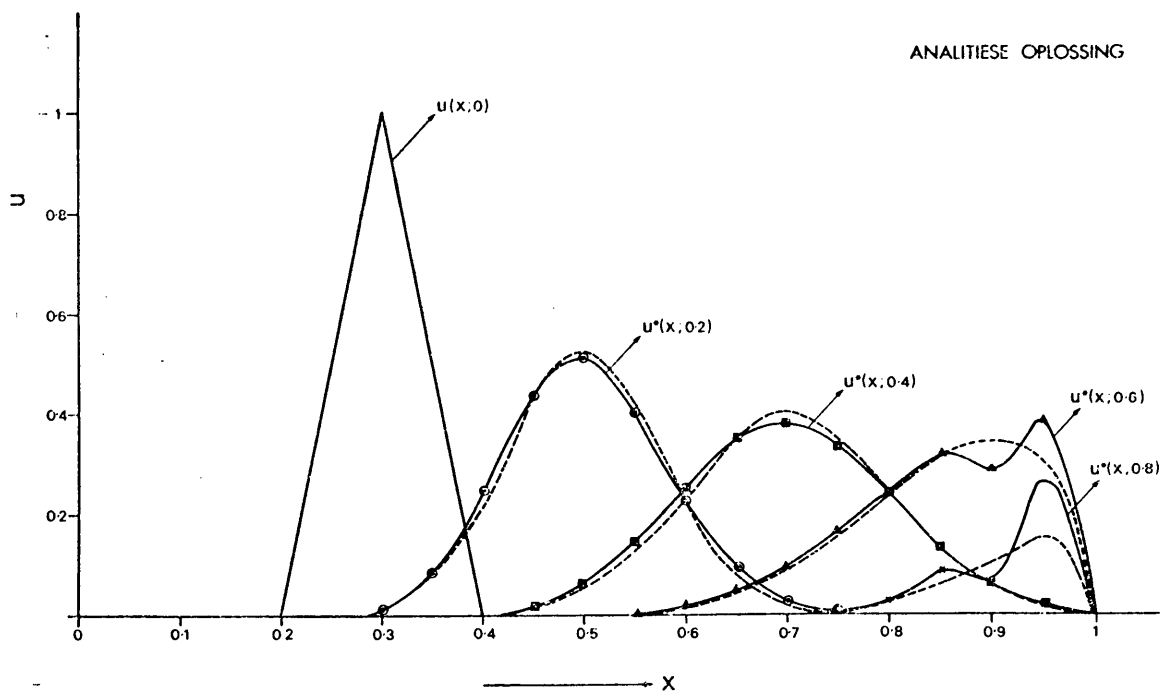
Vir die tydsinterval kies ons  $k = 0,01$  en die stelsel (4.30) lewer dan na 100 stappe die oplossing by  $t = 1,0$  sekondes.

Ons merk op dat die impuls egalig na regs dryf oor die  $xt$ -vlak

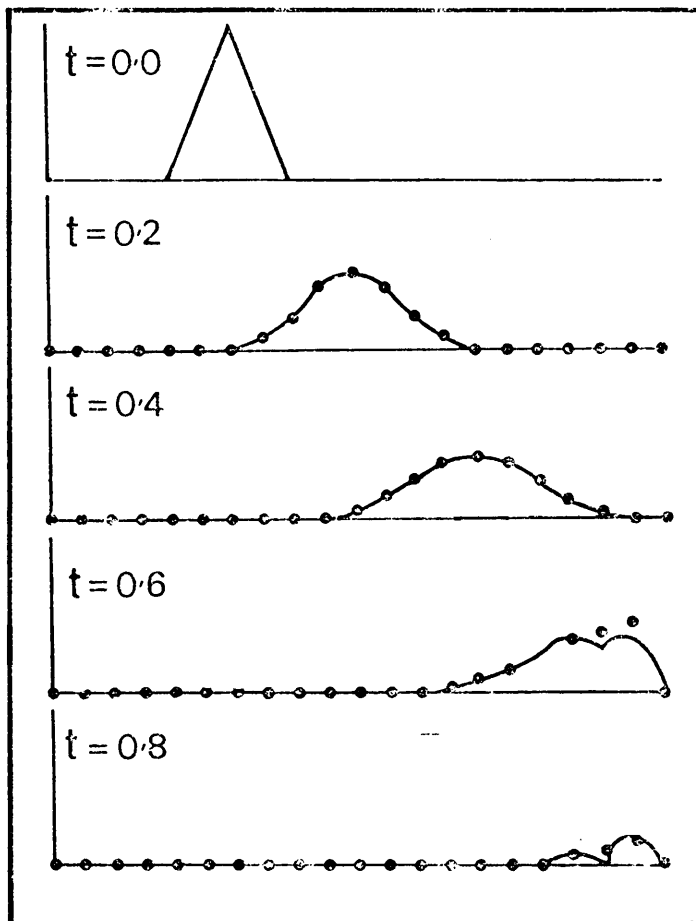
totdat dit die rand van die gebied by  $x = 1$  bereik. In die randgebied  $x = 0,8$  tot by  $x = 1,0$  ossilleer die benaderde oplossing om die eksakte oplossing. Die eksakte oplossing is bereken deur die reeks, soos beskryf in Bylaag A vergelyking (6), te sommeer tot 400 terme. Die Peclet-getal ([32], [33] en [24])  $L = \frac{\delta h}{2\varepsilon}$  is vir hierdie geval 2,5.

Figuur 4.12 toon die resultate van Mitchell en Griffiths ([32] en [24]) vir  $L = 5$  (di  $h = 0,1$ ). Hulle maak egter van kwadratiese eindige-elemente gebruik terwyl die resultate in figuur 4.11 steeds van lineêre eindige-elemente in ruimte en tyd gebruik maak en dus 'n meer ekonomiese metode verteenwoordig. Ongelukkig gee Mitchell en Griffiths slegs 'n grafiese voorstelling van hul resultate en kan geen kwantitatiewe vergelyking gevolglik getref word nie. Nogtans is dit duidelik dat die probleme wat Mitchell en Griffiths in die randgebied aan die regterkant ondervind, ernstiger is as dit wat die geval met die GRTG-metode is. Die nuwe GRTG-metode is dus kwalitatief effektiewer in vergelyking met Mitchell en Griffiths se metodes.





FIGUUR 4.11 Dirichlet-voorwaardes.



FIGUUR 4.12

In tabel 4,3 volg 'n uittreksel van die numeriese resultate verkry deur die interval in 40 gelyke dele te verdeel ( $h = 1/40$ ). Die Peclet-getal in hierdie geval is 1,25. Die norm wat ons in tabel 4,3 gebruik is 'n gemengde norm wat s6 gedefinieer word:

$$\| u - u^* \| = \frac{| u(x,t) - u^*(x,t) |}{1 + | u(x,t) |}$$

Die motivering vir die gebruik van hierdie norm is dat indien  $u(x,t)$  "groot" waardes aanneem, is die norm ongeveer dieselfde as die relatiewe norm, terwyl vir "klein" waardes van  $u(x,t)$  is die norm ongeveer die absolute verskil tussen die eksakte en benaderde oplossings.

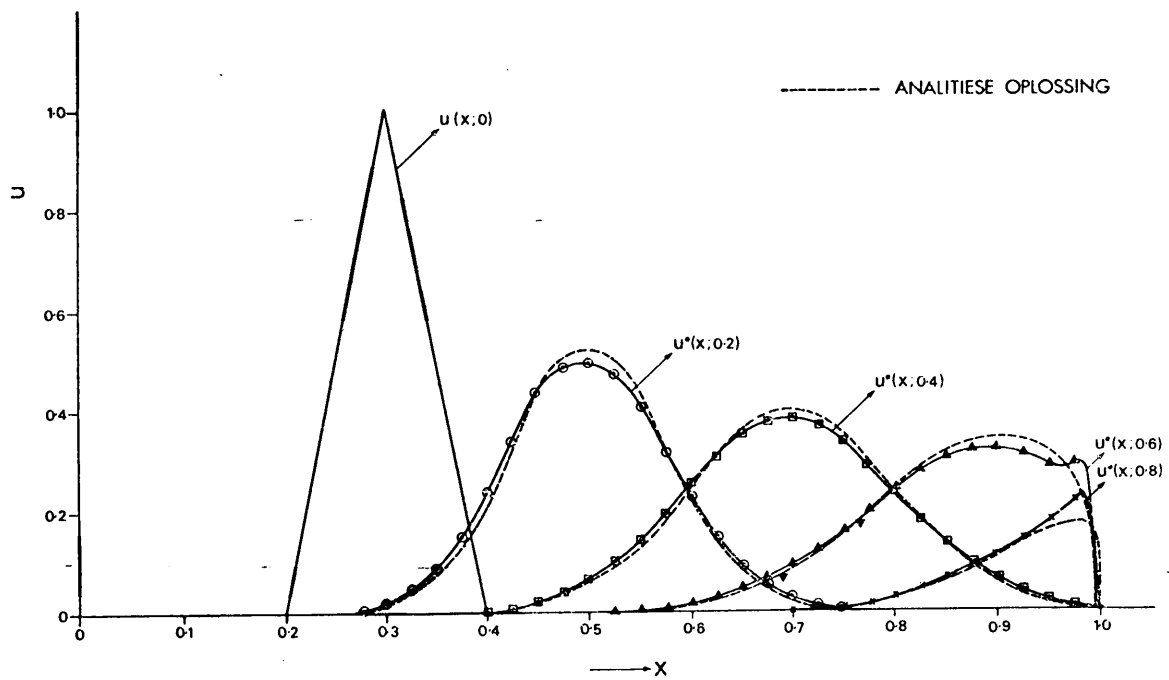
TABEL 4.3

i	$u(ih; 0,2)$	$u^*(ih; 0,2)$	$\ u - u^*\ $	$u(ih; 0,4)$	$u^*(ih; 0,4)$	$\ u - u^*\ $
0	0	0	0	0	0	0
4	0,130 E-6	0,659 E-8	1,2 E-7	0,170 E-8	-0,76 E-11	1,7 E-9
8	0,134 E-3	0,499 E-4	8,4 E-5	0,708 E-6	0,136 E-6	5,7 E-7
12	0,15097 E-1	0,16572 E-1	1,5 E-3	0,911 E-4	0,777 E-4	1,3 E-5
16	0,221716	0,236453	1,2 E-2	0,37582 E-2	0,45097 E-2	7,5 E-4
20	0,526105	0,501528	1,6 E-2	0,51426 E-1	0,60022 E-1	8,2 E-3
24	0,221716	0,221685	2,5 E-5	0,242331	0,249560	5,8 E-3
28	0,15097 E-1	0,23079 E-1	7,8 E-3	0,404787	0,380896	1,7 E-2
32	0,134 E-3	0,627 E-3	4,9 E-4	0,242331	0,234775	6,1 E-3
36	0,323 E-5	0,531 E-5	2,1 E-6	0,51426 E-1	0,62250 E-1	1,0 E-2
40	0	0	0	0	0	0

TABEL 4.3 (vervolg)

i	u(ih; 0,6)	u*(ih; 0,6)	$\ u - u^*\ $	u(ih; 0,8)	u*(ih; 0,8)	$\ u - u^*\ $
0	0	0	0	0	0	0
4	0,132 E-10	-0,23 E-13	1,3 E-11	-0,90 E-13	-0,15 E-16	9,0 E-14
8	0,404 E-8	0,398 E-9	3,6 E-9	0,240 E-10	0,12 E-11	2,3 E-11
12	0,546 E-6	0,299 E-6	2,5 E-7	0,333 E-8	0,11 E-8	2,2 E-9
16	0,336 E-4	0,357 E-4	2,1 E-6	0,253 E-6	0,202 E-6	5,1 E-8
20	0,9540 E-3	0,1235 E-2	2,8 E-4	0,106 E-4	0,129 E-4	2,3 E-6
24	0,12642 E-1	0,15999 E-1	3,3 E-3	0,247 E-3	0,344 E-3	9,7 E-5
28	0,791622 E-1	0,896392 E-1	9,7 E-3	0,32185 E-2	0,4397 E-2	1,2 E-3
32	0,236781	0,238031	1,0 E-3	0,23509 E-1	0,29158 E-1	5,5 E-3
36	0,340849	0,319070	1,6 E-2	0,96864 E-1	0,106475	8,8 E-3
38	0,310182	0,286672	1,8 E-2	0,157003	0,162866	5,1 E-3
39	0,261879	0,289836	2,2 E-2	0,171942	0,217842	3,9 E-2
40	0	0	0	0	0	0

In figuur 4.13 volg die verskillende grafiese voorstellings van die numeriese resultate vir  $h = 1/40$  en  $k = 0,01$ . Die randlaag waar die resultate swakker word, het nou gekrimp tot die interval  $[0,95; 1,0]$ . Dit verteenwoordig 'n aansienlike verbetering op  $h = 1/20$  asook op die resultate van Mitchell en Griffiths [32].



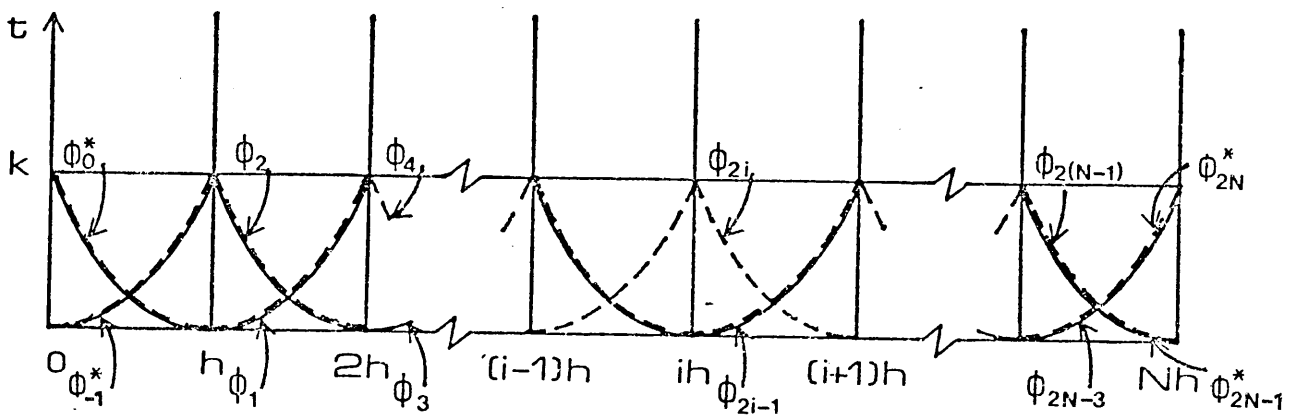
FIGUUR 4-13 Dirichlet-voorwaardes.

### 4.3.2 Periodiese randvoorwaardes

Die randvoorwaardes (4.23) word nou vervang deur

$$u(0,t) = u(1,t) \quad \dots (4.32)$$

Aangesien die homogene randvoorwaardes nou verval het, word daar by  $x=0$  en  $x=1$  basisfunksies bygevoeg. Skematies kan ons dit sō voorstel:



FIGUUR 4.14

Die oplossing  $u(x,t)$  word nou benader deur

$$\begin{aligned}
 u(x,t) \approx u^*(x,t) = & u_{-1} \phi_{-1}^* + u_0 \phi_0^* + \sum_{j=1}^{2(N-1)} u_j \phi_j^* \\
 & + u_{2N-1} \phi_{2N-1}^* + u_{2N} \phi_{2N}^* \quad \dots (4.33)
 \end{aligned}$$

Omdat die oplossing periodies is in  $x$  met 'n periode van 1 eenheid, kan ons (4.33) skryf as

$$u^*(x,t) = u_{2N-1} (\phi_{-1}^* + \phi_{2N-1}^*) + u_{2N} (\phi_0^* + \phi_{2N}^*) + \sum_{j=1}^{2(N-1)} u_j \phi_j^* \quad \dots (4.34)$$

Stel nou

$$\phi_{-1}^* + \phi_{2N-1}^* = \phi_{2N-1}$$

en 
$$\phi_0^* + \phi_{2N}^* = \phi_{2N}$$

dan word (4.34)

$$u(x, t) \approx u^*(x, t) = \sum_{j=1}^{2N} u_j \phi_j(x, t) \quad \dots (4.35)$$

Die Galerkin-benadering lewer die stelsel

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \phi_i\right) = \epsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \phi_i\right) - \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \phi_i\right)$$

met  $i = 2, 4, \dots, 2N$ .

Deur partiële integrasie en die periodiese eienskap van die oplossing by  $x=0$  en  $x=1$  reduceer hierdie stelsel na:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \phi_i\right) + \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right) + \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \phi_i\right) = 0 \quad \dots (4.36)$$

met  $i = 2, 4, \dots, 2N$ .

Vervang nou (4.35) in (4.36), dan is

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi_{2j}}{\partial t}, \phi_i\right) u_{2j} + \epsilon \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi_{2j}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right) u_{2j} \\ & + \delta \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi_{2j}}{\partial x}, \phi_i\right) u_{2j} \\ = & - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi_{2j-1}}{\partial t}, \phi_i\right) u_{2j-1} - \epsilon \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi_{2j-1}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right) u_{2j-1} \\ & - \delta \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi_{2j-1}}{\partial x}, \phi_i\right) u_{2j-1} \quad , i = 2, 4, \dots, 2N. \end{aligned}$$

Hierdie stelsel skryf ons in matriksvorm as

$$A \underline{u} = B \underline{v} \quad \dots (4.37)$$

met A en B twee  $N \times N$  matrikse,

$$\underline{u} = (u_2, u_4, \dots, u_{2N})$$

$$\text{en } \tilde{y} = (u_1, u_3, \dots, u_{2N-1}).$$

Die elemente  $a_{ij}$  en  $b_{ij}$  van die matrikse A en B word gegee deur (4.29.1) en (4.29.2) waar  $i$  en  $j$  nou die waardes  $1, \dots, N$  deurloop. Uit die stelsel (4.39) los ons op vir  $(u_2, u_4, \dots, u_{2N})$  met  $(u_1, u_3, \dots, u_{2N-1})$  as beginvoorwaardes en sodoende verkry ons die stelsel

$$A \tilde{u}^{(i)} = B \tilde{u}^{(i-1)} \quad \dots (4.38)$$

wat agtereenvolgens opgelos word tot by die gevraagde tydstip.

#### 4.3.2.1 Numeriese resultate

Ons beskou dieselfde beginfunksie  $u_0(x)$  van § 4.3.1.1 asook dieselfde waardes vir  $\delta$  en  $\epsilon$ . In tabel 4.4 volg die numeriese resultate met  $h = 1/40$  en  $k = 0,01$ . Die benaderde oplossings word gekontroleer met die eksakte oplossing wat in Bylaag A vergelyking (14) afgelei word. Die norm soos in tabel 4.3, word ook hier gebruik:

$$\| u - u^* \| = \left| \frac{u(x,t) - u^*(x,t)}{1 + |u(x,t)|} \right|.$$



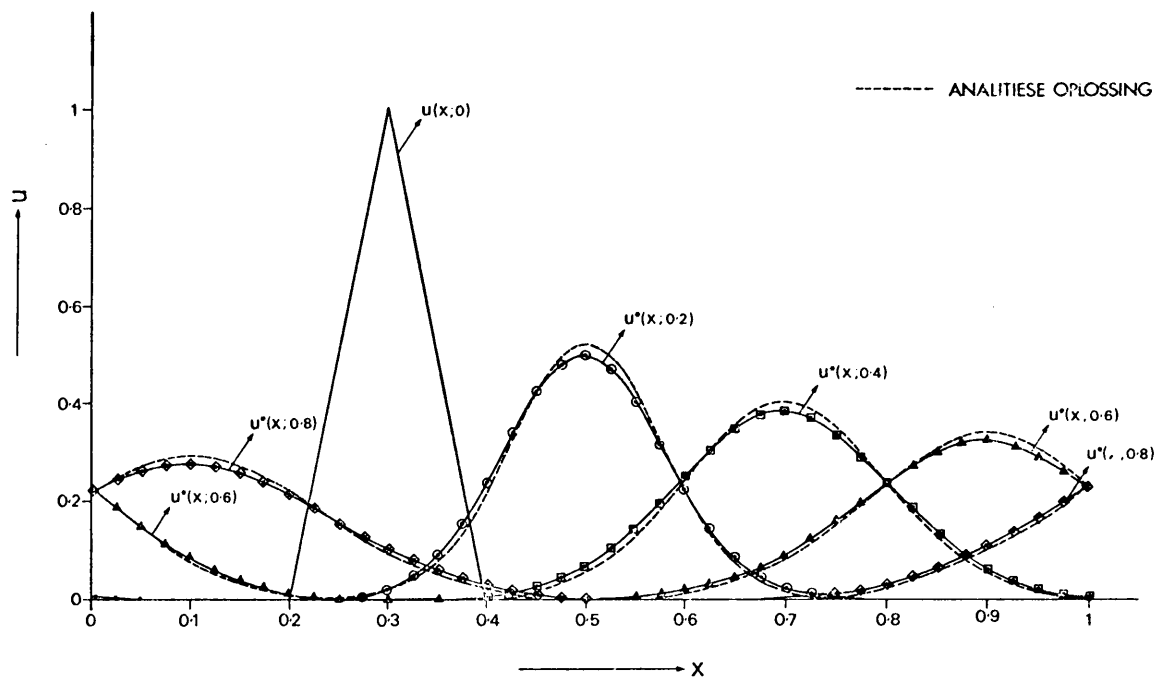
TABEL 4.4

i	u(ih; 0,2)	u*(ih; 0,2)	$\ u - u^*\ $	u(ih; 0,4)	u*(ih; 0,4)	$\ u - u^*\ $
0	0,243 E-10	0,1769 E-7	1,8 E-8	0,375822 E-2	0,746594 E-2	3,7 E-3
2	0,169 E-8	0,580 E-9	1,1 E-9	0,6733 E-2	0,194909 E-2	1,3 E-3
4	0,130 E-6	0,666 E-8	1,2 E-7	0,911 E-3	0,425082 E-3	3,3 E-4
6	0,556 E-5	-0,259 E-6	5,8 E-6	0,932 E-4	0,779853 E-4	6,9 E-5
8	0,1344 E-3	0,4989 E-4	8,4 E-5	0,142 E-4	0,122601 E-4	1,1 E-8
10	0,186191 E-2	0,161607 E-2	2,5 E-4	0,932 E-5	0,641028 E-5	2,9 E-6
12	0,150966 E-1	0,165716 E-1	1,5 E-3	0,911 E-4	0,778947 E-4	1,3 E-5
14	0,735570 E-1	0,825866 E-1	8,4 E-3	0,673 E-3	0,733299 E-3	6,0 E-5
16	0,221716	0,236453	1,2 E-2	0,375822 E-2	0,450967 E-2	7,5 E-4
18	0,425576	0,424342	8,6 E-4	0,159195 E-1	0,193005 E-1	3,3 E-3
20	0,526105	0,501528	1,6 E-2	0,514256 E-1	0,600224 E-1	1,8 E-2
22	0,424576	0,401685	1,6 E-2	0,127274	0,139833	1,1 E-2
24	0,221716	0,221685	2,5 E-5	0,242331	0,249560	5,8 E-3
26	0,735570 E-1	0,852427 E-1	1,1 E-2	0,356123	0,347017	6,7 E-3
28	0,150966 E-1	0,230787 E-1	7,9 E-3	0,404787	0,380896	1,7 E-2
30	0,186191 E-2	0,446053 E-2	2,6 E-3	0,356123	0,333445	1,7 E-2
32	0,13441 E-3	0,627430 E-3	4,9 E-4	0,242331	0,234775	6,1 E-3
34	0,556 E-5	0,658596 E-4	6,0 E-5	0,127274	0,133901	5,9 E-3
36	0,129 E-6	0,531 E-6	4,0 E-7	0,514256 E-1	0,622550 E-1	1,0 E-2
38	0,169 E-8	0,339 E-6	3,4 E-7	0,159195 E-1	0,237365 E-1	7,7 E-3
40	0,243 E-10	0,177 E-7	1,8 E-8	0,375822 E-2	0,746594 E-2	3,7 E-3

