Bayes-beramers vir die gemiddelde van die normaalverdeling met onbekende variansie onder die LINEKS-verliesfunksie

Author:
Janet van Niekerk[1]

Affiliation:
[1]Department of Statistics, University of Pretoria, South Africa

Correspondence to:
Janet van Niekerk

Email:
janet.vanniekerk@up.ac.za

Postal address:
Private Bag X20, Hatfield 0028, South Africa

How to cite this abstract:
Van Niekerk, J., 2014, 'Bayes-beramers vir die gemiddelde van die normaalverdeling met onbekende variansie onder die LINEKS-verliesfunksie', *Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie* 33(1), Art. #936, 2 pages. http://dx.doi.org/10.4102/satnt.v33i1.936

Note:
A selection of conference proceedings: Student Symposium in Science, 27 and 28 October 2012, North-West University, South Africa. Organising committee: Mr Rudi W. Pretorius (Department of Geography, University of South Africa), Dr Ettienne Snyders (South African Nuclear Energy Corporation [NECSA]) and Dr Cornie G.C.E. van Sittert (School of Physical and Chemical Sciences, North-West University).

Bayes estimators for the location parameter of the normal distribution with unknown variance under the LINEX loss function. Bayes analysis of the normal model has been thoroughly investigated by numerous statisticians and reported in the literature. The explicit form of the Bayes estimators under LINEX loss will be derived, which has not been available in the literature since the estimators are functions of the moment generating function of the *t*-distribution.

Die Bayes-analise van die normaalverdeling is volledig ondersoek deur onder andere Zellner (1971), De Groot (1970) en Giles (2002). Vir hierdie tipe analise word a priori-inligting benodig asook 'n verliesfunksie, aangesien die Bayes-beramers die posteriorverlies minimeer. Die verliesfunksie wat in hierdie studie oorweeg word, is die linièr eksponensiële (LINEKS) verliesfunksie. Die a priori-verdelings wat oorweeg word vir die gemiddelde en die onbekende variansie is 'n objektiewe a priori-verdeling, Jeffrey se prior, asook die natuurlik toegevoegde a priori-verdeling (subjektief), die normaal- en inverse gammaverdeling onderskeidelik. In hierdie studie word die eksplisiete vorm van die Bayes-beramers vir die gemiddelde van die normaalverdeling onder die aanname van die LINEKS-verliesfunksie gegee wat tot nou toe onbekend in die literatuur was, aangesien die beramers 'n funksie van die momentvoortbringende funksie van die *t*-verdeling is.

Die linièr eksponensiële (LINEKS) verliesfunksie is bekendgestel deur Varian (1975) as 'n verliesfunksie met beter onderskeidingsvermoë met die oog op oor- of onderberaming, vergeleke met die kwadratiese verliesfunksie wat aan beide situasies dieselfde verlies toeken. Hierdie verliesfunksie beskik oor twee parameters, naamlik a en b, wat na keuse vir 'n gegewe situasie aangewend kan word. Indien oorberaming meer ernstig as onderberaming beskou word, word 'n positiewe waarde aan a toegeken, en andersom. Die koste van 'n konstruksieprojek kan as voorbeeld gebruik word; indien die kontruksiebestuurder die koste van die projek onderberaam, sal hy self vir die ekstra koste verantwoordelik wees, en in so 'n geval sal 'n negatiewe waarde aan a toegeken word. Die linièr eksponensiële (LINEKS-) verliesfunksie word as volg gedefiniëer (vergelyking 1):

$$L(\theta,\tau) = b(e^{a(\theta-\tau)} - a(\theta-\tau) - 1) \ \text{vir} -\infty < a < \infty, b > 0. \qquad \text{[Vgl. 1]}$$

Sien onder andere Varian (1975), Zellner (1986), en Parsian en Farispour (1993) vir verdere eienskappe.

Die a priori-verdelings vir die onbekende gemiddelde en die onbekende variansie van die normaalverdeling is onderskeidelik Jeffrey se prior, en die normaal- en inverse gammaverdeling soos volg:

Eerstens:

$$f(\mu,\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \qquad \text{[Vgl. 2]}$$