TABEL 4.4 (vervolg)

i	$u(ih; 0,6)$	$u^*(ih; 0,6)$	$\ u - u^*\ $	$u(ih; 0,8)$	$u^*(ih; 0,8)$	$\ u - u^*\ $
0	0,236781	0,226194	8,6 E-3	0,226168	0,223830	1,9 E-3
2	0,150072	0,151673	1,4 E-3	0,279503	0,266647	1,0 E-2
4	0,791623 E-1	0,878442 E-1	8,0 E-3	0,299937	0,280069	1,5 E-2
6	0,347174 E-1	0,441010 E-1	9,1 E-3	0,279503	0,260184	1,5 E-2
8	0,126421 E-1	0,192571 E-1	6,5 E-3	0,226168	0,214416	9,6 E-3
10	0,381693 E-2	0,733808 E-2	3,5 E-3	0,158886	0,157171	1,5 E-3
12	0,9545 E-3	0,244845 E-2	1,5 E-3	0,968778 E-1	0,102735	5,3 E-3
14	0,20181 E-3	0,721357 E-3	5,2 E-4	0,512479 E-1	0,600239 E-1	8,3 E-3
16	0,672 E-4	0,22099 E-3	1,5 E-4	0,235091 E-1	0,314174 E-1	7,7 E-3
18	0,2018 E-3	0,28258 E-3	8,1 E-5	0,934821 E-2	0,147653 E-1	5,4 E-3
20	0,955 E-3	0,124333 E-2	2,9 E-4	0,322913 E-2	0,625455 E-2	3,0 E-3
22	0,381693 E-2	0,497372 E-2	2,1 E-2	0,101447 E-2	0,245252 E-2	1,4 E-3
24	0,126421 E-1	0,159996 E-1	3,3 E-3	0,49469 E-3	0,116332 E-2	6,7 E-4
26	0,347174 E-1	0,417785 E-1	6,8 E-3	0,101447 E-2	0,159643 E-2	5,8 E-4
28	0,791623 E-1	0,896392 E-1	9,7 E-3	0,322913 E-2	0,446869 E-2	1,2 E-3
30	0,150070	0,159648	8,3 E-3	0,934821 E-2	0,122572 E-1	2,9 E-3
32	0,236781	0,238031	1,0 E-3	0,235091 E-1	0,291623 E-1	5,5 E-3
34	0,311194	0,299235	9,1 E-3	0,512479 E-1	0,598572 E-1	8,2 E-3
36	0,340852	0,319122	1,6 E-2	0,938778 E-1	0,106493	1,2 E-2
38	0,311194	0,290249	1,6 E-2	0,158886	0,165045	5,3 E-3
40	0,236781	0,226194	8,6 E-3	0,226168	0,223830	1,9 E-3

Hierdie resultate stel ons grafies voor in figuur 4.15. Die Peclet-getal vir die resultate in tabel 4.4 is steeds 1,25.



FIGUUR 4-15 Periodese-voorwaardes

### 4.3,3 Neumann-randvoorwaardes

Nou beskou ons die probleem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial u}{\partial x}, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T] \\ u(0,t) &= 0, & t > 0 \\ & \dots & (4.39) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= 0, & t > 0 \\ \text{en } u(x,0) &= u_0(x), & x \in (0,1) \end{aligned}$$

Dieselfde basisfunksies as in figuur 4.14 word geneem behalwe dat ons  $\phi_0^*$  en  $\phi_{-1}^*$  buite rekening laat omdat  $u(0,t) = 0$ . Verder stel ons

$$\begin{aligned} \phi_{2N}^* &= \phi_{2N} \\ \text{en } \phi_{2N-1}^* &= \phi_{2N-1} \end{aligned}$$

Laat  $M = \text{span} \{ \phi_1, \dots, \phi_{2N} \}$ .

Deur partiële integrasie en die randvoorwaardes volg, vir  $v \in M$ , dat

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v \right) &= \int_0^k \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v \Big|_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^k \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx dt \\ &= - \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dots (4.40) \end{aligned}$$

Die Galerkin-benadering  $u^*(x,t)$  word derhalwe, vir die Neumann-randvoorwaarde-probleem (4.39), gedefinieer deur die vergelyking

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}, v\right) + \epsilon \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \delta \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}, v\right) + \left\langle \frac{\partial u^*}{\partial x}, v \right\rangle = 0 \quad \dots (4.41)$$

$$\text{met } \langle u^*, v \rangle = \int_0^k u^*(l, t) v(l, t) dt$$

$$\text{laat } u^*(x, t) = \sum_{j=1}^{2N} u_j \phi_j \quad \dots (4.42)$$

Vervang (4.42) nou in (4.41) dan geld die volgende stelsel vergelykings:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j}, \phi_i\right) u_{2j} + \epsilon \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i\right) u_{2j} \\ & + \delta \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j}, \phi_i\right) u_{2j} + \sum_{j=1}^N \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j}, \phi_i \right\rangle u_{2j} \\ & = - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j-1}, \phi_i\right) u_{2j-1} - \epsilon \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i\right) u_{2j-1} \\ & - \delta \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j-1}, \phi_i\right) u_{2j-1} - \sum_{j=1}^N \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j-1}, \phi_i \right\rangle u_{2j-1} \end{aligned}$$

$$i = 2, 4, \dots, 2N. \quad \dots (4.43).$$

Al die binneprodukte in (4.43) is reeds bekend (met die nodige aanpassing vir  $\phi_{2N}$ ) behalwe

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j-1}, \phi_i \right\rangle, \quad i = 2, 4, \dots, 2N,$$



en

$$B = \begin{bmatrix} \frac{h}{3} - \frac{\epsilon k}{3h} & \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} - \frac{\delta k}{12} & & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} + \frac{\delta k}{12} & \frac{h}{3} - \frac{\epsilon k}{3h} & \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} - \frac{\delta k}{12} & & & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} + \frac{\delta k}{12} & \frac{h}{3} - \frac{\epsilon k}{3h} & \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} - \frac{\delta k}{12} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{h}{12} + \frac{\epsilon k}{6h} + \frac{\delta k}{12} + \frac{k}{6h} & \frac{h}{6} - \frac{\epsilon k}{6h} - \frac{\delta k}{12} - \frac{k}{6h} \end{bmatrix}$$

Netsoos in die vorige twee probleme word die stelsel

$$A \underline{u}^{(i)} = B \underline{u}^{(i-1)}$$

herhaaldelik opgelos.

#### 4.3.3.1 Numeriese resultate

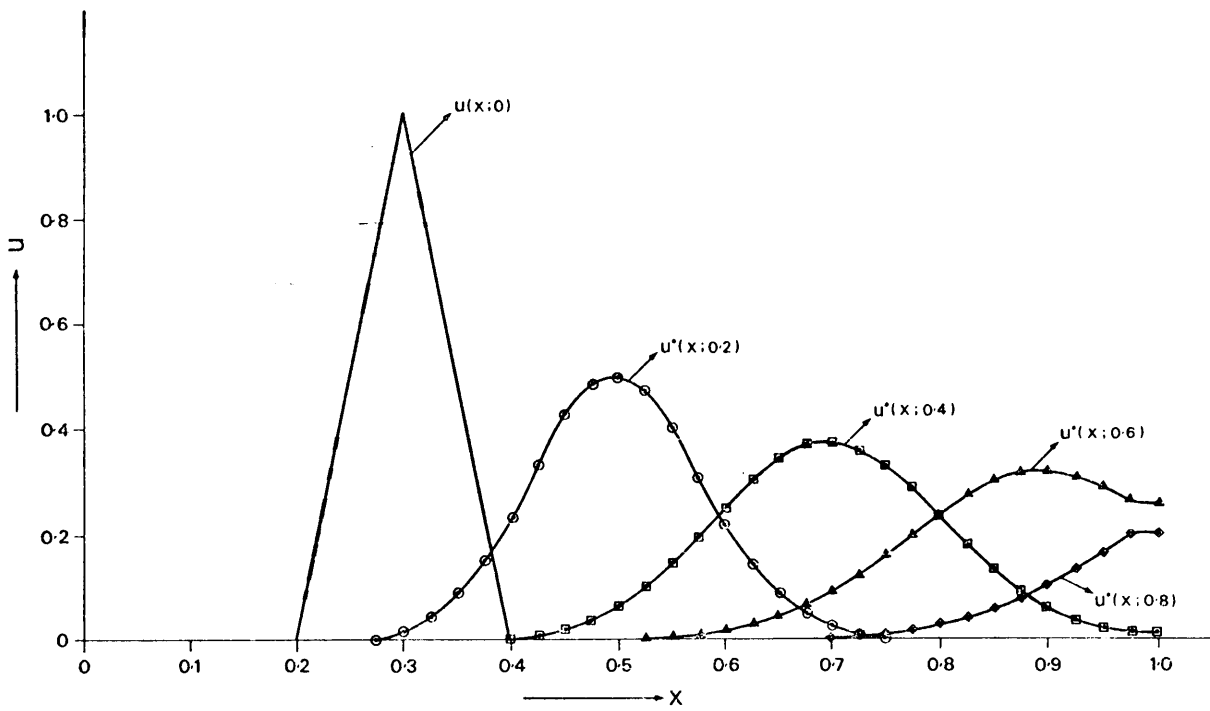
In tabel 4.5 volg die numeriese resultate deur presies dieselfde waardes vir die parameters te kies as in § 4.3.1.1.

TABEL 4.5

$i$	$u^*(ih; 0,2)$	$u^*(ih; 0,4)$	$u^*(ih; 0,6)$	$u^*(ih; 0,8)$
0	0	0	0	0
2	-0,178363 E-9	0,908020 E-13	0,235121 E-15	-0,204188 E-18
4	0,658903 E-8	-0,759727 E-11	-0,226745 E-13	-0,146932 E-16
6	-0,259290 E-6	0,557499 E-9	0,355088 E-11	0,142981 E-13
8	0,498859 E-4	0,135848 E-6	0,398617 E-9	0,121652 E-11
10	0,161607 E-2	0,480038 E-5	0,147825 E-7	0,465288 E-10
12	0,165716 E-1	0,777107 E-4	0,299629 E-6	0,108258 E-8
14	0,825866 E-1	0,733281 E-3	0,390905 E-5	0,172908 E-7
16	0,236453	0,450967 E-2	0,356955 E-4	0,202621 E-6
18	0,424342	0,193005 E-1	0,240251 E-3	0,181799 E-5
20	0,501528	0,600224 E-1	0,123475 E-2	0,128680 E-4
22	0,401685	0,139832	0,497218 E-2	0,734633 E-4
24	0,221685	0,249560	0,159993 E-1	0,344140 E-3
26	0,852427 E-1	0,347017	0,417785 E-1	0,134109 E-2
28	0,230787 E-1	0,380896	0,896392 E-1	0,439650 E-2
30	0,446053 E-2	0,333445	0,159648	0,122386 E-1
32	0,627430 E-3	0,234775	0,238031	0,291579 E-1
34	0,658596 E-4	0,133901	0,299235	0,598562 E-1
36	0,531160 E-5	0,622579 E-1	0,319124	0,106489
38	0,341314 E-6	0,238603 E-1	0,290558	0,164681
40	0,676988 E-7	0,127125 E-1	0,257529	0,198853

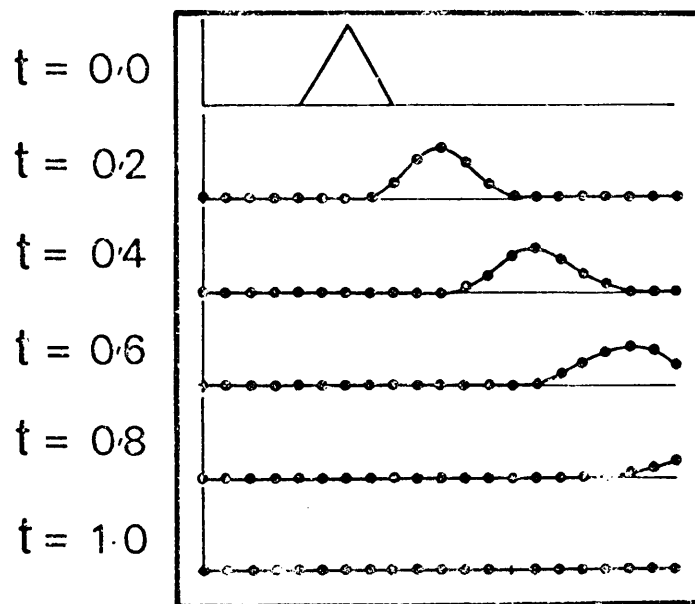
Die grafiese voorstelling van hierdie resultate volg in figuur 4,16.





FIGUUR 4-16 Neumann-voorwaardes

In figuur 4.17 volg die resultate van Griffiths [24] vir kwadratiese basisfunksies.



FIGUUR 4.17

#### 4.4 BESPREKING VAN NUMERIESE RESULTATE

Die GRTG-metode lewer vir die geleiding-diffusie-probleem 'n stelsel algebraïese vergelykings waaruit die benaderde oplossing bereken kan word. Hierdie stelsel se koëffisiëntmatriks besit 'n bandwydte van drie elemente en gevolglik kan die stelsel met 'n ekonomiese numeriese prosedure opgelos word.

Aangesien die basisfunksies lineêr in ruimte en tyd is, kan die binneprodukte wat in die stelsels benodig word maklik deur eenvoudige integrasietegnieke bereken word.

Vir die geleiding-diffusie-probleem met die verskillende randvoorwaardes merk ons op dat die grootste afwyking tussen die eksakte en benaderde oplossing telkens voorkom waar die oplossing sy maksimum waarde aanneem. In besonder geld vir die Dirichlet-randvoorwaardes (kyk tabel 4.3 en figuur 4.12) dat

$$\begin{aligned} & \| u(0,5; 0,2) - u^*(0,5; 0,2) \| = 1,6 \text{ E-2} \\ & \| u(0,7; 0,4) - u^*(0,7; 0,4) \| = 1,7 \text{ E-2} \\ & \| u(0,9; 0,6) - u^*(0,9; 0,6) \| = 1,6 \text{ E-2} \\ \text{en} \quad & \| u(0,975; 0,8) - u^*(0,975; 0,8) \| = 3,9 \text{ E-2} \end{aligned}$$

Die rede hiervoor is waarskynlik die skerp punt van die beginfunksie by  $x = 0,3$ .

Griffiths [24] gebruik die eksakte oplossing van die geleiding-diffusie-vergelyking met periodiese randvoorwaardes as kontrole vir die benaderde oplossings verkry met Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes respektiewelik. Die rede

hiervoor is eerstens dat die oplossing met periodiese randvoorwaardes slegs in die randgebied verskil van die oplossings met Dirichlet- of Neumann-randvoorwaardes. Tweedens beweer Griffiths [24] dat die eksakte oplossing met Dirichlet- en Neumann-randvoorwaardes baie moeilik verkry kan word.

In Bylaag A lei ons die eksakte oplossing vir die geleiding-diffusie-probleem met Dirichlet- en periodiese-randvoorwaardes, af.

Vir die Neumann-randvoorwaarde-probleem het ons nie die eksakte oplossing bereken nie. Indien die eksakte oplossing met die periodiese randvoorwaardes as kontrole gebruik word, vind ons soos by die Dirichlet-voorwaardes, dat die maksimum fout oor die interval  $(0; 9,75)$  van orde  $O(10^{-2})$  is. Die grafieke in figuur 4,16 toon egter baie duidelik dat die randvoorwaarde

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$$

beyredig word. Die resultate van Griffiths [24] in figuur 4,17 toon egter nie duidelik aan of bogenoemde randvoorwaarde wel beyredig word nie. In figuur 4,17 word kwadratiese basisfunksies vir die ruimtelike veranderlike gebruik maar die Peclet-getal is 10 wat groter is as die Peclet-getal, naamlik 1,25, wat geld vir die resultate van figuur 4,16. Kwalitatief kan ons egter wel die gevolgtrekking maak dat die GRTG-metode die Neumann-randvoorwaarde-probleem beter benader as die Galerkin-metode wat Griffiths [24] gebruik.

Vir die hitte- en geleiding-diffusie-vergelykings word telkens 'n stelsel vergelykings van die vorm

$$A \underline{u}^i = B \underline{u}^{i-1}$$

verkry waaruit opgelos word. Indien die tydsinterval  $[0, T]$  in  $K$  gelyke deelintervalle verdeel word, beteken dit dus dat hierdie stelsels herhaaldelik opgelos word met  $i=1, 2, \dots, K$ . Ons verkry dus in effek 'n voortmarsjeer-in-tyd-metode wat vir die hitte- en geleiding-diffusie-probleme akkurate numeriese resultate lewer. Ons het dus die voortmarsjeer-in-tyd-tegniek vir eerste orde gewone differensiaalvergelykings suksesvol uitgebrei na paraboliese parsiële differensiaalvergelykings. Die vrees wat Fix en Strang [20] dus uitgespreek het oor die koppeling tussen opeenvolgende tydsvlakke, soos bespreek in § 4.1.1, blyk dus ongegrond te wees.

Die GRTG-metode beskou die tydsveranderlike as 'n ekstra dimensie en die gebied  $[0, 1] \times [0, T]$  in die  $xt$ -vlak word dus in deelgebiede verdeel op 'n soortgelyke wyse as wat die gebied  $[0, a] \times [0, b]$  in die  $xy$ -vlak verdeel word by ewewigstoestandprobleme. Die vraag van Mitchell [31] of variasiebeginsel-metodes suksesvol oorgedra kan word na evolusieprobleme word dus, vir die paraboliese vergelykings wat ons beskou het, positief beantwoord.

HOOFSTUK 5TOEPASSING VAN DIE GRTG-METODE OP HIPERBOLIESE PROBLEME5.1 INLEIDING

In hoofstuk 4 het ons 'n metode van Mitchell [31] beskryf waar die golfvergelyking met 'n variasiebeginsel-metode opgelos word. Hierdie metode van Mitchell benader die oplossing van die randwaarde-probleem

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} & , (x,t) \in [0,1] \times (0,T] \\u(0,t) &= u(1,t) = 0 & , 0 < t \leq T \\u(x,0) &= f(x) & , 0 \leq x \leq 1 \quad \dots (5.1) \\u_t(x,0) &= g(x) & , 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

deur basisfunksies te gebruik wat afhanklik van die ruimte- en tydsveranderlike is. Om die oplossing egter op 'n tyd-stap  $t = t_{n+1}$  te bereken, moet die oplossing by die vorige twee tydstappe naamlik  $t = t_n$  en  $t = t_{n-1}$  bekend wees. Dit beteken dus dat die beginvoorwaarde

$$u_t(x,0) = g(x)$$

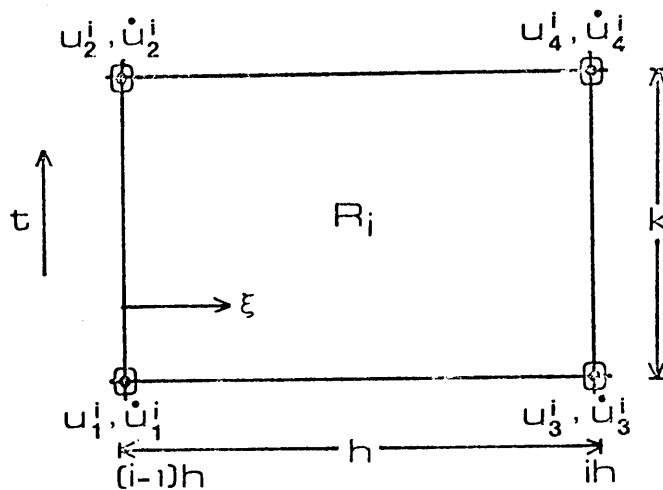
nie eksak gebruik word nie maar wel in die vorm van 'n eindige-verskil-benadering. In hierdie hoofstuk gaan ons die Galerkin-metode gelyktydig in ruimte en tyd, soos geformuleer in paragraaf 4.1.5, toepas op die golfvergelyking met

- (i) Dirichlet-randvoorwaardes
- (ii) Neumann-randvoorwaardes.

Ons metode sal op 'n eksakte wyse gebruik maak van die beginvoorwaardes en die benaderde oplossing van (5.1), sowel as sy afgeleide met betrekking tot tyd, sal bereken word.

## 5.2 KEUSE VAN BASISFUNKSIES VIR DIE GRTG-METODE

Die probleem is nou om geskikte basisfunksies te vind waarmee die oplossing van (5.1) benader kan word. Aangesien die beginposisie sowel as die beginsnelheid van  $u(x,t)$  bekend is, gaan ons van basisfunksies gebruik maak wat by die roosterpunte die waarde een aanneem asook van basisfunksies waarvan die afgeleide met betrekking tot tyd die waarde een aanneem by die roosterpunte. Ons verdeel die  $xt$ -vlak in reghoekige deelgebiede soos in hoofstuk 4. Beskou nou die reghoek  $R_i$  in figuur 5.1.



FIGUUR 5.1

By elke hoekpunt wil ons die funksiewaarde  $u_j$  sowel as die afgeleide  $\dot{u}_j$  bereken. Daar is dus agt vryheidsgrade en

as toetsfunksies oor die gebied  $R_i$  kies ons

$$\begin{aligned}
 u^i(\xi, t) &= (\beta_0 + \beta_1 \xi) (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t^3) \\
 &= \alpha_0^i + \alpha_1^i \xi + \alpha_2^i t + \alpha_3^i \xi t + \alpha_4^i t^2 \\
 &\quad + \alpha_5^i \xi t^2 + \alpha_6^i t^3 + \alpha_7^i \xi t^3 \quad \dots (5.2)
 \end{aligned}$$

waar  $\xi = x - (i-1)h$ .

Die toetsfunksies in (5.2) is lineêr in  $\xi$  maar kubies in tyd. Die hoofrede vir dié keuse is dat op elke tydstip  $t_n$  word die snelheid  $\dot{u}(x, t_n)$  vereis as beginvoorwaarde te same met  $u(x, t_n)$  vir verdere voortplanting van die oplossing. Ons soek dus nie net 'n benadering vir die funksiewaarde  $u(x, t)$  nie maar ook vir die afgeleide  $\dot{u}(x, t)$ . Ons kies dus kubiese toetsfunksies in tyd sodat ons benaderings vir  $u(x, t)$  en  $\dot{u}(x, t)$  kontinu is by die knooppunte. 'n Verdere voordeel van die basisfunksies in (5.2) is dat vir 'n enkelstapmetode hoër akkuraatheid in die tydsrigting verkry word.

Laat

$$u(\xi, t) \approx u^i(\xi, t) \quad \dots (5.3)$$

oor die deelgebied  $R_i$  en

$$\begin{aligned}
 u_t(\xi, t) \approx u_t^i &= \alpha_2^i + \alpha_3^i \xi + 2\alpha_4^i t \\
 &\quad + 2\alpha_5^i \xi t + 3\alpha_6^i t^2 + 3\alpha_7^i \xi t^2 \quad \dots (5.4)
 \end{aligned}$$



Definieer nou 'n vektor

$$\underline{u}^i = (u_1^i, \dot{u}_1^i, u_2^i, \dot{u}_2^i, u_3^i, \dot{u}_3^i, u_4^i, \dot{u}_4^i)$$

só dat

$$u^i = u^i(0,0) = \alpha_0^i$$

$$\dot{u}_1^i = \dot{u}^i(0,0) = \alpha_2^i$$

$$u_2^i = u^i(0,k) = \alpha_0^i + \alpha_2^i k + \alpha_4^i k^2 + \alpha_6^i k^3$$

$$\dot{u}_2^i = \dot{u}^i(0,k) = \alpha_2^i + 2\alpha_4^i k + 3\alpha_6^i k^2$$

$$u_3^i = u^i(h,0) = \alpha_0^i + \alpha_1^i h$$

$$\dot{u}_3^i = \dot{u}^i(h,0) = \alpha_2^i + \alpha_3^i h$$

$$u_4^i = u^i(h,k) = \alpha_0^i + \alpha_1^i h + \alpha_2^i k$$

$$+ \alpha_3^i h k + \alpha_4^i k^2 + \alpha_5^i h k^2 + \alpha_6^i k^3 + \alpha_7^i h k^3$$

$$\dot{u}_4^i = \dot{u}^i(h,k) = \alpha_2^i + \alpha_3^i h + 2\alpha_4^i k$$

$$+ 2\alpha_5^i h k + 3\alpha_6^i k^2 + 3\alpha_7^i h k^2.$$

Die vektor  $\underline{u}^i$  word nou deur die volgende matriksvergelyking gegee: (Ons laat die boskrif  $i$  nou gerieflikheidshalwe weg).

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_2 \\ u_3 \\ \dot{u}_3 \\ u_4 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & 0 & k^2 & 0 & k^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2k & 0 & 3k^2 & 0 \\ 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & k & h k & k^2 & h k^2 & k^3 & h k^3 \\ 0 & 0 & 1 & h & 2k & 2h k & 3k^2 & 3h k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{bmatrix}$$

$$= A \underline{\alpha} \dots (5.5)$$

eterminant van A is ongelyk aan nul, die inverse  $A^{-1}$   
 an dus, en uit (5.5) volg dan dat

$$\underline{q} = A^{-1} \underline{u}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\
 -\frac{3}{k^2} & -\frac{2}{k} & \frac{3}{k^2} & -\frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{3}{hk^2} & \frac{2}{hk} & -\frac{3}{hk^2} & \frac{1}{hk} & -\frac{3}{hk^2} & -\frac{2}{hk} & \frac{3}{hk^2} & -\frac{1}{hk} \\
 \frac{2}{k^3} & \frac{1}{k^2} & -\frac{2}{k^3} & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{2}{hk^3} & -\frac{1}{hk^2} & \frac{2}{hk^3} & -\frac{1}{hk^2} & \frac{2}{hk^3} & \frac{1}{hk^2} & -\frac{2}{hk^3} & \frac{1}{hk^2}
 \end{bmatrix}$$

terme

)  $\frac{t^3}{k^3}$

$$\underline{q}^i = [1 \quad \xi \quad t \quad \xi t \quad t^2 \quad \xi t^2 \quad t^3 \quad \xi t^3] A^{-1} \underline{u}$$

$$\left(1 - \frac{\xi}{h} - \frac{3t^2}{k^2} + \frac{3\xi t^2}{hk^2} + \frac{2t^3}{k^3} - \frac{2\xi t^3}{hk^3}\right) u_1$$

1)  $\frac{t^3}{k^3}$

$$\left(t - \frac{\xi t}{h} - \frac{2t^2}{k} + \frac{2\xi t^2}{hk} + \frac{t^3}{k^2} - \frac{\xi t^3}{hk^2}\right) \dot{u}_1$$

$\frac{t^3}{k^2}$

$$\left(\frac{3t^2}{k^2} - \frac{3\xi t^2}{hk^2} - \frac{2t^3}{k^3} + \frac{2\xi t^3}{hk^3}\right) u_2$$

$$\left(-\frac{t^2}{k} + \frac{\xi t^2}{hk} + \frac{t^3}{k^2} - \frac{\xi t^3}{hk^2}\right) \dot{u}_2$$

$$\left(\frac{\xi}{h} - \frac{3\xi t^2}{hk^2} + \frac{2\xi t^3}{hk^3}\right) u_3$$

$$\left(\frac{\xi t}{h} - \frac{2\xi t^2}{hk} + \frac{\xi t^3}{hk^2}\right) \dot{u}_3$$

$$\left(\frac{3\xi t^2}{hk^2} - \frac{2\xi t^3}{hk^3}\right) u_4 + \left(-\frac{\xi t^2}{hk} + \frac{\xi t^3}{hk^2}\right) \dot{u}_4$$

nou die

$$N_1^i u_1 + N_2^i \dot{u}_1 + N_3^i u_2 + N_4^i \dot{u}_2 + N_5^i u_3 + N_6^i \dot{u}_3 + N_7^i u_4 + N_8^i \dot{u}_4$$

lg:

$$\underline{N}^i \underline{u}$$

... (5.6)

$$\phi_{2i-1}(x, t) = \begin{cases} N_5^- & , (x, t) \in R_i \\ N_1^{i+1} & , (x, t) \in R_{i+1} \\ 0 & , \text{ andersins} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{h} - (i-1) - \frac{3xt^2}{hk^2} + 3(i-1)\frac{t^2}{k^2} + \frac{2xt^3}{hk^3} - 2(i-1)\frac{t^3}{k^3} & R_i \\ i+1 - \frac{x}{h} - \frac{3t^2}{k^2} + \frac{3xt^2}{hk^2} - \frac{3it^2}{k^2} + \frac{2t^3}{k^3} - \frac{2xt^3}{hk^3} + \frac{2it^3}{k^3} & , R_{i+1} \\ 0 & , \text{ andersins.} \end{cases}$$

$$-\phi_{2i}(x, t) = \begin{cases} N_7^i(x, t) & , (x, t) \in R_i \\ N_3^{i+1}(x, t) & , (x, t) \in R_{i+1} \\ 0 & , \text{ andersins.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{3xt^2}{hk^2} - 3(i-1)\frac{t^2}{k^2} - \frac{2xt^3}{hk^3} + 2(i-1)\frac{t^3}{k^3} & , R_i \\ \frac{3t^2}{k^2} - \frac{3xt^2}{hk^2} + \frac{3it^2}{k^2} - \frac{2t^3}{h^3} + \frac{2xt^3}{hk^3} - \frac{2it^3}{k^3} & , R_{i+1} \\ 0 & \text{ andersins} \end{cases}$$

$$\psi_{(2i-1)}(x, t) = \begin{cases} N_6^i(x, t) & , (x, t) \in R_i \\ N_2^{i+1}(x, t) & , (x, t) \in R_{i+1} \\ 0 & , \text{ andersins.} \end{cases}$$

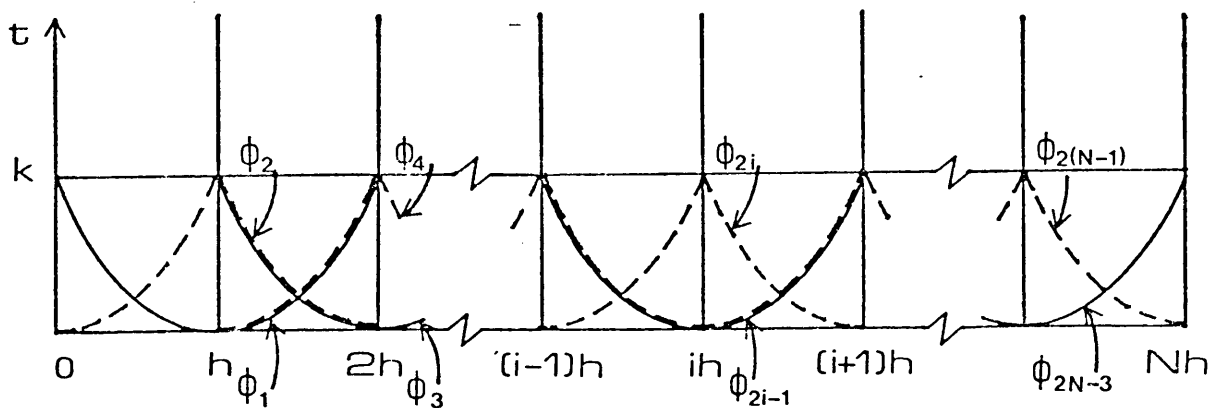
$$= \begin{cases} \frac{xt}{h} - (i-1)t - \frac{2xt^2}{hk} + \frac{xt^3}{hk^2} + 2(i-1)\frac{t^2}{k} - (i-1)\frac{t^3}{k^2} & , R_i \\ (i+1)t - \frac{xt}{h} - \frac{2t^2}{k} + \frac{2xt^2}{hk} + \frac{t^3}{k^2} - \frac{2it^2}{k} - \frac{xt^3}{hk^2} + \frac{it^3}{k^2} & , R_{i+1} \\ 0 & , \text{andersins.} \end{cases}$$

$$\psi_{2i}(x,t) = \begin{cases} N_8^i(x,t) & , (x,t) \in R_i \\ N_4^{i+1}(x,t) & , (x,t) \in R_{i+1} \\ 0 & , \text{andersins} \end{cases}$$

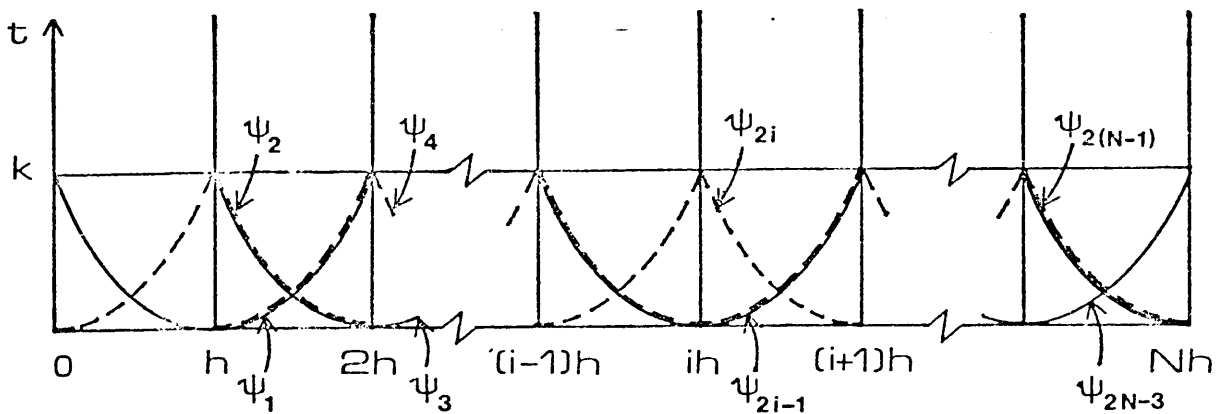
$$= \begin{cases} -\frac{xt^2}{hk} + (i-1)\frac{t^2}{k} + \frac{xt^3}{hk^2} - (i-1)\frac{t^3}{k^2} & , R_i \\ \frac{xt^2}{hk} - (i+1)\frac{t^2}{k} - \frac{xt^3}{hk^2} + (i+1)\frac{t^3}{k^2} & , R_{i+1} \\ 0 & , \text{andersins} \end{cases}$$

waar  $i = 1, 2, \dots, (N-1)$ .

Skematies stel ons die basisfunksies  $\phi_i$  en  $\psi_i$  in figure 5.2 en 5.3 respektiewelik sō voor:



FIGUUR 5.2: Voorstelling van basisfunksies.



FIGUUR 5.3: Voorstelling van basisfunksies.

### 5.3 DIE GRTG-METODE IN GEVAL VAN DIRICHLET-VOORWAARDES

Ons beskou die golfvergelyking

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad (x,t) \in [0,1] \times (0,T]$$

met homogene randvoorwaardes

$$u(0,t) = 0 = u(1,t) \quad , \quad t > 0$$

en twee verskillende beginvoorwaardes naamlik

$$(i) \quad u(x,0) = f(x) = \sin \pi x \quad \dots (5.7)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0$$

$$(ii) \quad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0. \quad \dots (5.8)$$

Hierdie randwaarde-probleem stel die beweging van 'n snaar met beginposisie  $f(x)$  en beginsnelheid  $g(x)$  voor.

Die eksakte oplossings van (5.7) en (5.8) word respektiewelik gegee deur [28] :

$$u(x,t) = \sin \pi x \cos \pi t \quad \dots (5.9)$$

en

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [ f^*(x-t) + f^*(x+t) ] \quad \dots (5.10)$$

met  $f^*$  die onewe periodiese uitbreiding van  $f$  met periode 2.

In besonder geld vir (5.10) dat

$$u(x, 1/6) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 1/3 \\ 2/3 & , 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ -2x + 2 & , 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$u(x, 1/3) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 1/6 \\ 1/3 & , 1/6 \leq x \leq 5/6 \\ -2x + 2 & , 5/6 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$u(x, \frac{1}{2}) = 0$$

$$u(x, 2/3) = -u(x, 1/3)$$

$$u(x, 5/6) = -u(x, 1/6)$$

en

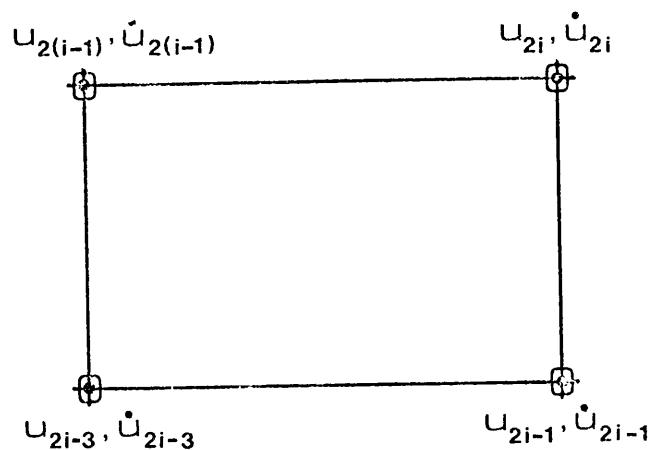
$$u(x, 1) = -u(x, 0)$$

Die eksakte oplossings van (5.7) en (5.8) word nou benader deur

$$u(x,t) \approx u^*(x,t) = \sum_{j=1}^{2(N-1)} u_j \phi_j + \sum_{j=1}^{2(N-1)} u_j \psi_j \quad \dots (5.11)$$

met  $u_j$  en  $\dot{u}_j$  die benaderde waardes van die oplossing en sy

afgeleides by die knooppunte (kyk figuur 5.4).



FIGUUR 5.4: Benaderde oplossing by knooppunte.

Die benaderde oplossing  $u^*(x, t)$  kan beskou word as 'n element van dié deelruimte voortgebring deur die basisfunksies  $\phi_i$  en  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, 2(N-1)$ . Ons beskou in (5.11) net basisfunksies wat verdwyn op die rand en gevolglik bevredig  $u^*(x, t)$  die homogene randvoorwaardes

$$u(0, t) = 0 = u(1, t).$$

Die GRTG-benadering  $u^*(x, t)$  word nou gedefinieer deur die stelsels

$$(u_{tt}^* - u_{xx}^*, \phi_i) = 0, \quad i = 2, 4, \dots, 2(N-1) \dots (5.12)$$

en  $(u_{tt}^* - u_{xx}^*, \psi_i) = 0, \quad i = 2, 4, \dots, 2(N-1) \dots (5.13)$

met

$$(f, g) = \int_0^k \int_0^1 f g \, dx \, dt.$$

Maar

$$\begin{aligned}
 (u_{tt}^*, \phi_i) &= \int_0^k \int_0^1 u_{tt}^* \phi_i \, dx \, dt \\
 &= \int_0^1 \int_0^k u_{tt}^* \phi_i \, dt \, dx \\
 &= \int_0^1 \left\{ u_t^* \phi_i(x, t) \Big|_0^k - \int_0^k u_t^* \frac{\partial}{\partial t} \phi_i \, dt \right\} dx \\
 &= \int_0^1 \{ u_t^*(x, k) \phi_i(x, k) - u_t^*(x, 0) \phi_i(x, 0) \} dx - \int_0^1 \int_0^k u_t^* \frac{\partial}{\partial t} \phi_i \, dt \, dx \\
 &= \int_0^1 u_t^*(x, k) \phi_i(x, k) dx - \int_0^1 \int_0^k u_t^* \frac{\partial}{\partial t} \phi_i \, dt \, dx. \\
 &= \langle\langle u_t^*, \phi_i \rangle\rangle - (u_t^*, \frac{\partial}{\partial t} \phi_i)
 \end{aligned}$$

want  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$  en  $\langle\langle f, g \rangle\rangle = \int_0^1 f g \, dx$

Netso is

$$(u_{tt}^*, \psi_i) = \langle\langle u_t^*, \psi_i \rangle\rangle - (u_t^*, \frac{\partial}{\partial t} \psi_i)$$

Verder is

$$\begin{aligned}
 (u_{xx}^*, \psi_i) &= \int_0^k \int_0^1 u_{xx}^* \psi_i \, dx \, dt \\
 &= \int_0^k \left\{ u_x^*(1, t) \psi_i(1, t) - u_x^*(0, t) \psi_i(0, t) - \int_0^1 u_x^* \frac{\partial}{\partial x} \psi_i \, dx \right\} dt \\
 &= -(u_x^*, \frac{\partial}{\partial x} \psi_i)
 \end{aligned}$$

want  $\psi_i(1, t) = \psi_i(0, t) = 0$  vir alle  $i$ .

Netso is

$$(u_{xx}^*, \psi_i) = -(u_x^*, \frac{\partial}{\partial x} \psi_i)$$



Die stelsels (5.12) en (5.13) word dan

$$\ll u_t^*, \phi_i \gg - (u_t^*, \frac{\partial}{\partial t} \phi_i) + (u_x^*, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i) = 0 \quad \dots (5.14)$$

en

$$\ll u_t^*, \psi_i \gg - (u_t^*, \frac{\partial}{\partial t} \psi_i) + (u_x^*, \frac{\partial}{\partial x} \psi_i) = 0 \quad \dots (5.15)$$

met  $i = 2, 4, \dots, 2(N-1)$ .

Deur (5.11) nou in (5.14) en (5.15) te vervang, verkry ons die volgende stelsels:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2(N-1)} \ll \frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \phi_i \gg u_j - \sum_{j=1}^{2(N-1)} (\frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \frac{\partial}{\partial t} \phi_i) u_j + \sum_{j=1}^{2(N-1)} (\frac{\partial}{\partial x} \phi_j, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i) u_j \\ & + \sum_{j=1}^{2(N-1)} \ll \frac{\partial}{\partial t} \psi_j, \phi_i \gg \dot{u}_j - \sum_{j=1}^{2(N-1)} (\frac{\partial}{\partial t} \psi_j, \frac{\partial}{\partial t} \phi_i) \dot{u}_j + \sum_{j=1}^{2(N-1)} (\frac{\partial}{\partial x} \psi_j, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i) \dot{u}_j \\ & = 0 \quad , \quad i = 2, 4, \dots, 2(N-1), \quad \dots (5.16) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2(N-1)} \ll \frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \psi_i \gg u_j - \sum_{j=1}^{2(N-1)} (\frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}) u_j + \sum_{j=1}^{2(N-1)} (\frac{\partial}{\partial x} \phi_j, \frac{\partial}{\partial x} \psi_i) u_j \\ & + \sum_{j=1}^{2(N-1)} \ll \frac{\partial}{\partial t} \psi_j, \psi_i \gg \dot{u}_j - \sum_{j=1}^{2(N-1)} (\frac{\partial}{\partial t} \psi_j, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}) \dot{u}_j + \sum_{j=1}^{2(N-1)} (\frac{\partial}{\partial x} \psi_j, \frac{\partial}{\partial x} \psi_i) \dot{u}_j \\ & = 0 \quad , \quad i = 2, 4, \dots, 2(N-1), \quad \dots (5.17) \end{aligned}$$

Uit die beginvoorwaardes word die waardes van  $u_1, u_3, \dots, u_{2N-3}$  en  $\dot{u}_1, \dot{u}_3, \dots, \dot{u}_{2N-3}$  bereken. In die stelsels (5.16) en (5.17) het ons dus  $2(N-1)$  onbekendes naamlik  $u_2, u_4, \dots, u_{2(N-1)}$  en  $\dot{u}_2, \dot{u}_4, \dots, \dot{u}_{2(N-1)}$  met  $2(N-1)$  vergelykings waaruit die

oplossing bereken kan word. Die stelsels reël seer dus na die volgende matriksvergelyking:

$$A \underline{u} = B \underline{v} \quad \dots (5.18)$$

met A en B  $2(N-1) \times 2(N-1)$  matrikse,

$$\underline{u} = (u_2, \dot{u}_2, \dots, u_{2(N-1)}, \dot{u}_{2(N-1)})$$

$$\text{en } \underline{v} = (u_1, \dot{u}_1, \dots, u_{2N-3}, \dot{u}_{2N-3}).$$

Indien die elemente van A en B deur  $a_{m,\ell}$  en  $b_{m,\ell}$  respektiewelik gegee word is:

$$a_{m,2\ell-1} = \ll \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell}, \phi_{2m} \gg - \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2m} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2m} \right)$$

$$a_{m,2\ell} = \ll \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2\ell}, \phi_{2m} \gg - \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2m} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2m} \right)$$

met  $m = 1, \dots, (N-1)$  en  $\ell = 1, \dots, (N-1)$ .

$$a_{(N-1)+m,2\ell-1} = \ll \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell}, \psi_{2m} \gg - \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2m} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2m} \right)$$

$$a_{(N-1)+m,2\ell} = \ll \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2\ell}, \psi_{2m} \gg - \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2m} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2\ell}, \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2m} \right)$$

met  $m = 1, \dots, (N-1)$  en  $\ell = 1, \dots, (N-1)$ .

$$b_{m,2\ell-1} = -\ll \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell-1}, \phi_{2m} \gg + \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2m} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2m} \right)$$

$$b_{m,2\ell} = -\ll \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2\ell-1}, \phi_{2m} \gg + \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2m} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2m} \right)$$

met  $m = 1, \dots, (N-1)$  en  $\ell = 1, \dots, (N-1)$ .

$$b_{(N-1)+m,2\ell-1} = -\ll \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell-1}, \psi_{2m} \gg + \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2m} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2m} \right)$$

$$b_{(N-1)+m,2\ell} = -\ll \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2\ell-1}, \psi_{2m} \gg + \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2m} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2\ell-1}, \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2m} \right)$$

met  $m = 1, \dots, N-1$  en  $\ell = 1, \dots, N-1$ .