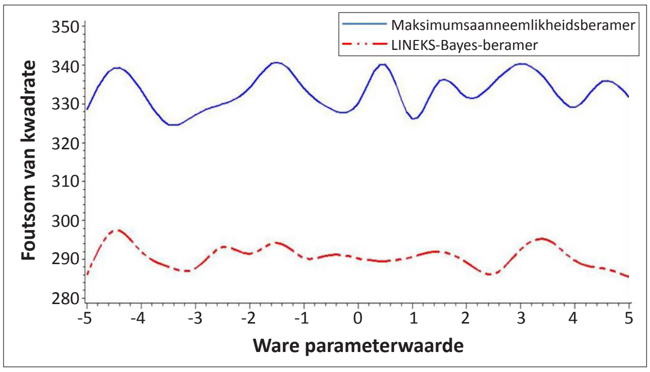
Tweedens:

$$\mu|\sigma^2 \sim N(\mu^1, \frac{\sigma^2}{n_0}) \qquad \text{[Vgl. 3]}$$

Derdens:

$$\sigma^2 \sim \mathrm{IG}(\frac{v_0}{2}, \frac{S_0}{2}) \qquad \text{[Vgl. 4]}$$

In hierdie studie word die gesamentlike a priori-verdelings, gesamentlike a posteriori-verdelings, asook die marginale a posteriori-verdelings afgelei. Die Bayes-beramers word afgelei as



Nota: Let op dat al die beramers onsydige beramers van die populasiegemiddelde is. Dit is duidelik uit die grafiek dat die subjektiewe LINEKS-Bayes-beramer verkies word.

FIGUUR 1: Foutsom van kwadrate vir die beramers.

die waarde waarvoor die verlies met betrekking tot die a posteriori-verdelings van die gemiddelde ’n minimum is. Die uitdrukking vir die Bayes-beramers is as volg:

Eerstens:

$$\hat{\mu}_B = -\frac{1}{a} ln\left[b\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}M_t\left(-a\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}\right)\right] + \bar{X} \qquad \text{[Vgl. 5]}$$

Tweedens:

$$\hat{\mu}_B = -\frac{1}{a} ln\left[b\sqrt{\frac{S_1}{n+n_0(\nu_0+n)}}M_t\left(-a\sqrt{\frac{S_1}{n+n_0(\nu_0+n)}}\right)\right] +$$

$$\frac{n\bar{X}+n_0\mu^1}{n+n_0} \qquad \text{[Vgl. 6]}$$

Let op dat $M_t(C)$ die momentvoortbringende funksie van die *t*-verdeling is in die punt *c*. Die eksplisiete uitdrukkings van die beramers is ontwikkel deur die gebruik van Basu se stelling (Basu 1955) en die feit dat die steekproefvariansie ’n begrensde volledige voldoende statistiek is vir die populasievariansie en beskou ook (X_1 - μ, X_2 - μ, ... X_n - μ) as bykomende statistieke vir die populasievariansie. Die eksplisiete uitdrukkings is dan as volg.

Eerstens:

$$\hat{\mu}_B = -\frac{1}{a} ln\left[\frac{b}{n}\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{X_i-\bar{X}}{\sqrt{\frac{s^2(n-1)}{n}}} a\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}}\right] + \bar{X} \qquad \text{[Vgl. 7]}$$

Tweedens:

$$\hat{\mu}_B = -\frac{1}{a} ln\left[\frac{b}{n}\sqrt{\frac{S_1}{n+n_0(\nu_0+n)}}\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{X_i-\bar{X}}{\sqrt{\frac{s^2(n-1)}{n}}} a\sqrt{\frac{S_1}{n+n_0(\nu_0+n)}}}\right] +$$

$$\frac{n\bar{X}+n_0\mu^1}{n+n_0} \qquad \text{[Vgl. 8]}$$

Hierdie voorgestelde Bayes-beramers is geëvalueer deur gebruik te maak van die foutsom van kwadrate en is daarna vergelyk met die maksimumaanneemlikheidsberamer, die steekproefgemiddelde. Vir hierdie doel is die SAS-sagtewarepakket gebruik en simulasies is gedoen om die volgende grafiek te verkry (sien Figuur 1, let wel dat die LINEKS-Bayes-beramer swakker gevaar het as die steekproefgmiddelde en is om daardie rede uit die figuur weggelaat).

Literatuurverwysings

Basu, D., 1955, ‘On statistics independent of a complete sufficient statistic’, *Sankhya* 15, 377–380.

DeGroot, M.H., 1970, *Optimal statistical decisions*, McGraw-Hill Inc., United States of America.

Giles, D.E.A., 2002, ‘Preliminary-Test and Bayesian Estimation of a Location Parameter Under “reflected normal” loss’, *Statistics textbooks and monographs* 165, 287–304.

Parsian, A., 1990, ‘Bayes estimation using a LINEX loss function’, *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran*, 1, 305–307.

Varian, H.R., 1975, ‘A Bayesian approach to real estate assessment’, in S.E. Feinberg & A. Zellner eds., *Studies in Bayesian Econometrics in honor of L.J. Savage*, pp. 195–208, Amsterdam, North Holland.

Zellner, A., 1971, *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, Wiley, New York.