Deur berekening van die binneprodukte word die elemente van A en B deur die volgende formules gegee:

$$a_{1,1} = -0,8 \frac{h}{k} + \frac{26k}{35h}$$

$$a_{1,2} = \frac{h}{15} - \frac{11k^2}{105h} + \frac{2h}{3}$$

$$a_{1,3} = -\frac{h}{5k} - \frac{13k}{35h}$$

$$a_{1,4} = \frac{h}{60} + \frac{11k^2}{210h} + \frac{h}{6}$$

$$a_{1,i} = 0, \quad i \geq 5$$

$$a_{2,1} = a_{1,3}$$

$$a_{2,2} = a_{1,4}$$

$$a_{2,3} = a_{1,1}$$

$$a_{2,4} = a_{1,2}$$

$$a_{2,5} = a_{1,3}$$

$$a_{2,6} = a_{1,4}$$

$$a_{2,i} = 0, \quad i \geq 7.$$

$$a_{j,i+2(j-2)} = a_{2,i}, \quad j=3, \dots, (N-2) \text{ met } i=1, \dots, 6$$

$$a_{N-1,2N-6+i} = a_{2,i}, \quad i=1,2,3,4.$$

$$a_{N,1} = -\frac{h}{15} - \frac{11k^2}{105h}$$

$$a_{N,2} = -\frac{4hk}{45} + \frac{2k^3}{105h}$$

$$a_{N,3} = \frac{h}{60} + \frac{11k^2}{210h}$$

$$a_{N,4} = -\frac{hk}{45} - \frac{k^3}{105h}$$

$$a_{N+1,1} = a_{N,3}$$

$$a_{N+1,2} = a_{N,4}$$

$$a_{N+1,3} = a_{N,1}$$

$$a_{N+1,4} = a_{N,2}$$

$$a_{N+1,5} = a_{N,3}$$

$$a_{N+1,6} = a_{N,4}$$

$$a_{N-1+j, i+2(j-2)} = a_{N+1,i}, \quad j=3, \dots, N-2 \text{ met } i=1, \dots, 6.$$

$$a_{2(N-1), 2N-6+i} = a_{N+1,i}, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

$$b_{1,1} = -\frac{0,8h}{k} - \frac{9k}{35h}$$

$$b_{1,2} = -\frac{h}{15} - \frac{13k^2}{210h}$$

$$b_{1,3} = -\frac{h}{5k} + \frac{9k}{70h}$$

$$b_{1,4} = -\frac{h}{60} + \frac{13k^2}{420h}$$

$$b_{2,1} = b_{1,3}$$

$$b_{2,2} = b_{1,4}$$

$$b_{2,3} = b_{1,1}$$

$$b_{2,4} = b_{1,2}$$

$$b_{2,5} = b_{1,3}$$

$$b_{2,6} = b_{1,4}$$

$$b_{2,i} = 0, \quad i \geq 7$$

$$b_{j, i+2(j-2)} = b_{2,i}, \quad j=3, \dots, (N-2) \text{ met } i=1, \dots, 6,$$

$$b_{N-1, 2N-6+i} = b_{2,i}, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

$$b_{N,1} = \frac{h}{15} + \frac{13k^2}{210h}$$

$$b_{N,2} = -\frac{hk}{45} + \frac{k^3}{70h}$$

$$b_{N,3} = \frac{h}{60} - \frac{13k^2}{420h}$$

$$b_{N,4} = -\frac{hk}{180} - \frac{k^3}{140h}$$

$$b_{N+1,1} = b_{N,3}$$

$$b_{N+1,2} = b_{N,4}$$

$$b_{N+1,3} = b_{N,1}$$

$$b_{N+1,4} = b_{N,2}$$

$$b_{N+1,5} = b_{N,3}$$

$$b_{N+1,6} = b_{N,4}$$

$$b_{N-1+j, i+2(j-2)} = b_{N+1, i} \quad , \quad j=3, \dots, N-2 \quad \text{met } i=1, \dots, 6.$$

$$b_{2(N-1), 2N-6+i} = b_{N+1, i} \quad , \quad i=1, \dots, 4.$$

Ons los dus uit die stelsel (5,18) op vir  $u_2, \dot{u}_2, \dots, u_{2(N-1)}, \dot{u}_{2(N-1)}$  en dié waardes tree dan as beginvoorwaardes op om die oplossing by die volgende tydinterval te bereken. Ons kry dus 'n stelsel

$$A \tilde{u}^i = B \tilde{u}^{i-1} \quad , \quad i=1, \dots, \dots \quad (5.19)$$

wat herhaaldelik opgelos word totdat die verlangde tydstep bereik is.

### 5.3.1 Numeriese resultate

As foutnorm gebruik ons weer die gemengde norm wat in § 4.3.1.1 gedefinieer is naamlik

$$\| u - u^* \| = \frac{| u(x,t) - u^*(x,t) |}{1 + | u(x,t) |} .$$

Ons beskou eerstens die numeriese resultate wat verkry is met die beginvoorwaardes

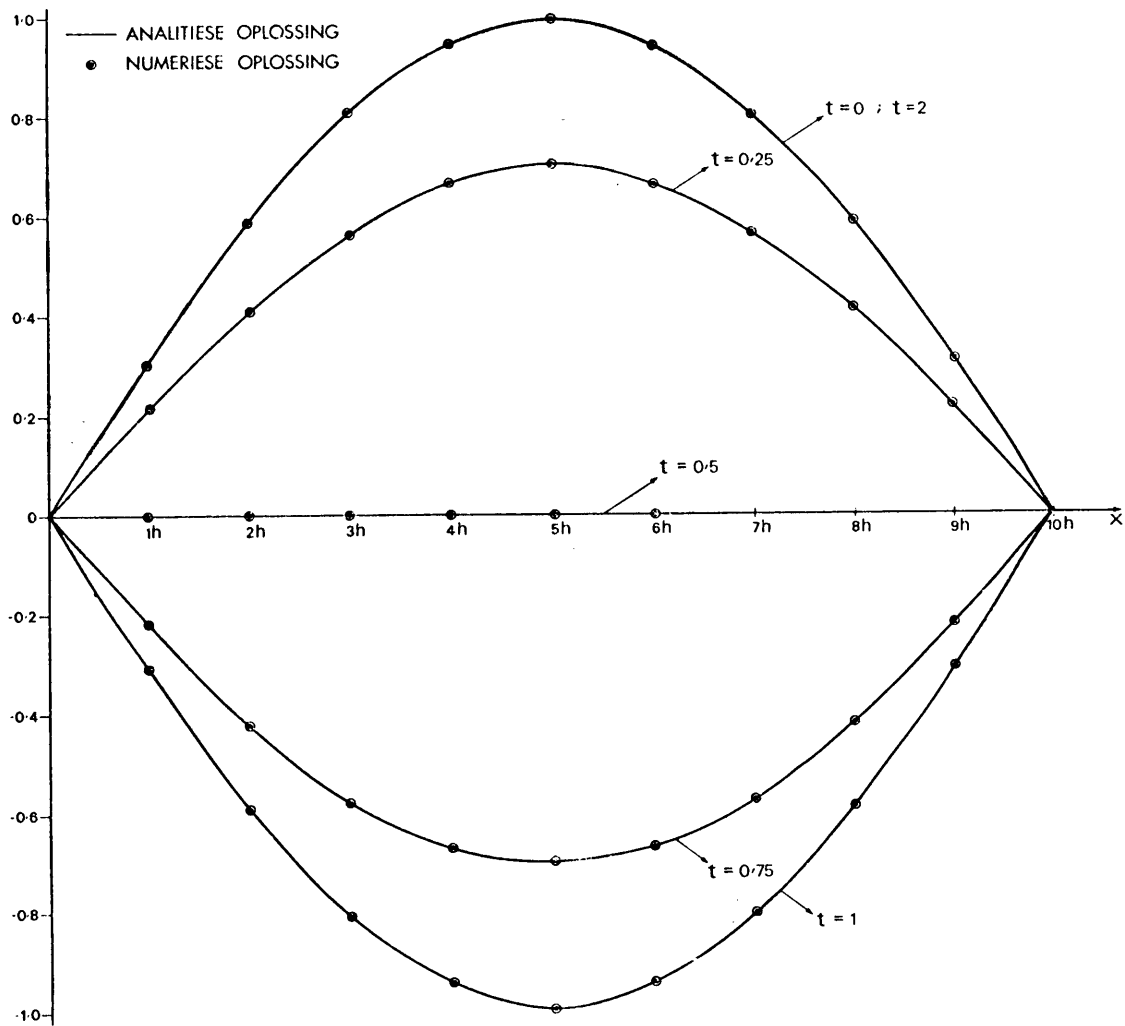
$$u(x,0) = \sin \pi x$$

$$\text{en } u_t(x,0) = 0.$$

In tabel 5.1 volg 'n uittreksel van die numeriese resultate verkry deur die interval in 10 gelyke dele te verdeel ( $h = 1/10$ ) en vir die tydstappe  $k = 0,05$  sekondes te kies.

TABEL 5.1

$u(x,0) = \sin \pi x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad h = 0,1, \quad k = 0,05$						
t	$u(0,2;t)$	$u^*(0,2;t)$	$\ u - u^*\ $	$u(0,5;t)$	$u^*(0,5;t)$	$\ u - u^*\ $
0	0,587785	0,587785	0	1	1	0
0,25	0,415627	0,414125	1,1 E-3	0,707107	0,704551	1,5 E-3
0,50	0	-0,419 E-2	4,2 E-3	0	-0,714 E-2	7,1 E-3
0,75	-0,415627	-0,420023	3,1 E-3	-0,707107	-0,714585	4,4 E-3
1,00	-0,587785	-0,587670	7,2 E-5	-1	-0,999805	9,8 E-5
1,25	-0,415627	-0,408106	5,3 E-3	-0,707107	-0,694311	7,5 E-3
1,50	0	0,0127	1,3 E-2	0	0,213 E-1	2,1 E-2
1,75	0,415627	0,425794	7,2 E-3	0,707107	0,724404	1,0 E-2
2,00	0,587785	0,587437	2,2 E-4	1	0,999407	3,0 E-4
2,25	0,415627	0,402005	9,6 E-3	0,707107	0,683932	1,4 E-2
2,50	0	-0,209 E-1	2,1 E-2	0	-0,356 E-1	3,6 E-2
2,75	-0,415627	-0,431478	1,1 E-2	-0,707107	-0,734074	1,6 E-2
3,00	-0,587785	-0,587084	4,4 E-4	-1	-0,998807	6,0 E-4
3,25	-0,415627	-0,395825	1,4 E-2	-0,707107	-0,673417	2,0 E-2
3,50	0	0,293 E-1	2,9 E-2	0	0,498 E-1	5,0 E-2
3,75	0,415627	0,437073	1,5 E-2	0,707107	0,743594	2,1 E-2
4,00	0,587785	0,586612	7,4 E-4	1	0,998005	1,0 E-3
4,25	0,415627	0,389564	1,8 E-2	0,707107	0,662767	2,6 E-2
4,50	0	-0,3763 E-1	3,8 E-2	0	-0,640 E-1	6,4 E-2
4,75	-0,415627	-0,442580	1,9 E-2	-0,707107	-0,752961	2,7 E-2
5,00	-0,587785	-0,586022	1,1 E-3	-1	-0,997000	1,5 E-3
5,25	-0,415627	-0,383227	2,3 E-2	-0,707107	-0,651984	3,2 E-2
5,50	0	0,460 E-1	4,6 E-2	0	0,782 E-1	7,8 E-2
5,75	0,415627	0,447995	2,3 E-2	0,707107	0,762174	3,2 E-2
6,00	0,587785	0,585313	1,6 E-3	1	0,995793	2,0 E-3
6,25	0,415627	0,376812	2,7 E-2	0,707107	0,641071	3,9 E-2
6,50	0	-0,543 E-1	5,4 E-2	0	-0,924 E-1	9,2 E-2
6,75	-0,415627	-0,453318	2,7 E-2	-0,707107	-0,771231	3,8 E-2
7,00	-0,587785	-0,584485	2,1 E-3	-1	-0,994385	2,8 E-3
7,25	-0,415627	-0,370323	3,2 E-2	-0,707107	-0,630030	4,5 E-2
7,50	0	0,626 E-1	6,3 E-2	0	0,1065	1,1 E-1
7,75	0,415627	0,458548	3,0 E-2	0,707107	0,780129	4,3 E-2
8,00	0,587785	0,583539	2,7 E-3	1	0,992776	3,6 E-3
8,25	0,415627	0,363759	3,7 E-2	0,707107	0,618864	5,2 E-2
8,50	0	-0,709 E-1	7,1 E-2	0	-0,1207	1,2 E-1
8,75	-0,415627	-0,463685	3,4 E-2	-0,707107	-0,788868	4,8 E-2
9,00	-0,587785	-0,582475	3,3 E-3	-1	-0,990965	4,5 E-3



FIGUUR 5-5 Oplossing van golfvergelyking met  $u(x;0) = \sin \pi x$ ,  $h = 0.1$ ,  $k = 0.05$

In figuur 5.5 toon ons die posisie van die snaar aan by  $t = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$  en  $2,0$  sekondes, dit wil sê na een periode voltooi is. Slegs die numeriese oplossing word voorgestel in figuur 5.5 aangesien daar grafies nie onderskeid tussen die benaderde en eksakte oplossing getref kan word nie.

In tabel 5.2 beskou ons die verhouding van  $|\text{maks } u^*(x,t)| / |\text{maks } u(x,t)|$  oor elk van die periodes.

TABEL 5.2

Periode	tydinterval	$ \text{maks } u^* $	$ \text{maks } u $	$ \text{maks } u^*/\text{maks } u $
1	0 - 2 sek	1	1	1
2	2 - 4 "	0,999407	1	0,999407
3	4 - 6 "	0,998807	1	0,998807
4	6 - 8 "	0,998298	1	0,998298
4,5	8 - 9 "	0,998728	1	0,998728

Uit die oplossing van (5.19) word die snelheid van die snaar ook verkry. In tabel 5.3 gee ons dié resultate aan vir  $x = 0,5$ .

TABEL 5.3

$u(x,0) = \sin \pi x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad h = 0,1, \quad k = 0,05, \quad x = 0,5$							
t	$\dot{u}(x,t)$	$\dot{u}^*(x,t)$	$\ \dot{u} - \dot{u}^*\ $	t	$\dot{u}(x,t)$	$\dot{u}^*(x,t)$	$\ \dot{u} - \dot{u}^*\ $
0	0	0	0	4,75	-2,221	-2,075	4,5 E-2
0,25	-2,221	-2,239	5,6 E-3	5,0	0	0,224	2,2 E-1
0,50	-3,142	-3,156	3,4 E-3	5,25	2,221	2,391	5,3 E-2
0,75	-2,221	-2,207	4,3 E-3	5,50	3,142	3,145	7,2 E-4
1,00	0	0,045	4,5 E-2	5,75	2,221	2,040	5,6 E-2
1,25	2,221	2,271	1,6 E-2	6,00	0	-0,2691	2,7 E-1
1,50	3,142	3,155	3,1 E-3	6,25	-2,221	-2,420	6,2 E-2



TABEL 5.3(vervolg)

$u(x,0) = \sin \pi x, \quad u_t(x,0) = 0 \quad h = 0,1, \quad k = 0,05, \quad x = 0,5$							
t	$\dot{u}(x,t)$	$\dot{u}^*(x,t)$	$\ u - u^*\ $	t	$\dot{u}(x,t)$	$\dot{u}^*(x,t)$	$\ u - u^*\ $
1,75	2,221	2,175	1,4 E-2	6,50	-3,142	-3,140	4,8 E-4
2,00	0	-0,0898	9,0 E-2	6,75	-2,221	-2,006	6,7 E-2
2,25	-2,221	-2,301	2,5 E-2	7,00	0	0,314	3,1 E-1
2,50	-3,142	-3,153	2,7 E-3	7,25	2,221	2,448	7,0 E-2
2,75	-2,221	-2,142	2,5 E-2	7,50	3,142	3,136	1,4 E-3
3,00	0	0,1347	1,3 E-1	7,75	2,221	1,971	7,8 E-2
3,25	2,221	2,332	3,4 E-2	8,00	0	-0,358	3,6 E-1
3,50	3,142	3,151	2,2 E-3	8,25	-2,221	-2,476	7,9 E-2
3,75	2,221	2,108	3,5 E-2	8,50	-3,142	-3,130	2,9 E-3
4,00	0	-0,179	1,8 E-1	8,75	-2,221	-1,935	8,9 E-2
4,25	-2,221	-2,361	4,3 E-2	9,00	0	0,4030	4,0 E-1
4,50	-3,142	-3,148	1,4 E-3				

Uit tabel 5.3 sien ons duidelik dat die maksimumfout vir die snelheid van die snaar, oor elke periode, by  $t = 1, 2, \dots, 9$  sekondes voorkom, dit wil sê op dié tydstippe waar die bewegingsrigting van die snaar verander.

Tweedens beskou ons nou die numeriese resultate wat verkry is met die beginvoorwaarde

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 . \end{cases}$$

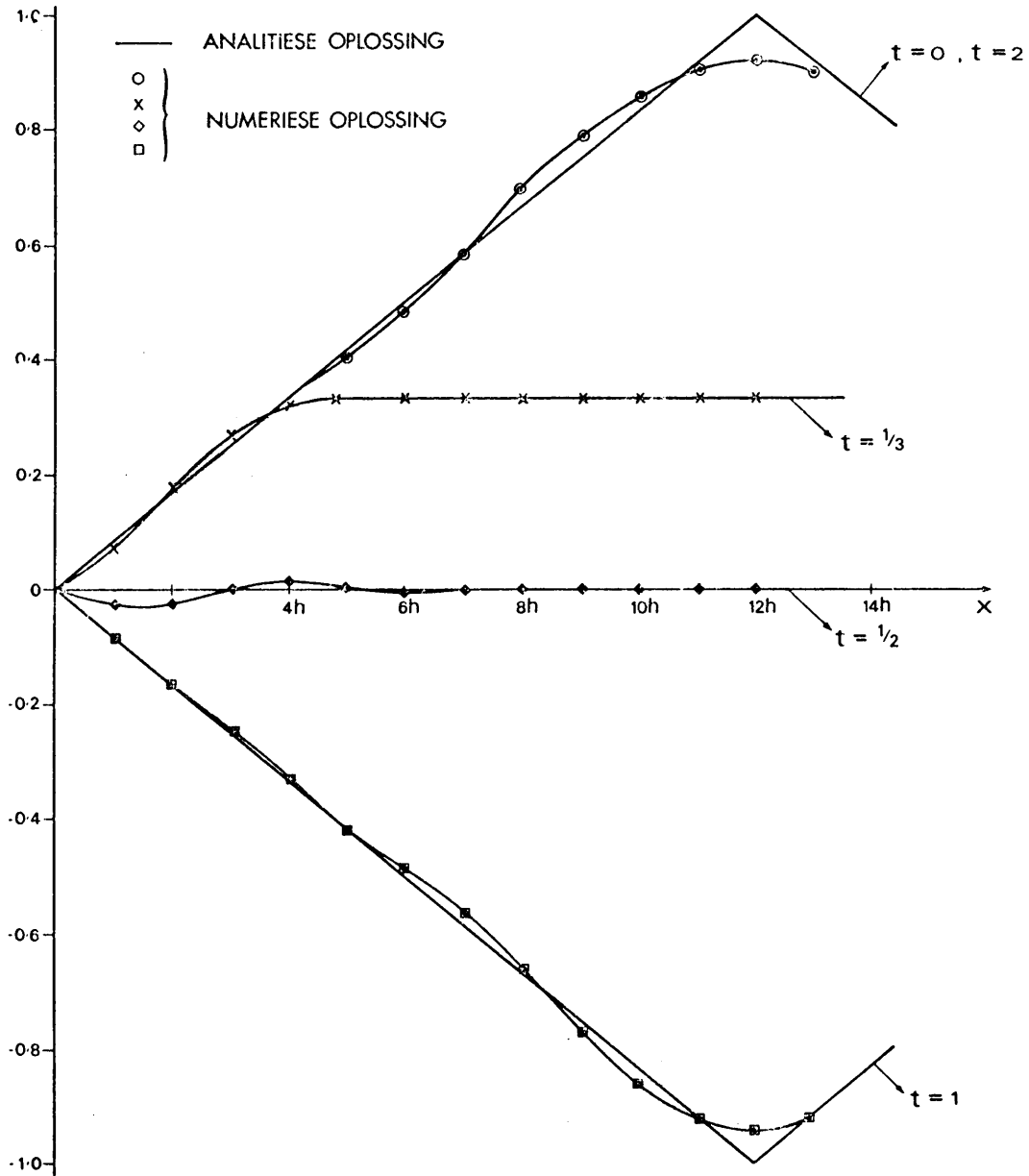
In tabel 5.4 volg 'n uittreksel van die numeriese resultate wat verkry word deur die interval in 24 gelyke dele te verdeel ( $h = 1/24$ ). In die stelsel (5.19) is A en B, met  $h = 1/24$ , twee  $46 \times 46$  matrikse wat weens simmetrie na  $24 \times 24$  matrikse gereduseer kan word. Die benaderde oplossing verkry met die GRTG-metode word in tabel 5.4 met die

eksakte oplossing en 'n benaderde oplossing, verkry deur 'n eindige-verskil-metode, (kyk Bylaag D) vergelyk. Vir die eindige-verskil-metode is  $h$  egter  $1/48$  geneem want dié waarde van  $h$  lewer 'n  $24 \times 24$  stelsel wat opgelos moet word. Ons vergelyk dus die numeriese resultate verkry deur dieselfde orde stelsels te beskou. In tabel 5.4 dui  $u(x,t)$ ,  $u^*(x,t)$  en  $u^{**}(x,t)$  die eksakte-, GRTG- en eindige-verskil-oplossings respektiewelik aan.

TABEL 5.4

h = 1/24, k = 1/30, x = 0,5				h = 1/48, k = 1/30, x = 0,5	
t	u(x,t)	u*(x,t)	u-u*	u**(x,t)	u-u**
0	1	1	0	1	0
1/6	2/3	0,665785	5,3 E-4	0,680092	8,1 E-3
1/3	1/3	0,333318	1,1 E-5	0,341297	6,0 E-3
1/2	0	-0,463 E-4	4,6 E-5	0,129 E-2	1,3 E-3
2/3	-1/3	-0,329527	2,9 E-3	-0,337256	2,9 E-3
5/6	-2/3	-0,658189	5,1 E-3	-0,668192	9,2 E-4
1	-1	-0,935846	3,2 E-2	-0,913476	4,3 E-2
7/6	-2/3	-0,665534	6,8 E-4	-0,741973	4,5 E-2
4/3	-1/3	-0,332484	6,4 E-4	-0,287654	3,4 E-2
3/2	0	-0,417 E-2	4,2 E-3	-0,214 E-1	2,1 E-2
5/3	1/3	0,337906	3,4 E-3	0,343230	7,4 E-3
11/6	2/3	0,706294	2,4 E-2	0,668691	1,2 E-3
2	1	0,917929	4,1 E-2	0,868665	6,6 E-2

In figuur 5.6 stel ons die eksakte en benaderde posisie van die snaar by  $t = 0, 1/3, 1/2, 1$  en  $2$  sekondes voor.



FIGUUR 5-6 Oplossing van golfvergelyking met  $u(x,0) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 < x < 1 \end{cases}$

$h = 1/24, \quad k = 1/30$

### 5.3.1.1 Bespreking van numeriese resultate

Indien die interval  $[0,1]$  in  $N$  gelyke deelintervalle verdeel word, is  $A$  en  $B$  twee  $(2N \times 2N)$  matrikse. Die rede hiervoor is dat die funksie sowel as die afgeleide by 'n knooppunt benader word. By die Crank-Nicolson-metode kry ons 'n  $(N \times N)$  stelsel indien die interval in  $N$  gelyke dele verdeel word. Die prys wat dus betaal moet word om 'n benadering vir die afgeleide te kry, is om 'n groter stelsel op te los.

Uit die stelsel (5.19) word die benaderde oplossing vir die golfvergelyking met verskillende beginvoorwaardes sonder moeite bereken deur telkens net die nodige aanpassing vir die beginoplossing  $\underline{u}^{(0)}$  te maak. Die matrikse  $A$  en  $B$  bly deurgaans presies dieselfde.

Uit tabel 5.1 volg dat die GRTG-metode 'n besonder akkurate benadering vir die eksakte oplossing van (5.7) lewer. Die swakste benaderings kom voor wanneer die teoretiese oplossing

$$u(x, t_i) \equiv 0 \text{ vir alle } x \in (0,1)$$

$$\text{en } t_i = (\frac{1}{2} + i), \quad i = 0, \dots, 8.$$

In besonder is die fout na 8,5 sekondes by  $x=0,5$  van die orde  $O(E-1)$  terwyl na 9 sekondes die fout van die orde  $O(E-3)$  is.

In tabel 5.2 sien ons dat, na die verloop van 4,5 periodes, die verhouding

$$\left| \max_x u^*(x, t) \right| / \left| \max_x u(x, t) \right| = 0,998728 .$$

Dit gee vir ons 'n aanduiding dat die GRTG-metode uiters stabiel is. Die groei van die foutnorm in tabel 5.1 kan dus ook daaraan toegeskryf word dat die beweging van die snaar na verloop van tyd uit fase raak met die eksakte oplossing alhoewel die relatiewe periodiese beweging steeds baie nou ooreenstem. Uit tabel 5.3 volg dat die benaderde waardes vir die snelheid van die snaar besonder akkuraat is indien die snelheid van die snaar groot is. In besonder is die fout na 8,5 sekondes slegs van die orde  $O(E-3)$ . Op die tydstippe waar die teoretiese snelheid van die snaar egter nul is, is die benadering nie so goed nie. Byvoorbeeld: Na 9 sekondes is die fout van die orde  $O(E-1)$ . Weereens is hierdie fout waarskynlik te wyte aan die feit dat die twee oplossings effens uit fase begin raak en is dus nie so ernstig nie.

In tabel 5.4 sien ons dat die GRTG-metode met  $h = 1/24$  goed vergelyk met die Crank-Nicolson-metode met  $h = 1/48$ . Soos te verwag is, sien ons in figuur 5.6 dat die GRTG-benadering by die punte waar die beginfunksie nie differensieerbaar is nie, die grootste fout lewer.

Die waardes van  $k$  is ook vir beide beginvoorwaardes gevarieer. Hoe kleiner die waarde van  $k$  geneem word, hoe groter word die aantal iterasies van die stelsel (5.19). In tabel 5.1 is die stelsel, vir  $k = 0,05$ , 180 keer agtereenvolgens opgelos om die oplossing by  $t = 9$  sekondes te vind. In tabel 5.4 is die stelsel 60 keer agtereenvolgens opgelos om die oplossing by  $t = 2$  sekondes te vind. Aangesien die stelsel (5.19) reduceer na 'n  $24 \times 24$  stelsel, word daar dus 'n ekonomiese

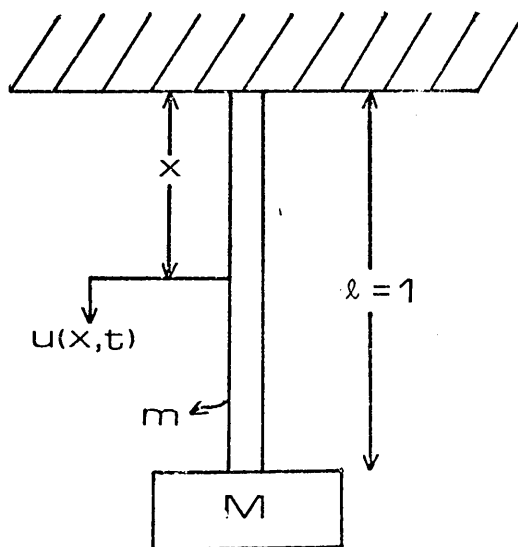
balans tussen die grootte van  $k$  en die aantal stappe gehandhaaf.

Die berekening van die binneprodukte om die elemente van die matrikse  $A$  en  $B$  in (5.19) te bepaal, vereis die meeste werk in die GRTG-metode. Aangesien die basisfunksies egter kompakte draers het, is dit slegs nodig om 'n beperkte aantal binneprodukte te bereken. Uit die simmetrie van die basisfunksies kan die orige binneprodukte dan verkry word.

Vir die golfvergelyking met Dirichlet-randvoorwaardes lewer die GRTG-metode dus 'n ekonomiese, kompeterende en betroubare metode om die benaderde oplossing te bereken.

#### 5.4 DIE GRTG-BENADERING IN DIE GEVAL VAN NEUMANN-RAND- VOORWAARDES

Ons beskou die klassieke probleem van die vertikale vibrasie van 'n elastiese veer of staaf met 'n massa  $M$  by die vrye endpoint (figuur 5.7).



FIGUUR 5,7

Indien die massa van die veer  $m$  verwaarloos word, dan voer  $M$  'n enkelvoudige harmoniese beweging uit in 'n vertikale lyn. As ons egter toelaat vir die massa van die veer kry ons die volgende gekoppelde randwaarde-probleem (die onbetrokke konstantes word gelyk aan een gestel):

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad (x, t) \in [0, 1] \times (0, T]$$

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{by } x = 1 \quad .$$

Deur die skaaltransformasie  $t = M^{\frac{1}{2}} \tau$  toe te pas, word hierdie vergelykings [38] :

$$\varepsilon^2 u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad , \quad (x, t) \in [0, 1] \times (0, T] \quad , \quad \dots \quad (5.20)$$

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad \dots \quad (5.21)$$

$$u_{tt} + u_x = 0 \quad \text{by } x = 1 \quad , \quad \dots \quad (5.22)$$

met beginvoorwaardes

$$u(x, 0) = f(x) \quad \dots \quad (5.23)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad \dots \quad (5.24)$$

waar  $\varepsilon^2 = m/M$ .

Ons stel nou in die oplossing van (5.20) (5.24) belang as  $\varepsilon$  nie weglaatbaar klein is nie.

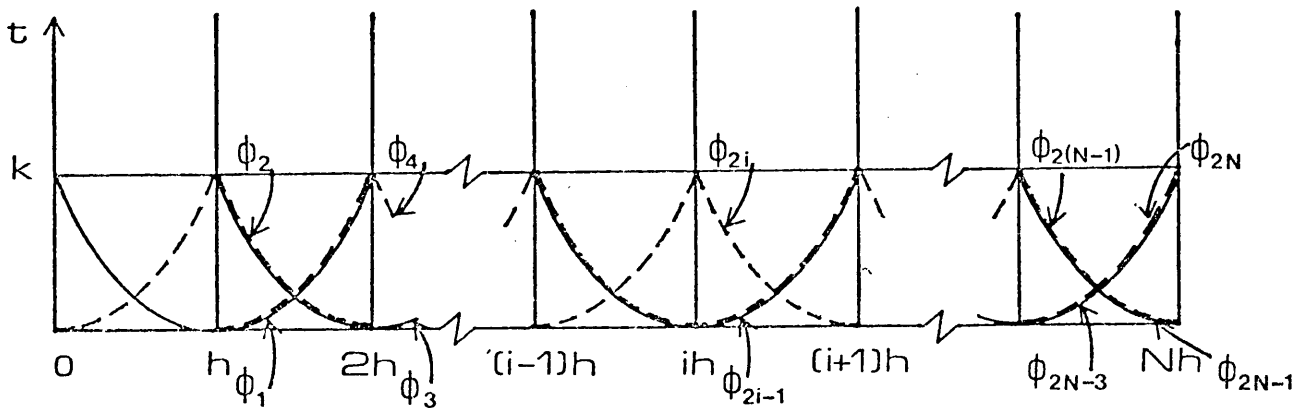
Beskou nou in besonder die geval waar

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

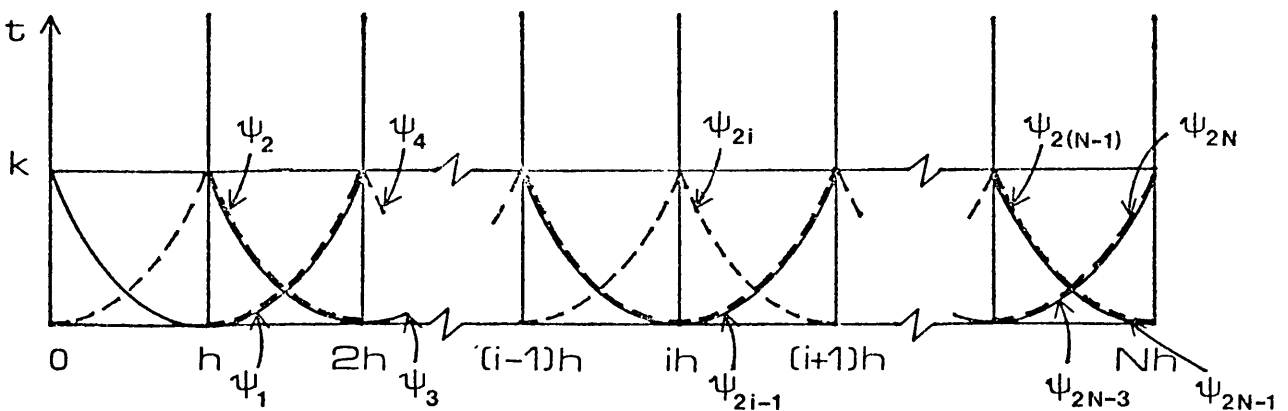
$$g(x) = 0.$$

Dit stem ooreen met 'n lineêr uitgerekte veer wat uit rus losgelaat word.

Ons kies presies dieselfde basisfunksies as in paragraaf 5.2 asook dieselfde verdeling van die gebied soos in figure 5.8 en 5.9 aangetoon. Aangesien ons by die rand  $x=1$  'n gekoppelde randvoorwaarde het, word die basisfunksies  $\phi_{2N-1}$ ,  $\phi_{2N}$ ,  $\psi_{2N-1}$  en  $\psi_{2N}$  bygevoeg.



FIGUUR 5.8: Voorstelling van basisfunksies.



FIGUUR 5.9: Voorstelling van basisfunksies.



Die eksakte oplossing  $u(x,t)$  word nou benader deur  $u^*(x,t)$  met

$$u^*(x,t) = \sum_{j=1}^{2N} u_j \phi_j + \sum_{j=1}^{2N} \dot{u}_j \psi_j, \quad \dots (5.25)$$

Die randvoorwaarde

$$u(0,t) = 0$$

word deur  $u^*(x,t)$  bevredig terwyl die gekoppelde randvoorwaarde deur die Galerkin-benadering betrek word. Ons definieer dus  $u^*(x,t)$  so :

$$(\epsilon^2 u_{tt}^* - u_{xx}^*, \phi_i) + \langle u_{tt}^* + u_x^*, \phi_i \rangle = 0$$

en

$$(\epsilon^2 u_{tt}^* - u_{xx}^*, \psi_i) + \langle u_{tt}^* + u_x^*, \psi_i \rangle = 0$$

$$\text{met } i = 2, 4, \dots, 2N \quad \dots (5.26)$$

$$\text{waar } (v, w) = \int_0^k \int_0^1 v \cdot w \, dx \, dt$$

$$\text{en } \langle v, w \rangle = \int_0^k v(1,t) w(1,t) \, dt$$

Uit faktorintegrasie volg dat

$$(u_{tt}^*, \phi_i) = \langle\langle u_t^*, \phi_i \rangle\rangle - (u_t^*, \frac{\partial}{\partial t} \phi_i)$$

$$(u_{tt}^*, \psi_i) = \langle\langle u_t^*, \psi_i \rangle\rangle - (u_t^*, \frac{\partial}{\partial t} \psi_i)$$

$$(u_{xx}^*, \phi_i) = \langle u_x^*, \phi_i \rangle - (u_x^*, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i)$$

$$(u_{xx}^*, \psi_i) = \langle u_x^*, \psi_i \rangle - (u_x^*, \frac{\partial}{\partial x} \psi_i)$$

$$\text{met } \langle\langle v, w \rangle\rangle = \int_0^1 v(x,k) w(x,k) \, dx$$

Die stelsel (5.26) word dan

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \lll u_t^*, \phi_i \ggg - \epsilon^2 (u_t^*, \frac{\partial}{\partial t} \phi_i) - \langle u_x^*, \phi_i \rangle + (u_x^*, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i) \\ + \langle u_{tt}^* + u_x^*, \phi_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \lll u_t^*, \psi_i \ggg - \epsilon^2 (u_t^*, \frac{\partial}{\partial t} \psi_i) - \langle u_x^*, \psi_i \rangle + (u_x^*, \frac{\partial}{\partial x} \psi_i) \\ + \langle u_{tt}^* + u_x^*, \psi_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

net  $i = 2, 4, \dots, 2N$  ... (5.27)

Vervang nou (5.25) in (5.27) dan verkry ons

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2N} \epsilon^2 \lll \frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \phi_i \ggg u_j - \epsilon^2 \sum_{j=1}^{2N} (\frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \frac{\partial}{\partial t} \phi_i) u_j \\ + \sum_{j=1}^{2N} \langle \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t^2}, \phi_i \rangle u_j + \sum_{j=1}^{2N} (\frac{\partial}{\partial x} \phi_j, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i) u_j \\ + \epsilon^2 \sum_{j=1}^{2N} \lll \frac{\partial}{\partial t} \psi_j, \phi_i \ggg \dot{u}_j - \epsilon^2 \sum_{j=1}^{2N} (\frac{\partial}{\partial t} \psi_j, \frac{\partial}{\partial t} \phi_i) \dot{u}_j \\ + \sum_{j=1}^{2N} (\frac{\partial}{\partial x} \psi_j, \frac{\partial}{\partial x} \phi_i) \dot{u}_j + \sum_{j=1}^{2N} \langle \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2}, \phi_i \rangle \dot{u}_j \\ = 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \sum_{j=1}^{2N} \lll \frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \psi_i \ggg \dot{u}_j - \epsilon^2 \sum_{j=1}^{2N} (\frac{\partial}{\partial t} \phi_j, \frac{\partial}{\partial t} \psi_i) \dot{u}_j \\ + \sum_{j=1}^{2N} (\frac{\partial}{\partial x} \phi_j, \frac{\partial}{\partial x} \psi_i) \dot{u}_j + \sum_{j=1}^{2N} \langle \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial t^2}, \psi_i \rangle \dot{u}_j \\ + \epsilon^2 \sum_{j=1}^{2N} \lll \frac{\partial}{\partial t} \psi_j, \psi_i \ggg \dot{u}_j - \epsilon^2 \sum_{j=1}^{2N} (\frac{\partial}{\partial t} \psi_j, \frac{\partial}{\partial t} \psi_i) \dot{u}_j \\ + \sum_{j=1}^{2N} (\frac{\partial}{\partial x} \psi_j, \frac{\partial}{\partial x} \psi_i) \dot{u}_j + \sum_{j=1}^{2N} \langle \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2}, \psi_i \rangle \dot{u}_j \end{aligned}$$

$$= 0, \quad 1 = 2, 4, \dots, 2N \quad \dots \quad (5.28)$$

Die stelsel (5.28) lewer  $2N$  vergelykings vir die  $2N$  onbekendes naamlik

$$u_2, \dot{u}_2, \dots, u_{2N}, \dot{u}_{2N}$$

In matriksvorm kan (5.28) dan geskryf word as

$$A \underline{u} = B \underline{y} \quad \dots \quad (5.29)$$

met  $A$  en  $B$  twee  $(2N \times 2N)$  matrikse

$$\underline{u} = (u_2, \dot{u}_2, \dots, u_{2N}, \dot{u}_{2N})$$

$$\text{en } \underline{y} = (u_1, \dot{u}_1, \dots, u_{2N-1}, \dot{u}_{2N-1})$$

Die elemente  $a_{i,j}$  en  $b_{i,j}$  van  $A$  en  $B$  respektiewelik word deur die volgende vergelykings gegee:

$$a_{i,2j-1} = \epsilon^2 \langle\langle \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j}, \phi_{2i} \rangle\rangle - \epsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j}, \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2i} \right) \\ + \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2i} \right) + \left\langle \frac{\partial^2 \phi_{2j}}{\partial t^2}, \phi_{2i} \right\rangle$$

$$a_{i,2j} = \epsilon^2 \langle\langle \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2j}, \phi_{2i} \rangle\rangle - \epsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2j}, \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2i} \right) \\ + \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2j}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2i} \right) + \left\langle \frac{\partial^2 \psi_{2j}}{\partial t^2}, \phi_{2i} \right\rangle$$

met  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

$$\begin{aligned}
 a_{i,2j-1} &= \varepsilon^2 \ll \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j}, \psi_{2(i-N)} \gg - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2(i-N)} \right) \\
 &+ \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j}, \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2(i-N)} \right) + \left\langle \frac{\partial^2 \phi_{2j}}{\partial t^2}, \psi_{2(i-N)} \right\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{i,2j} &= \varepsilon^2 \ll \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2j}, \psi_{2(i-N)} \gg - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2j}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2(i-N)} \right) \\
 &+ \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2j}, \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2(i-N)} \right) + \left\langle \frac{\partial^2 \psi_{2j}}{\partial t^2}, \psi_{2(i-N)} \right\rangle
 \end{aligned}$$

met  $i = N+1, \dots, 2N$  ,  $j = 1, \dots, N$ .

$$\begin{aligned}
 b_{i,2j-1} &= -\varepsilon^2 \ll \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j-1}, \phi_{2i} \gg + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2i} \right) \\
 &- \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2i} \right) - \left\langle \frac{\partial^2 \phi_{2j-1}}{\partial t^2}, \phi_{2i} \right\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{i,2j} &= -\varepsilon^2 \ll \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2j-1}, \phi_{2i} \gg + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2i} \right) \\
 &- \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2i} \right) - \left\langle \frac{\partial^2 \psi_{2j-1}}{\partial t^2}, \phi_{2i} \right\rangle
 \end{aligned}$$

met  $i = 1, \dots, N$  ,  $j = 1, \dots, N$ .

$$\begin{aligned}
 b_{i,2j-1} &= -\varepsilon^2 \ll \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j-1}, \psi_{2(i-N)} \gg + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2(i-N)} \right) \\
 &- \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2(i-N)} \right) - \left\langle \frac{\partial^2 \phi_{2j-1}}{\partial t^2}, \psi_{2(i-N)} \right\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{i,2j} &= -\varepsilon^2 \ll \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2j-1}, \psi_{2(i-N)} \gg + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_{2(i-N)} \right) \\
 &- \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2j-1}, \frac{\partial}{\partial x} \psi_{2(i-N)} \right) - \left\langle \frac{\partial^2 \psi_{2j-1}}{\partial t^2}, \psi_{2(i-N)} \right\rangle
 \end{aligned}$$

met  $i = N+1, \dots, 2N$  ,  $j = 1, \dots, N$ .

Deur die binneprodukte te bereken word die elemente van A en B gegee deur die volgende formules:

$$a_{11} = -0,8 \epsilon^2 h/k + 26k/35h$$

$$a_{12} = h\epsilon^2/15 - 11k^2/105h + 2\epsilon^2 h/3$$

$$a_{13} = -h\epsilon^2/5k - 13k/35h$$

$$a_{14} = h\epsilon^2/60 + 11k^2/210h + \epsilon^2 h/6$$

$$a_{21} = a_{13}$$

$$a_{22} = a_{14}$$

$$a_{23} = a_{11}$$

$$a_{24} = a_{12}$$

$$a_{25} = a_{13}$$

$$a_{26} = a_{14}$$

$$a_{j,i+2(j-2)} = a_{2,i}, \quad j=3, \dots, (N-1) \text{ met } i=1, \dots, 6$$

$$a_{N,2(N-2)+i} = a_{2,i}, \quad i=1,2$$

$$a_{N,2(N-1)+1} = -0,4\epsilon^2 h/k + 13k/35h - 6/5k$$

$$a_{N,2(N-1)+2} = \epsilon^2 h/30 - 11k^2/210h + 1,1 + \epsilon^2 h/3$$

$$a_{N+1,1} = \epsilon^2 h/15 - 11k^2/105h$$

$$a_{N+1,2} = -4\epsilon^2 hk/45 + 2k^3/105h$$

$$a_{N+1,3} = \epsilon^2 h/60 + 11k^2/210h$$

$$a_{N+1,4} = -\epsilon^2 hk/45 - k^3/105h$$

$$a_{N+2,1} = a_{N+1,3}$$

$$a_{N+2,2} = a_{N+1,4}$$

$$a_{N+2,3} = a_{N+1,1}$$

$$a_{N+2,4} = a_{N+1,2}$$

$$a_{N+2,5} = a_{N+1,3}$$

$$a_{N+2,6} = a_{N+1,4}$$

$$a_{N+j,i+2(j-2)} = a_{N+2,i}; \quad j=3, \dots, N-1 \text{ met } i=1, \dots, 6$$

$$\begin{aligned}
 a_{2N, 2(N-1)+i} &= a_{2,i} \quad , \quad i = 1,2 \\
 a_{2N', 2N-1} &= \epsilon^2 h/30 - 11k^2/210h + 1/10 \\
 a_{2N, 2N} &= -2\epsilon^2 hk/45 + k^3/105h - 2k/15 \\
 \\
 b_{11} &= -0,8\epsilon^2 h/k - 9k/35h \\
 b_{12} &= -\epsilon^2 h/15 - 13k^2/210h \\
 b_{13} &= -\epsilon^2 h/5k + 9k/70h \\
 b_{14} &= -\epsilon^2 h/60 + 13k^2/420h \\
 b_{21} &= b_{13} \\
 b_{22} &= b_{14} \\
 b_{23} &= b_{11} \\
 b_{24} &= b_{12} \\
 b_{25} &= b_{13} \\
 b_{26} &= b_{14} \\
 b_{j, i+2(j-2)} &= b_{2,i} \quad , \quad j=3, \dots, (N-1) \text{ met } i=1, \dots, 6 \\
 b_{N, 2(N-2)+i} &= b_{2,i} \quad , \quad i=1,2 \\
 \\
 b_{N, 2N-1} &= -0,4\epsilon^2 h/k - 9k/70h - 6/5k \\
 b_{N, 2N} &= -\epsilon^2 h/30 - 13k^2/420h - 0,1 \\
 b_{N+1, 1} &= \epsilon^2 h/15 + 13k^2/210h \\
 b_{N+1, 2} &= -\epsilon^2 hk/45 + k^3/70h \\
 b_{N+1, 3} &= \epsilon^2 h/60 - 13k^2/420h \\
 b_{N+1, 4} &= -\epsilon^2 hk/180 - k^3/140h \\
 b_{N+2, 1} &= b_{N+1, 3} \\
 b_{N+2, 2} &= b_{N+1, 4} \\
 b_{N+2, 3} &= b_{N+1, 1} \\
 b_{N+2, 4} &= b_{N+1, 2} \\
 b_{N+2, 5} &= b_{N+1, 3} \\
 b_{N+2, 6} &= b_{N+1, 4} \\
 b_{N+j, i+2(j-2)} &= b_{N+2, i} \quad , \quad j=3, \dots, N-1 \text{ met } i=1, \dots, 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{2N, 2(N-1)+i} &= b_{2,i} \quad , \quad i = 1, 2 \\
 b_{2N, 2N-1} &= \epsilon^2 h/30 + 13k^2/420h + 0, 1 \\
 b_{2N, 2N} &= -\epsilon^2 hk/90 + k^3/140h - k/30
 \end{aligned}$$

Alle ander elemente van A en B is nul.

Uit (5.29) verkry ons dus weer 'n voortmarsjeer-in-tyd-formule:

$$A \underline{u}^i = B \underline{u}^{i-1} \quad , \quad i = 1, \dots, \dots \quad (5.30)$$

wat herhaaldelik opgelos word.

Die stelsel (5.19) vir die golfvergelyking met Dirichlet-randvoorwaardes en die stelsel (5.30) vir die gekoppelde randvoorwaarde stem grootliks ooreen sodat die stelsel (5.30) sonder veel moeite verkry kan word as die elemente van (5.19) reeds bekend is.

#### 5.4.1 Numeriese resultate

Eerstens beskou ons  $\epsilon = 1$ , dit wil sê die massa van die veer en die massa aan die endpunt van die veer is dieselfde. In tabel 5.5 vergelyk ons die eksakte oplossing met die benaderde oplossing by  $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  en 1 op verskillende tydstippe. Die eksakte oplossing van (5.20) met randvoorwaardes (5.21 - 5.24) word in Bylaag B bereken. Die eksakte waardes in tabel 5.5 is verkry deur die som tot 400 terme te bereken. Die eksakte waardes by  $x = 1$  is ook uit vergelykings (19) en (20) in Bylaag B bereken om as kontrole te dien vir die sommasie van die reeks (12) in Bylaag B. In tabel 5.5 is  $k = 1/24$  so dat die stelsel (5.30) na 192 tydstappe die oplossing by  $t = 8$  sekondes lewer. In figuur 5.10 stel ons die

vibrasie van die staaf of veer grafies voor vir een periode.

TABEL 5.5

$\epsilon = 1,0, , \quad h = 1/24, \quad k = 1/24$				
t	$u(\frac{1}{4}, t)$	$u^*(\frac{1}{4}, t)$	$u(\frac{1}{2}, t)$	$u^*(\frac{1}{2}, t)$
0	0,25	0,25	0,5	0,5
1	0,221199	0,221137	0,393469	0,393443
2	$\bar{0},64138 \text{ E-1}$	$\bar{0},6410 \text{ E-1}$	$\bar{0},116599$	$\bar{0},116592$
3	$\bar{0},205823$	$\bar{0},205767$	$\bar{0},432832$	$\bar{0},433079$
4	$\bar{0},274719$	$\bar{0},274461$	$\bar{0},535454$	$\bar{0},534822$
5	$\bar{0},99938 \text{ E-1}$	$\bar{0},100720$	$\bar{0},211993$	$\bar{0},212695$
6	0,128342	0,128469	0,242779	0,243735
7	0,258633	0,256676	0,504758	0,504287
8	0,252289	0,251944	0,477202	0,477323

TABEL 5.5 (vervolg)

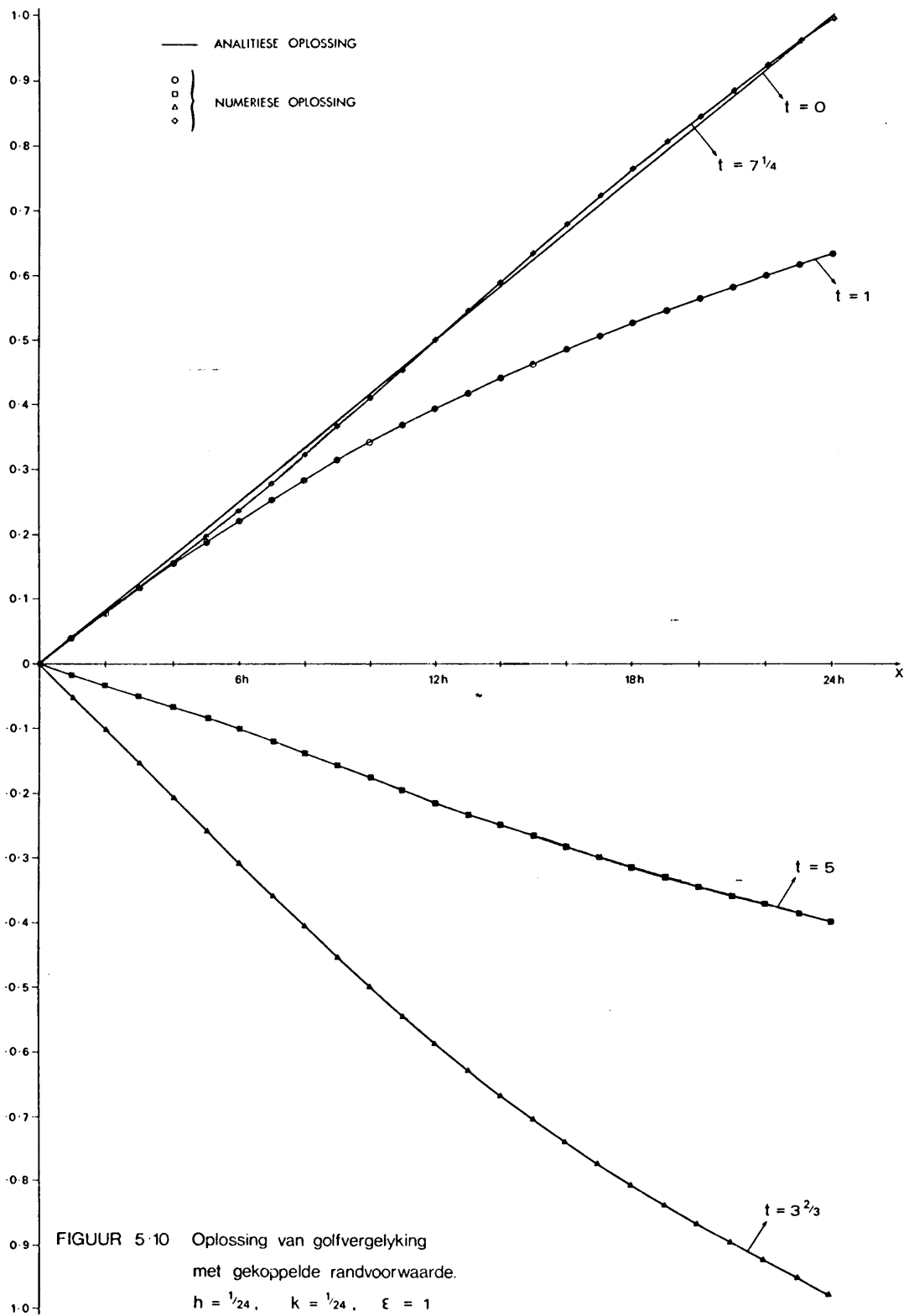
$\epsilon = 1,0, , \quad h = 1/24, \quad k = 1/24$				
t	$u(\frac{3}{4}, t)$	$u^*(\frac{3}{4}, t)$	$u(1, t)$	$u^*(1, t)$
0	0,75	0,75	1,0	1,0
1	0,527633	0,527635	0,632121	0,632137
2	$\bar{0},144973$	$\bar{0},145212$	$\bar{0},135335$	$\bar{0},135579$
3	$\bar{0},651774$	$\bar{0},651861$	$\bar{0},842510$	0,842503
4	$\bar{0},764390$	$\bar{0},764131$	$\bar{0},935633$	$\bar{0},936059$
5	$\bar{0},312612$	$\bar{0},312586$	$\bar{0},394938$	$\bar{0},394659$
6	0,338026	0,339543	0,427921	0,427412
7	0,743822	0,744197	0,958160	0,958410
8	0,658364	0,660739	0,806794	0,805859



TABEL 5,5 (vervolg)

t	$\ u(\frac{1}{4}, t) - u^*(\frac{1}{4}, t)\ $	$\ u(\frac{1}{2}, t) - u^*(\frac{1}{2}, t)\ $	$\ u(\frac{3}{4}, t) - u^*(\frac{3}{4}, t)\ $	$\ u(1, t) - u^*(1, t)\ $
0	0	0	0	0
1	5,1 E-5	1,9 E-5	1,3 E-6	9,8 E-6
2	3,6 E-5	6,3 E-6	2,1 E-4	2,1 E-4
3	4,6 E-5	1,7 E-4	5,3 E-5	3,8 E-6
4	2,0 E-4	4,1 E-4	1,5 E-4	2,2 E-4
5	7,1 E-4	5,7 E-4	2,0 E-5	2,0 E-4
6	1,1 E-4	7,7 E-4	1,1 E-3	3,6 E-4
7	1,6 E-3	3,1 E-4	2,1 E-4	1,3 E-4
8	2,8 E-4	8,2 E-5	1,4 E-3	5,2 E-4

Die norm wat in tabel 5.5 gebruik is, is steeds die gemengde norm wat in § 5.3.1 gedefinieer en gebruik is.



Die benaderde oplossing is ook bereken deur die tydstappe groter te maak. In tabel 5.6 toon ons die invloed van die parameter  $k$  op die benaderde waardes. Die waarde van  $h$  is konstant gehou naamlik  $h = 1/24$ .

TABEL 5.6

t	k = 1/24		k = 1/12		k = 1/6		u(1,t)
	u*(1,t)	u-u*	u*(1,t)	u-u*	u*(1,t)	u-u*	
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0,632137	9,8 E-6	0,632106	9,2 E-6	0,631994	7,8 E-5	0,632121
2	0,135579	2,1 E-4	0,135843	4,5 E-4	0,136868	1,4 E-3	0,135335
3	0,842503	3,8 E-6	0,842507	1,6 E-6	0,842486	1,3 E-5	0,842510
4	0,936059	2,2 E-4	0,936339	3,6 E-4	0,937139	7,8 E-4	0,935633
5	0,394659	2,0 E-4	0,394258	4,9 E-4	0,392430	1,8 E-3	0,394938
6	0,427412	3,6 E-4	0,427209	5,0 E-4	0,428719	5,6 E-4	0,427921
7	0,958410	1,3 E-4	0,958630	2,4 E-4	0,971528	6,8 E-3	0,958160
8	0,805859	5,2 E-4	0,805121	9,3 E-4	0,891448	4,7 E-2	0,806794

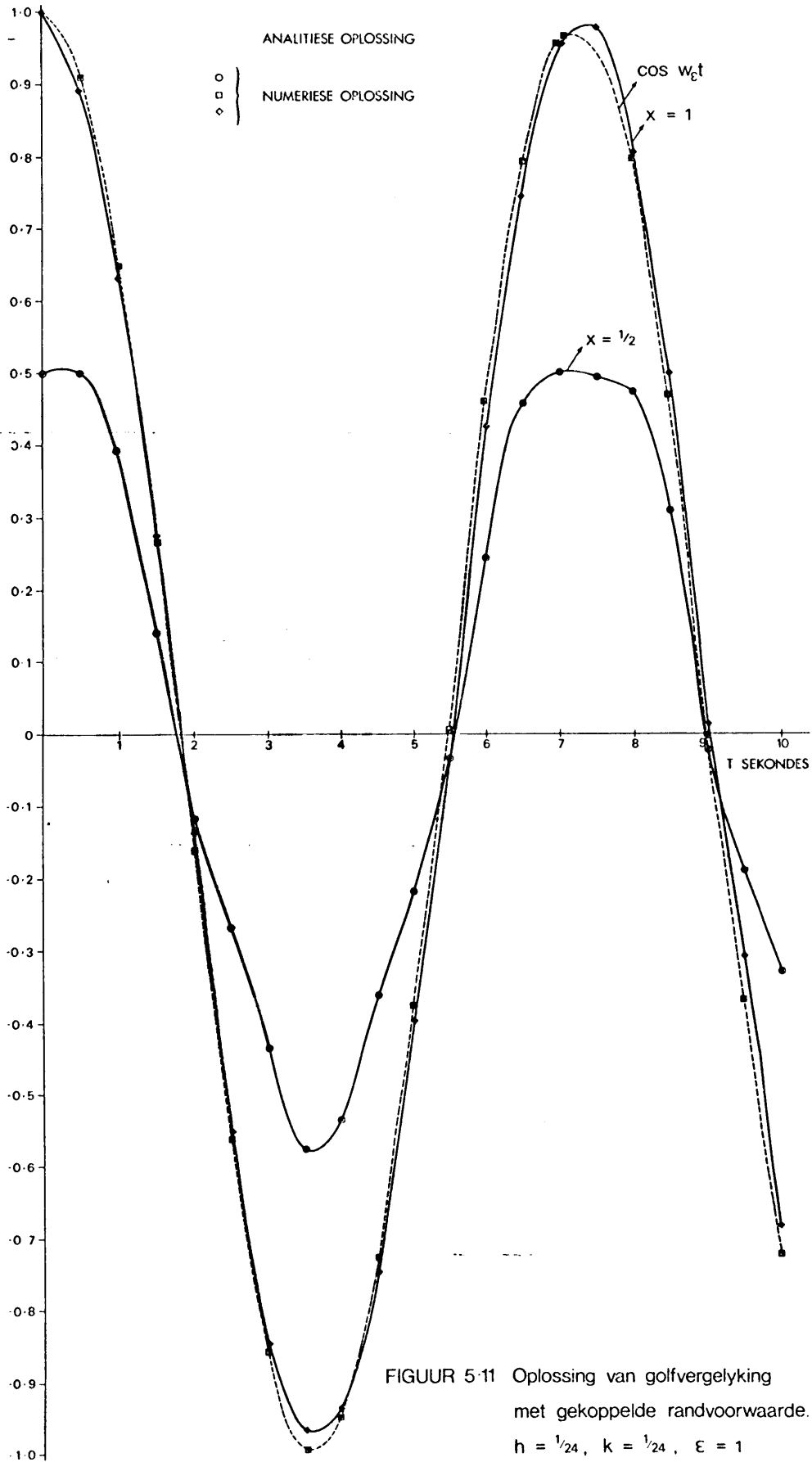
In figuur 5.11 stel ons die beweging van die punte  $x = \frac{1}{2}$  en  $x = 1$  grafies voor tot en met 'n verloop van 10 sekondes. Die waardes van  $u(x,t)$  en  $u^*(x,t)$  val telkens saam aangesien dié keuse van skaal geen onderskeid toelaat nie.

Die stippellyn in figuur 5.11 stel die standaardbenadering

$$u(1,t) \approx \cos \omega_\epsilon t$$

met  $\omega_\epsilon = 1/\sqrt{1+\epsilon^2/3}$  voor.

Dié benadering word gewoonlik deur fisici en ingenieurs gebruik deur te aanvaar dat die elastiese staaf slegs klein vibrasies uitvoer en dat slegs die fundamentele en kleinste frekwensie teenwoordig is.



Ons beskou nou  $\epsilon = 5$ , dit wil sê die massa van die veer is 25 keer groter as die massa aan die endpoint van die veer. Die eksakte waardes is bereken deur die reeks (12) in Bylaag B tot 200 terme te sommeer.

Die vergelykings (19) en (20) in Bylaag B word as kontrole gebruik vir die sommasie van die reeks (12).

Aangesien die beweging van die veer nou heelwat stadiger is as in die geval waar  $\epsilon = 1$ , beskou ons slegs  $k = 1/12$ . Uittreksels van die numeriese resultate verskyn in tabel 5.7.

TABEL 5.7

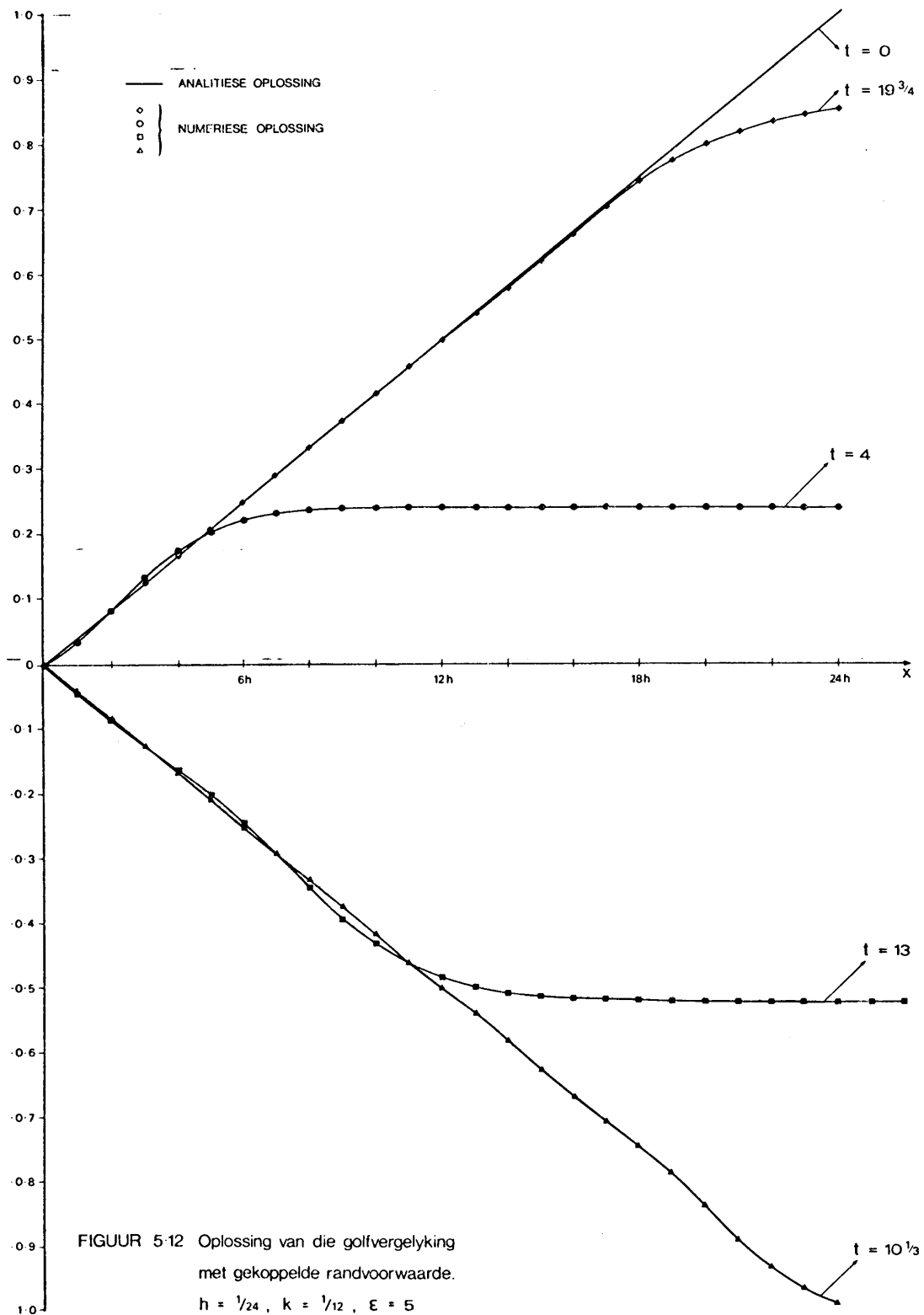
$\epsilon = 5,0$ , $h = 1/24$ , $k = 1/12$				
t	$u(\frac{1}{2}, t)$	$u^*(\frac{1}{2}, t)$	$u(\frac{1}{2}, t)$	$u^*(\frac{1}{2}, t)$
0	0,25	0,25	0,5	0,5
1	0,249987	0,250000	0,499987	0,500000
3	0,250031	0,246375	0,436753	0,435127
5	0,398865 E-1	0,380535 E-1	0,399589 E-1	0,405464 E-1
7	$\bar{0}$ ,249039	$\bar{0}$ ,247335	$\bar{0}$ ,359976	$\bar{0}$ ,369288
9	$\bar{0}$ ,249998	$\bar{0}$ ,249902	$\bar{0}$ ,499972	$\bar{0}$ ,498975
11	$\bar{0}$ ,250025	$\bar{0}$ ,250390	$\bar{0}$ ,500029	$\bar{0}$ ,504268
13	$\bar{0}$ ,249964	$\bar{0}$ ,245465	$\bar{0}$ ,493691	$\bar{0}$ ,485499
15	$\bar{0}$ ,118832	$\bar{0}$ ,119421	$\bar{0}$ ,120028	$\bar{0}$ ,121209
17	0,240128	0,231394	0,280005	0,287995
19	0,250014	0,250751	0,499626	0,496829

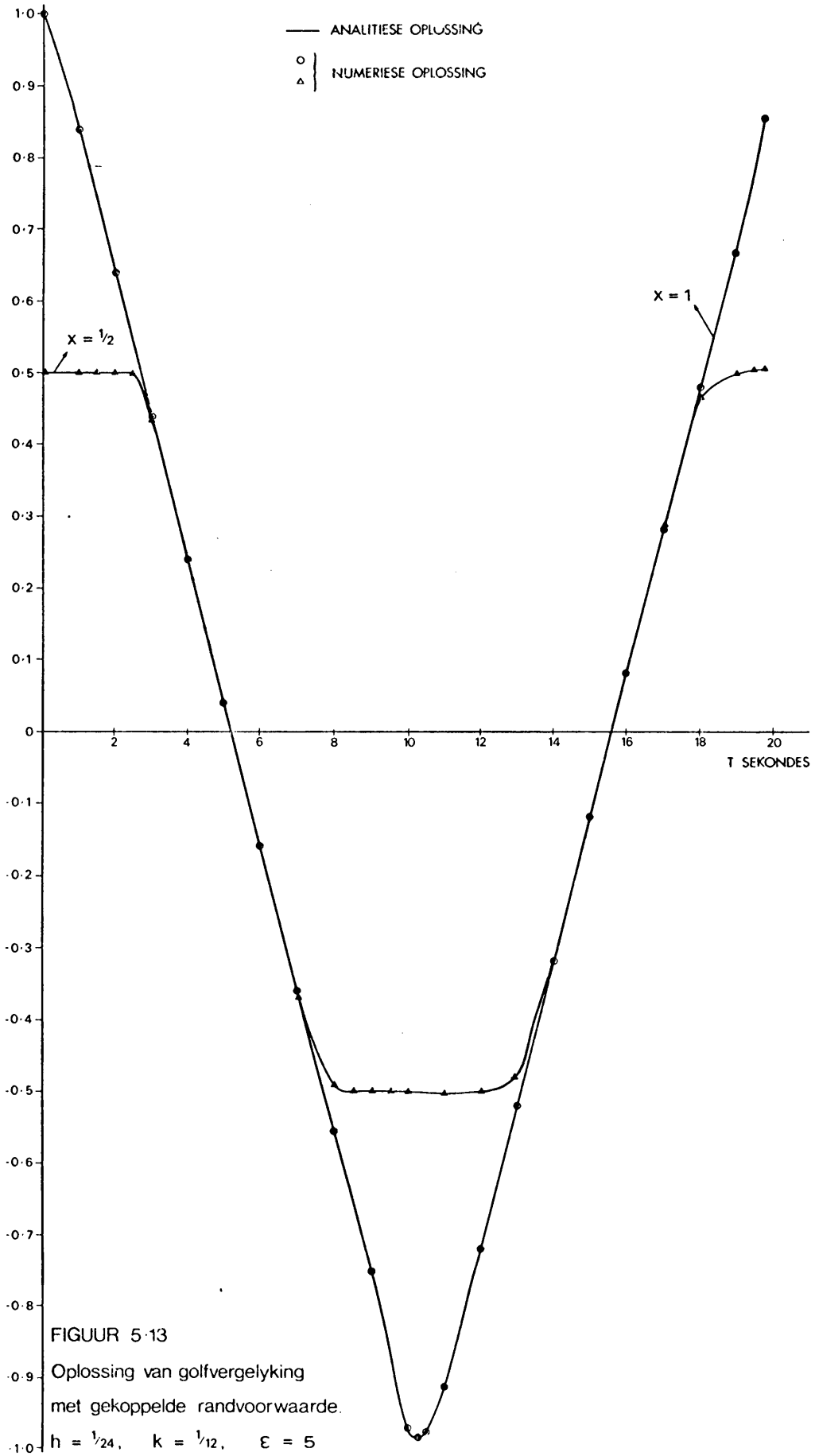
TABEL 5.7 (vervolg)

$\epsilon = 5,0$ , $h = 1/24$ , $k = 1/12$				
t	$u(\frac{3}{4}, t)$	$u^*(\frac{3}{4}, t)$	$u(1, t)$	$u^*(1, t)$
0	0,75	0,75	1,0	1,0
1	0,749994	0,752566	0,839734	0,839784
3	0,440019	0,440002	0,439991	0,440000
5	0,399734 E-1	0,400281 E-1	0,400103 E-1	0,400001 E-1
7	$\bar{0},359984$	$\bar{0},360727$	$\bar{0},360006$	$\bar{0},360560$
9	$\bar{0},738534$	$\bar{0},732029$	$\bar{0},760001$	$\bar{0},751958$
11	$\bar{0},750015$	$\bar{0},761436$	$\bar{0},916220$	$\bar{0},911357$
13	$\bar{0},519841$	$\bar{0},519308$	$\bar{0},520010$	$\bar{0},519969$
15	$\bar{0},120021$	$\bar{0},118947$	$\bar{0},119992$	$\bar{0},120723$
17	0,280004	0,284148	0,279999	0,281532
19	0,686986	0,684011	0,679994	0,666793

t	$\ u(\frac{1}{4}, t) - u^*(\frac{1}{4}, t)\ $	$\ u(\frac{1}{2}, t) - u^*(\frac{1}{2}, t)\ $	$\ u(\frac{3}{4}, t) - u^*(\frac{3}{4}, t)\ $	$\ u(1, t) - u^*(1, t)\ $
0	0	0	0	0
1	1,0 E-5	8,7 E-6	1,5 E-3	2,7 E-5
3	2,9 E-3	1,1 E-3	1,2 E-5	6,2 E-6
5	1,7 E-3	5,6 E-4	5,3 E-5	9,8 E-6
7	1,4 E-3	6,8 E-3	5,5 E-4	4,1 E-4
9	7,7 E-5	6,6 E-4	3,7 E-3	4,6 E-3
11	2,9 E-4	2,8 E-3	6,5 E-3	2,5 E-3
13	3,6 E-3	5,5 E-3	3,5 E-4	2,7 E-5
15	5,3 E-4	1,0 E-3	9,6 E-4	6,5 E-4
17	7,0 E-3	6,2 E-3	3,2 E-3	1,2 E-3
19	5,9 E-4	1,9 E-3	1,8 E-3	7,9 E-3

In figuur 5.12 stel ons die vibrasie van die staaf voor met  $\epsilon = 5,0$ . In figuur 5.13 word die beweging van die punte  $x = \frac{1}{2}$  en  $x = 1$  voorgestel. Ons merk op dat eers vanaf  $t = 18$  sekondes daar 'n waarneembare verskil tussen  $u(1, t)$  en  $u^*(1, t)$  is.







## 5.5 GEVOLGTREKKINGS EN BESPREKING VAN NUMERIESE RESULTATE

Uit tabel 5.5 sien ons dat die numeriese resultate besonder akkuraat is. In besonder is die orde van die grootste fout na 8 sekondes slegs  $O(E-3)$ . Uit die numeriese resultate volg ook dat

$$\left| \begin{array}{l} \text{maks } u(x,t) \\ 7 \leq t \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right| - 1 = -2,5 E-3,$$

wat daarop dui dat die numeriese resultate stabiel is.

Uit tabel 5.6 volg dat ons vir relatief groot tydstappe, naamlik  $k = 1/6$  sekonde, steeds betroubare resultate verkry. Die orde van die grootste fout neem vir  $k = 1/24$  van  $O(E-4)$  toe tot  $O(E-2)$  vir  $k = 1/6$ . Vir  $k = 1/12$  en  $k = 1/24$  is die orde van die grootste fout dieselfde naamlik  $O(E-4)$ . Die voordeel van 'n groter tydstap is dat die stelsel

$$A \underline{u}^i = B \underline{u}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

vir  $k = 1/12$  slegs 96 keer rekursief opgelos moet word, om die oplossing by 8 sekondes te bepaal, teenoor die 192 keer vir  $k = 1/24$ .

Uit tabel 5.7 en figuur 5.10 volg vir  $\varepsilon = 5,0$  dat die veer ongeveer 20 sekondes neem om 'n volle ossillasie uit te voer. Vir  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  keer die veer na 1 ossillasie terug na die beginposisie  $u(x,0) = x$ , terwyl die invloed van die gekoppelde randvoorwaarde verhoed dat dit met die endpunt van die veer gebeur. Die benaderde oplossing by  $x = 1$  bereik na 19,75 sekondes die waarde 0,8533 (eksakte waarde 0,8300) waarna die waarde weer afneem. Die numeriese

resultate is weer eens besonder akkuraat en in figuur 5.11 kan eers na 18 sekondes 'n verskil tussen die eksakte- en benaderde-oplossing waargeneem word.

Die binneprodukte wat benodig word vir die elemente van die matrikse A en B in (5.30) is deurgaans analities bereken. Hierdie integrasie kan egter ook numeries gedoen word wat die toepassing van die GRTG-metode nog verder sal vergemaklik.

Dit is belangrik om weer eens daarop te wys dat die stelsel (5.19) vir die golfvergelyking met Dirichlet-randvoorwaardes en die stelsel (5.30) vir die gekoppelde randvoorwaarde grootliks ooreenstem. *Die GRTG-metode kan dus baie maklik toegepas word op die golfvergelyking met verskillende randvoorwaardes.*

Vir die golfvergelyking met verskillende tipes randvoorwaardes lewer die GRTG-metode 'n stelsel vergelykings van die vorm

$$A \underline{u}^i = B \underline{u}^{i-1}$$

waaruit die benaderde oplossing bereken word. Die GRTG-metode lewer dus ook vir hiperboliese partiële differensiaalvergelykings 'n voortmarsjeer-in-tyd-metode. Die voortmarsjeer-in-tyd-tegniek wat in Hoofstuk 3 vir eerste orde gewone differensiaalvergelykings ontwikkel is, is dus suksesvol uitgebrei na paraboliese en hiperboliese partiële differensiaalvergelykings. Indien die interval  $[0, T]$  dus in  $N$  tydsteppe verdeel word, word die stelsel

$$A \underline{u}^i = B \underline{u}^{i-1}$$

$N$ -keer rekursief opgelos.

Die voordele van die GRTG-metode kan soos volg saamgevat word:

Die GRTG-metode transformeer die verskillende partiële differensiaalvergelykings direk na stelsels algebraïese vergelykings waaruit die benaderde oplossing bereken word. Die klassieke Galerkin-benadering transformeer die partiële differensiaalvergelyking eers na 'n stelsel gewone differensiaalvergelykings wat dan óf met eindige-verskil of met eindige-element-metodes opgelos word. Die GRTG-metode skakel dus hierdie tussenstap uit.

Vir paraboliese en hiperboliese probleme word daar telkens 'n stelsel van die vorm

$$A \underline{u}^i = B \underline{u}^{i-1}$$

verkry wat opgelos moet word. Die verskillende randvoorwaardes word in die matrikse A en B geakkommodeer terwyl die beginvoorwaardes die beginoplossing  $\underline{u}^0$  bepaal. Verskillende beginvoorwaardes wat by 'n sekere randvoorwaardeprobleem geld, word gevolglik maklik geïmplementeer deur slegs  $\underline{u}^0$  telkens aan te pas.

Die matrikse A en B het vir die paraboliese partiële differensiaalvergelykings (kyk Hoofstuk 4) telkens 'n yl bandstruktuur. Hierdie eienskap word ekonomies benut met die keuse van 'n algoritme om die stelsel mee op te los. By die hiperboliese probleme wat in Hoofstuk 5 behandel word, het die matrikse A en B, as gevolg van die keuse van die basisfunksies, nie 'n bandstruktuur nie. Die matrikse is nogtans yl en 'n ekonomiese algoritme kan steeds gebruik

word vir die oplossing van die stelsel.

By die GRTG-metode word die binneprodukte, wat benodig word by die bepaling van die elemente van die matrikse, bereken deur oor 'n tweedimensionale deelgebied te integreer. By die klassieke Galerkin-metode vind hierdie integrasie slegs oor 'n deelinterval van die x-as plaas. Die berekening van die binneprodukte verg dus by die GRTG-metode meer tyd as by die Galerkin-metode. Dit is egter nie 'n groot nadeel nie aangesien die integrasie ook numeries uitgevoer kan word met dié gevolg dat die tydsfaktor nie betekenisvol sal wees nie.

Uit die numeriese resultate, verkry deur die GRTG-metode in hierdie studie, volg dat dié metode 'n doeltreffende metode lewer vir die numeriese oplossing van tydafhanklike probleme.

Evolusie-probleme beskryf 'n fisiese proses wat ontwikkel met die verloop van tyd. Soos in die geval van gewone tydafhanklike differensiaalvergelykings, is dit ook by partiële differensiaalvergelykings dus verkieslik om oor 'n voortmarsjeer-in-tyd-metode te beskik vir die numeriese oplossing van die vergelykings. Die GRTG-metode lewer so 'n metode wat op 'n natuurlike manier uit die partiële differensiaalvergelyking en die randvoorwaardes ontwikkel.

In hierdie studie word variasiebeginselmetodes soos toegepas op ewewigstoestandprobleme, suksesvol oorgedra na evolusie-probleme. Die vraag wat Mitchell [31] in 1976 in die verband gestel het, word hierdeur positief beantwoord.

## BYLAAG A

### Analitiese oplossing van die geleiding-diffusie vergelyking

Ons bereken eerstens die eksakte oplossing van die geleiding-diffusie vergelyking met Dirichlet-randvoorwaardes. Ons beskou dus die vergelykings 4.21, 4.22 en 4.23 naamlik:

$$u_t = \epsilon u_{xx} - \delta u_x, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T] \quad \dots (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1) \quad \dots (2)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad \dots (3)$$

Die eksakte oplossing word bepaal deur die metode van skeiding van veranderlikes [27]. Ons stel dus

$$u(x,t) = X(x) T(t).$$

Uit vergelyking (1) volg dan dat

$$\frac{T'}{T} = \frac{\epsilon X - \delta X'}{X} = \lambda$$

met  $\lambda$  'n konstante.

Ons verkry dus twee gewone differensiaalvergelykings naamlik

$$\frac{dT}{dt} = \lambda T$$

$$\text{en} \quad \epsilon X'' - \delta X' - \lambda X = 0$$

Die nie-triviale oplossing van vergelyking (1) wat die randvoorwaardes (3) bevredig is dan, [27],

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(\delta/2\epsilon)x} \sin n\pi x e^{(-\delta^2/4\epsilon - \epsilon n^2\pi^2)t} \quad \dots (4)$$

Uit die beginvoorwaarde (2) volg dat

$$u(x,0) = u_0(x) = e^{vx} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad v = \delta/2\epsilon$$

Dus

$$b_n = 2 \int_0^1 e^{-\nu x} u_0(x) \sin n\pi x \, dx \quad \dots (5)$$

Die eksakte oplossing van (1), (2) en (3) word gegee deur

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\nu x} e^{\lambda t} b_n \sin n\pi x \quad \dots (6)$$

met  $\lambda = -\delta^2/4\epsilon - \epsilon n^2 \pi^2$ ,  $\nu = \delta/2\epsilon$  en die  $b_n$ 's word deur (5) bepaal.

Vir die beginvoorwaarde

$$u_0(x) = \begin{cases} (x/0,1) - 2 & , \quad 0,2 \leq x \leq 0,3 \\ (-x/0,1) + 4 & , \quad 0,3 \leq x \leq 0,4 \\ 0 & , \quad \text{andersins} \end{cases}$$

word die koëffisiënte  $b_n$  van die Fourierreeks gegee deur:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2 e^{-2h\nu}}{h(\nu^2 + n^2\pi^2)^2} \{(\nu^2 - n^2\pi^2) \sin 2hn\pi + 2\nu n\pi \cos 2hn\pi\} \\ &- \frac{4 e^{-3h\nu}}{h(\nu^2 + n^2\pi^2)^2} \{(\nu^2 - n^2\pi^2) \sin 3hn\pi + 2\nu n\pi \cos 3hn\pi\} \\ &+ \frac{2 e^{-4h\nu}}{h(\nu^2 + n^2\pi^2)^2} \{(\nu^2 - n^2\pi^2) \sin 4hn\pi + 2\nu n\pi \cos 4hn\pi\} \end{aligned}$$

waar  $h = 0,1$ .

Tweedens bereken ons die eksakte oplossing van die geleiding-diffusie vergelyking met periodiese randvoorwaardes (kyk § 4.3.2).

Die oplossings van

$$\frac{dT}{dt} = \lambda T$$

$$\text{en } \epsilon X'' - \delta X' - \lambda X = 0$$

word respektiewelik gegee deur:

$$T(t) = e^{\lambda t} \quad \dots (7)$$

$$\text{en } X(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} \quad \dots (8)$$

met  $r_1$  en  $r_2$  die wortels van

$$\epsilon r^2 - \delta r - \lambda = 0.$$

Die vergelyking (1) word dus bevredig deur

$$\begin{aligned} u(x, t) &= T(t) X(x) \\ &= e^{\lambda t} (A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}) \quad \dots (9) \end{aligned}$$

Vir die oplossing (9) om periodies te wees moet een van die wortels  $r_1$  of  $r_2$  (sê  $r_1$ ) gelyk aan  $2k\pi i$  wees ( $k$  heel).

Dus

$$u(x, t) = e^{\lambda t} (A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x})$$

en

$$\begin{aligned} u(x+1, t) &= e^{\lambda t} (A e^{r_1(x+1)} + B e^{r_2(x+1)}) \\ &= e^{\lambda t} (A e^{r_1 x} + B e^{r_2(x+1)}) \end{aligned}$$

Uit  $u(x, t) = u(x+1, t)$  volg dan dat  $B = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Maar } \lambda &= \epsilon r^2 - \delta r \\ &= \epsilon (2k\pi i)^2 - 2k\pi \delta i \\ &= -\epsilon (2k\pi)^2 - 2k\pi \delta i \end{aligned}$$

Die oplossing van (1) vir enige orde van  $k$  word dus gegee deur

$$u(x,t) = A e^{-\epsilon t(2k\pi)^2 - 2k\pi\delta it} \cdot e^{2k\pi ix}$$

Om 'n oplossing te vind wat die beginvoorwaarde (2) bevredig, beskou ons:

$$u(x,t) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p e^{-(2p\pi)^2 \epsilon t - 2p\pi\delta it} \cdot e^{2p\pi ix} \quad \dots (10)$$

Maar

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p e^{2p\pi ix} \quad \dots (11)$$

Die Fourier-koëffisiënte van  $u_0(x)$  word dus deur  $a_p$  bepaal.

Om  $a_p$  te bereken word (11) met  $e^{-iq2\pi x}$  vermenigvuldig en geïntegreer. Dan is

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_0(x) \cdot e^{-2\pi qix} dx &= \sum_p a_p \int_0^1 e^{-2\pi qix} \cdot e^{2\pi p ix} dx \\ &= \sum_{p \neq q} a_p \left[ \frac{e^{2\pi(p-q)ix}}{2\pi(p-q)i} \right]_0^1 + a_q \\ &= a_q \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} a_p &= \int_0^1 u_0(x) e^{-2\pi p ix} dx, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ &= \int_{2h}^{3h} \left(\frac{x}{h} - 2\right) e^{-2\pi p ix} dx \\ &\quad + \int_{3h}^{4h} \left(-\frac{x}{h} + 4\right) e^{-2\pi p ix} dx \\ &= -\frac{1}{h(2\pi p)^2} (e^{-4\pi p ih} - 2e^{-6\pi p ih} + e^{-8\pi p ih}) \text{ met } h=0,1, \dots (12) \end{aligned}$$



Hieruit volg dat

$$a_p = \bar{a}_{-p} ,$$

Vervang nou (12) in (10):

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} [ a_p e^{-(2p\pi)^2 \epsilon t - 2p\pi \delta i t} \cdot e^{2p\pi i x} \\
 &\quad + a_{-p} e^{-(2p\pi)^2 \epsilon t + 2p\pi \delta i t} \cdot e^{-2p\pi i x} ] \\
 &= a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} [ a_p e^{-(2p\pi)^2 \epsilon t - 2p\pi \delta i t} \cdot e^{2p\pi i x} \\
 &\quad + \bar{a}_p e^{-(2p\pi)^2 \epsilon t - \overline{-2p\pi \delta i t}} \cdot \overline{e^{2p\pi i x}} ] \\
 &= a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} [ e^{-(2p\pi)^2 \epsilon t} \cdot 2 \operatorname{Re} (a_p e^{-2p\pi \delta i t} e^{2p\pi i x}) ] \dots (13)
 \end{aligned}$$

Maar

$$\begin{aligned}
 &\operatorname{Re} a_p e^{-2p\pi \delta i t} \cdot e^{2p\pi i x} \\
 &= - \frac{1}{h(2\pi p)^2} [ \cos 2p\pi(x-\delta t-2h) - 2 \cos 2p\pi(x-\delta t-3h) + \cos 2p\pi(x-\delta t-4h) ]
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \int_{2h}^{3h} (x/h - 2) dx + \int_{3h}^{4h} (-x/h + 4) dx \\
 &= h
 \end{aligned}$$

Dus (13) word:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= h + \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{-e^{-(2p\pi)^2 \epsilon t}}{2(\pi p)^2 h} \{ \cos 2p\pi(x-\delta t-2h) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \cos 2p\pi(x-\delta t-3h) + \cos 2p\pi(x-\delta t-4h) \} \right] \dots (14)
 \end{aligned}$$

BYLAAG B

Analitiese oplossing van die golfvergelyking met gekoppelde randvoorwaardes

Ons beskou nou die vergelykings (5.20) tot (5.24), naamlik:

$$\epsilon^2 u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T] \quad \dots (1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0 \quad \dots (2)$$

$$u_{tt} + u_x = 0, \quad \text{by } x=1, \quad t > 0 \quad \dots (3)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,1) \quad \dots (4)$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in (0,1) \quad \dots (5)$$

Die gesaghebbendste studie oor hierdie probleem is seker die van die Rus Timoshenko [43]. Hy aanvaar dat die oplossing gebou is uit terme van die vorm

$$u(x,t) = X(x) (A \cos pt + B \sin pt)$$

As dit vervang word in (1) verkry ons deur van voorwaarde (2) gebruik te maak dat

$$X(x) = D \sin px, \quad D \text{ konstant.}$$

Uit (3) volg dan dat

$$p \tan px = \epsilon$$

of te wel

$$\beta \tan \beta = \epsilon^2 \text{ met } \beta = px \quad \dots (6)$$

Hierdie vergelyking staan bekend as die frekwensievergelyking en vir 'n gegewe  $\epsilon$  kan die eiewaardes  $\beta_i$  numeries

bereken word. Die bydrae tot die oplossing deur die  $i$ -de frekwensie word gegee deur

$$u_i = \sin \beta_i x [ A_i \cos (\beta_i t/\epsilon) + B_i \sin (\beta_i t/\epsilon) ]$$

en deur die superponering van alle vibrasies word die eksakte oplossing gegee deur

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \beta_i x [ A_i \cos (\beta_i t/\epsilon) + B_i \sin (\beta_i t/\epsilon) ] \dots (7)$$

waar die konstantes  $A_i$  en  $B_i$  bepaal moet word uit die beginvoorwaardes. Uit (4) en (5) volg dat

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \beta_i x \dots (8)$$

$$\text{en } u_t(x,0) = g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin \beta_i x \cdot (-\beta_i/\epsilon). \dots (9)$$

As ons nou  $f(x) = x$  en  $g(x) = 0$  kies, word die  $A_i$ 's bepaal deur

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \beta_i x \dots (10)$$

terwyl uit (9) volg dat

$$B_i = 0, \quad i=1,2, \dots$$

Deur die toepassing van Fourier-tegnieke [44] word  $A_i$  gegee deur:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\int_0^1 x \sin \beta_i x \, dx + (\sin \beta_i)/\epsilon^2}{\int_0^1 \sin^2 \beta_i x \, dx + (\sin^2 \beta_i)/\epsilon^2} \\ &= \frac{-(\cos \beta_i)/\beta_i + (\sin \beta_i)/\beta_i^2 + (\sin \beta_i)/\epsilon^2}{\frac{1}{2}[1 - (\sin 2\beta_i)/2\beta_i] + (\sin^2 \beta_i)/\epsilon^2} \dots (11) \end{aligned}$$

Maar uit die frekwensievergelyking volg dat

$$\beta_i \tan \beta_i = \epsilon^2$$

dus 
$$\frac{\beta_i}{\cos \beta_i} = \frac{\epsilon^2}{\sin \beta_i}$$

en 
$$\frac{\sin^2 \beta_i}{\epsilon^2} = \frac{\sin \beta_i \cos \beta_i}{\beta_i}$$

Uit (11) volg dan dat

$$A_i = \frac{4 \sin \beta_i}{\beta_i (2\beta_i + \beta_i \sin 2\beta_i)}$$

Die vibrasie van die staaf word dus gegee deur

$$u(x,t) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_i x \sin \beta_i \cos(\beta_i t/\epsilon)}{\beta_i (2\beta_i + \beta_i \sin 2\beta_i)} \dots \quad (12)$$

Die eksakte oplossing (12) van Timoshenko het ongelukkig twee nadele naamlik:

- (i) Die eiefrekwensies  $\beta_i$  moet numeries bereken word.
- (ii) Die eksakte oplossing  $u(x,t)$  is die somfunksie van 'n oneindige reeks.

Snyman [40] toon aan, deur gebruik te maak van die metode van karakteristieke, dat redelik eenvoudige uitdrukkings verkry kan word wat nie berus op eiewaardes nie en wat die aanvanklike vibrasie van die staaf eksak beskryf. Ons bespreek kortliks die metode van Snyman om die oplossing  $u(1,t)$  by die endpoint te ontwikkel.

Die substitusies

$$u^1 = u_t ; \quad u^2 = u_x$$

transformeer (1) na 'n stelsel van twee eerste orde vergelykings

$$\begin{aligned} \epsilon^2 u_t^1 - u_x^2 &= 0 \\ u_t^2 - u_x^1 &= 0 \end{aligned} \quad \dots (13)$$

Die randvoorwaardes is nou

$$\begin{aligned} u^1(0,t) &= 0 \\ u_t^1 + u^2 &= 0 \quad \text{by } x=1 \end{aligned}$$

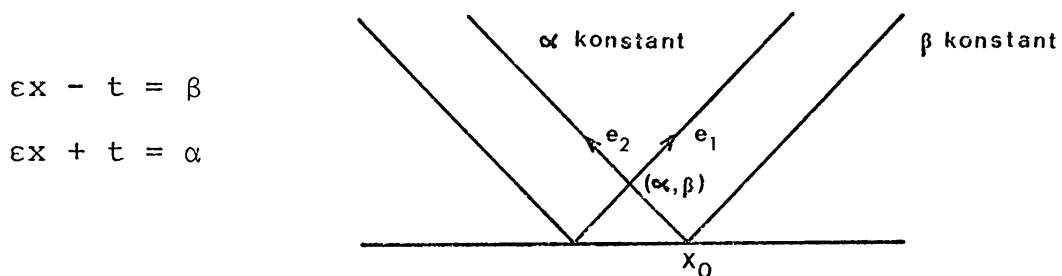
en die beginvoorwaardes

$$\begin{aligned} u^1(x,0) &= g(x) = \{0\} \\ u^2(x,0) &= f'(x) = \{1\} \end{aligned}$$

Die karakteristieke rigtings van die stelsel (13) word gegee deur

$$e_{1,2} = \frac{dt}{dx} = \pm \epsilon$$

en die karakteristieke is dus:



As  $\alpha$  en  $\beta$  nou beskou word as nuwe karakteristieke koördinate dan kan stelsel (13) getransformeer word na 'n stelsel waarin elke vergelyking slegs differensiasie langs een van die karakteristieke rigtings bevat (kyk Ames [1]).

Dit lewer dan

$$\begin{aligned}
 \epsilon u_{\alpha}^1 - u_{\alpha}^2 &= 0 && \text{langs } \beta \text{ karakteristiek} \\
 \epsilon u_{\beta}^1 + u_{\beta}^2 &= 0 && \text{langs } \alpha \text{ karakteristiek ... (14)}
 \end{aligned}$$

Deur integrasie van vergelykings (14) verkry ons

$$\begin{aligned}
 \epsilon u^1 - u^2 &= \text{konstante, langs } \beta \text{ karakteristiek} \\
 &= \epsilon u^1(x_0, 0) - u^2(x_0, 0)
 \end{aligned}$$

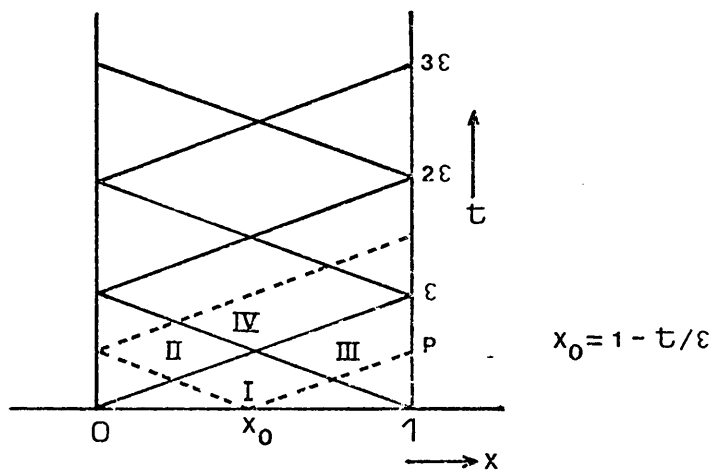
dit is

$$\epsilon u^1 - u^2 = \epsilon g(x_0) - 1 = -1. \quad \dots (15)$$

Netso geld langs die  $\alpha$  karakteristiek dat

$$\epsilon u^1 + u^2 = \epsilon g(x_0) + x_0 = x_0.$$

Verdeel die integrasiegebied in verskillende deelgebiede soos in figuur 1 aangetoon:



FIGUUR 1: Verdelling van integrasiegebied.

Die oplossing word langs die lyn  $x=1$  ontwikkel maar dit kan vir die ander gebiede ewe maklik verkry word nadat  $u(1,t)$  gevind is. Beskou die punt P waar die  $\beta$  karakteristiek vanuit  $x_0$  die rand ontmoet. By dié punt geld:

$$u_t^1 + u^2 = 0 \quad (\text{Randvoorwaarde}) \quad \dots (16)$$

en uit (15) volg

$$\epsilon u^1 - u^2 = -1 \quad \dots (17)$$

Uit (16) en (17) volg dan

$$\frac{d}{dt} u^1 + \epsilon u^1 = -1 \quad \text{langs } x=1 \quad \dots (18)$$

Hier het ons dus 'n eerste orde lineêre differensiaalvergeliking waaruit vir  $u^1(1,t)$ ,  $0 < t < \epsilon$ , opgelos kan word.

Ons verkry dan

$$u(1,t) = 1 + 1/\epsilon^2 - t/\epsilon - e^{-\epsilon t/\epsilon^2}, \quad 0 < t < \epsilon \quad \dots (19)$$

Die oplossing (19) geld ook vir  $\epsilon < t < 2\epsilon$  aangesien die  $\alpha$  karakteristiek 'n eenvoudige weerkaatsing ondergaan by  $x=0$ . Op soortgelyke wyse word die oplossing vir die interval  $2\epsilon \leq t \leq 4\epsilon$  ontwikkel en

$$u(1,t) = -3(1 + 1/\epsilon^2) + \frac{t}{\epsilon} (1 + 2e^{2\epsilon^2} e^{-\epsilon t}) + (4e^{2\epsilon^2/\epsilon^2} - 1/\epsilon^2 - 4e^{2\epsilon^2}) e^{-\epsilon t} \quad \dots (20)$$

Hierdie metode van Snyman lewer 'n baie eenvoudige uitdrukking vir  $u(1,t)$  wat sonder enige benaderingstegnieke bereken kan word.

BYLAAG C

Crank-Nicolson-algoritme vir die hittevergelyking [5]:

Beskou die vergelyking

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T) \quad \dots (1)$$

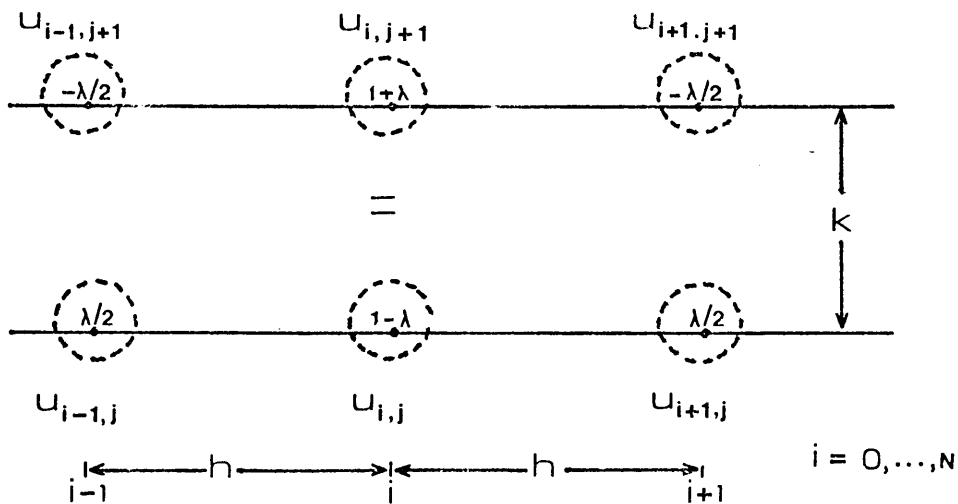
met  $u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \dots (2)$

en  $u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l) \quad \dots (3)$

Die Crank-Nicolson-metode vervang die partiële differensiaal-vergelyking (1) met die volgende gemiddelde-verskil-formule

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right]. \quad \dots (4)$$

wat soos volg voorgestel kan word:





Die Crank-Nicolson-metode kan in matriksnotasie voorgestel word deur:

$$A \underline{u}^{j+1} = B \underline{u}^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad \dots (5)$$

met A en B die volgende matrikse:

$$A = \begin{bmatrix} (1 + \lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & (1 + \lambda) & -\frac{\lambda}{2} & & \vdots \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1 + \lambda) \end{bmatrix}$$

en

$$B = \begin{bmatrix} (1 - \lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & (1 - \lambda) & \frac{\lambda}{2} & & \vdots \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1 - \lambda) \end{bmatrix}$$

Die beginoplossing  $\underline{u}^{(0)}$  in (5) word bereken uit (2) en (3).

BYLAAG D

Eindige-verskil-algoritme vir die golfvergelyking [5]:

Beskou die vergelyking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T] \quad \dots (1)$$

$$\text{met } u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad \dots (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, 1) \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, 1) \quad \dots (4)$$

Deur die tweede orde afgeleides in (1) te vervang met 'n sentraal-verskil formule word die volgende verskil vergelyking verkry:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0, \quad i = 0, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots$$

In matriksnotasie kan dié stel vergelykings geskryf word as:

$$\begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \lambda^2 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \quad \dots (5)$$

Uit (5) volg dat die oplossing by  $t = (j+1)k$  slegs bereken kan word indien die oplossing by die vorige twee tydstappe, naamlik  $t = (j-1)k$  en  $t = jk$ , bekend is. Die oplossing by  $j=0$  kan uit (3) bereken word terwyl (4) gebruik moet word om die oplossing by  $j=1$  te benader. Hiervoor kan die volgende verskil vergelyking gebruik word:

$$u_{i,1} = (1 - \lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) \\ + kg(x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

Met  $u_{i,0}$  en  $u_{i,1}$  dus bekend, word 'n voortmarsjeer-in-tyd-algoritme uit (5) verkry.

VERWYSINGS

1. AMES W F, *Numerical methods for partial differential equations.* Academic Press 1977.
2. ARGYRIS J H en SCHARPF D W, *Finite elements in time and space.* The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society 73 (1969) 1041-1044.
3. BAKER G A, *Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations.* Siam J Numer Anal 13 No 4 (1976) 564-576.
4. BRAMBLE J H en THOMÉE V, *Semi-discrete least-squares methods for a parabolic boundary value problem.* Math Comp 26 (1972) 633-648.
5. BRUCH J C en ZYVOLOSKI G, *Transient two-dimensional heat conduction problems solved by the finite element method.* Internat J numer methods in Engin 8 (1974) 481-494.
6. BURDEN R L, FAIRES J D en REYNOLDS A C, *Numerical analysis.* Prindle Weber en Schmidt 1978.
7. CARASSO A, *A least squares procedure for the wave equation.* Math Comp 28 (1974) 757-767.
8. CELLA A, *On the accuracy and stability of the finite element approximation for parabolic and hyperbolic operators.* The Mathematics of finite elements and applications II (Ed J R Whiteman) Mafelap (1975) 183-188.
9. CELLA A en CECCHI M M, *An extended theory for the finite element method.* Variat Meth Engin, Proc internat conf Southampton 1 (1973) 1/74-1/84.
10. CHENEY E W, *Introduction to approximation theory.* McGraw-Hill 1966.

11. COMINI G, DEL GUIDICE S, LEWIS R W en ZIENKIEWICZ O C, *Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change.* Internat J numer methods Engin 8 (1974) 613-624.
12. DAVIES A J, *The finite element method: a first approach.* Oxford 1980.
13. DOUGLAS J en DUPONT T, *Galerkin methods for parabolic equations.* Siam J Numer Anal 7 No 4 (1970) 575-626.
14. DOUGLAS J en DUPONT T, *The application of variational methods to waterflooding problems.* 20th Annual Technical meeting of the Petroleum Society of C I M Edmonta (1969) 79-85.
15. DOUGLAS J en DUPONT T, *Collocation methods for parabolic equations in a single space variable.* Lecture notes in Mathematics no 385 Springer.
16. DUPONT T,  *$L^2$ -Estimates for Galerkin methods for second order hyperbolic equations.* Siam J Numer Anal 10 No 5 (1973) 880-889.
17. FAIRWEATHER G, *Finite element Galerkin methods for differential equations.* Marcel Dekker (1978)
18. FAIRWEATHER G, *A survey of discrete Galerkin methods for parabolic equations in one space variable.* Math Colloq Univ of Cape Town 7 (1971-72) 43-77.
19. FINLAYSON B A en SCRIVEN L E, *On the search for variational principles.* Int J Heat and Mass Transfer 10 (1967) 799-821.

20. FIX G J en STRANG G, *An analysis of the finite element method.* Prentice Hall 1973.
21. FRIED I, *Finite element analysis of time-dependent phenomena.* A I A A J 7 No 6 1170-1173
22. GEAR C W, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations.* Prentice Hall 1971.
23. GLADWELL I en WAIT R, *A survey of numerical methods for partial differential equations.* Oxford 1979.
24. GRIFFITHS D F, *Towards time-stepping algorithms for convective-diffusion.* Numerical analysis of singular perturbation problems. (Ed Hemker P W and Miller J J H) (1979) 199-216.
25. HULME B L, *One-step piecewise polynomial Galerkin methods for initial value problems.* Math Comp 26 No 118 (1972) 415-426.
26. HULME B L, *Discrete Galerkin and related one-step methods for ordinary differential equations.* Math Comp 26 No 120 (1972) 881-891.
27. KREYSZIG E, *Introductory functional analysis with applications.* Wiley 1978.
28. KREYSZIG E, *Advanced engineering mathematics.* Wiley 1979.
29. Lambert J D, *Computational methods in ordinary differential equations.* Wiley 1973.
30. MEINARDUS G, *Approximation von funktionen und ihre numerische behandlung.* Springer 1964.
31. MITCHELL A R, *Finite element methods in time dependent problems.* The state of the art in numerical analysis (Ed D Jacobs) Academic Press (1977) 671-697.

32. MITCHELL A R en GRIFFITHS D F, *Semi-discrete generalised Galerkin methods for time-dependent conduction-convection problems*. Report NA/24 Department of Mathematics University of Dundee Scotland.
33. MITCHELL A R en GRIFFITHS D F, *Upwinding by Petrov-Galerkin methods in convection-diffusion problems*. J Comp and applied Math 6 No 3 (1980) 219-228.
34. MITCHELL A R en WAIT R, *The finite element method in partial differential equations*. Wiley 1977.
35. NOBLE B, *Variational finite elements methods for initial value problems*. The mathematics of finite elements and applications (Ed J R Whiteman) (1972) 143-151.
36. PRENTER P M, *Splines and variational methods*. Wiley 1975.
37. PRICE H S, CAVENDISH J C, VARGA R S, *Numerical methods of higher-order accuracy for diffusion-convection equations*. Society for Petroleum Engineers 42 nd Annual Fall meeting Houston (1967) 293-303.
38. SAUER N en VAN RENSBURG N F J, *Aspects of asymptotic theory of coupled problems in applied mathematics*. Proceedings of a symposium on differential equations C S I R Special report WISK 161 (1975) 1-8.
39. SIGILLITO V G, *On a continuous method of approximating solutions of the heat equation*. J of the association for computing Machinery 14 No 4 (1967) 732-741.

40. SNYMAN J A, *Die oplos van die golfvergelyking met 'n gekoppelde randvoorwaarde deur die metode van karakteristieke.* S A W V mededelings 9 No 1 (1977) 99.
41. SNYMAN J A, *Persoonlike gesprekke.*
42. THOMÉE V, *Spline approximation and difference schemes for the heat equation.* The mathematical Foundation of the finite element method with applications to partial differential equations (Ed A K Aziz) Academic Press (1972) 711-746.
43. TIMOSHENKO S, *Vibration problems in engineering.* Van Nostrand 1928.
44. TIMOSHENKO S, YOUNG D H en WEAVER W, *Vibration problems in engineering.* Wiley 1974.
45. VAN NIEKERK F D, *Eindige-element-metodes in tydafhanklike probleme.* S A W V mededelings 12 No 4 (1980) 234.
46. VAN NIEKERK F D, *Eindige-element-metodes vir ruimte-tyd probleme.* Handeling van die konferensie oor eindige-element-metodes in Suid-Afrika (1981) 1-13.
47. VAN NIEKERK F D, *'n Tydkontinue Galerkin-metode vir paraboliese vergelykings.* Navorsingsverslag U P T W 4 (1977) 1-10.
48. WHEELER M F,  *$L_{\infty}$  Estimates of optimal orders for Galerkin methods for one-dimensional second order parabolic and hyperbolic equations.* Siam J Numer Anal 10 No 5 (1973) 908-913.



49. ZIENKIEWICZ O C, *The finite element method in engineering science.* Mcgraw-Hill 1971.
50. ZIENKIEWICZ O C en PAREKH C J, *Transient field problems: Two dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements.* Internat J numer methods Engin 2 (1970) 61-71.
51. ZLÁMAL M, *Finite element methods in heat conduction problems.* The mathematics of finite elements and applications II (Ed J R Whiteman) Mafelap (1975) 85-104.