



**OORGANGSGEDRAG**  
**VAN 'N**  
**VOERTUIGBLADVEER**

deur

C R Bester

Voorgelê ter vervulling  
van die vereistes vir die graad

**MAGISTER IN MEGANIESE INGENIEURSWESE**

in die Departement van Meganiese en Lugvaartkundige Ingenieurswese  
Universiteit van Pretoria

Pretoria

Januarie 1993



## SAMEVATTING

### **OORGANGSGEDRAG VAN 'N VOERTUIGBLADVEER**

Deur: **C.R. Bester**

Leier: **Prof. M.C. van Schoor**

Departement: **Meganiese Ingenieurswese**

Graad waarvoor verhandeling ingedien is: **Magister**

'n Tapse onsimmetriese bladveer van 'n Suid-Afrikaansvervaardigde vragmotor is kwasi-staties en dinamies gekarakteriseer met behulp van eksperimentele toetse. 'n Analitiese model is met behulp van die Rayleigh-Ritzmetode opgestel om die kwasi-statiese en dinamiese karakteristieke van die veer te voorspel. Die doel was om 'n databasis van gemete veer karakteristieke en 'n geverifieerde veermodel daar te stel om as 'n inset vir voertuigstruktuurontwerp en voertuigdinamiese berekeninge te dien.

In die eksperimentele toetse het slaglengtes van 45 mm tot 200 mm teen snelhede van 0,01 m/s tot 3,5 m/s in beide die samedrukking- en uitrekkingrigtings as insette by die asvashegtingspunt gedien. Reaksiemagte by die rompvashegtingspunte en insetdefleksie is gemeet. Laespoedtoetsresultate is verwerk om die kwasi-statiese styfhede te bepaal. Die eerste natuurlike frekwensie is uit een langslag-, hoëspoedtoets verkry. Aanpassings in die model is gemaak deur sekere parameters te verstel totdat ooreenstemming met die gemete karakteristieke binne 'n aanvaarbare vlak van akkuraatheid bereik is.

Die styfheid in die samedrukkingrigting is bereken deur die veerblaaië oor 'n beperkte lengte weerskante van die asvashegtingspunt as aanmekeargeklem te modelleer. In die uitrekkingrigting is die blaaië as los van mekaar gemodelleer. Natuurlike frekwensies en -modusvorme is vir beide uitrekking en samedrukking voorspel.



### SAMEVATTING (vervolg)

Die voorspelde styfheid vir samedrukking is 196078 N/m teenoor die gemete waarde van 187138 N/m, met 'n gepaardgaande fout van 4,8 %. Die voorspelde styfheid in die uitrekkingsrigting is 161987 N/m teenoor die gemete waarde van 151605 N/m, met 'n gepaardgaande fout van 6,8 %. Die voorspelde eerste natuurlike frekwensie is 28,3 Hz vir samedrukking en 28,1 Hz vir uitrekking. Hierdie waardes vergelyk goed met die eksperimentele gemete waarde van 28,2 Hz.

Die dinamiese karakteristieke van die veer in die konfigurasie waarvolgens dit in die voertuig geïnstalleer word, is van dié in die eksperimentele opstelling geïsoleer deur die styfheid en traagheidsmoment van die eksperimentele opwekkingstang uit die model weg te laat. Die resulterende eerste natuurlike frekwensie in die samedrukking- en uitrekkingsrigtings is onderskeidelik 7,96 Hz en 7,43 Hz.



**ABSTRACT**

**TRANSIENT BEHAVIOUR OF A VEHICLE LEAF SPRING**

By: **C.R. Bester**

Leader: **Prof. M.C. van Schoor**

Department: **Mechanical Engineering**

Degree for which the dissertation is handed in: **Magister**

The quasi-static and dynamic characteristics of an asymmetric tapered leaf spring of a South African truck were experimentally determined over a wide range of excitation speeds and strokes. The research established a database of the structural characteristics of these types of leaf spring. An analytical model based on the Rayleigh-Ritz method was also developed with which the quasi-static and dynamic characteristics of the leaf spring can be predicted. This model can be used by automotive designers to accurately predict the response of vehicles, utilizing these types of leaf springs, for the severe South African road conditions.

Experimental excitation at the axle attachment point consisted of stroke lengths of 45 mm to 200 mm with excitation speeds ranging from 0,01 m/s to 3,5 m/s. Reaction forces at the attachment points on the body and the input deflections were measured. Low speed test results were processed to yield the quasi-static stiffnesses. The first natural frequency was calculated from the results of a long-stroke, high-speed test. Adjustments in the model were made by changing certain parameters in order to match the measured characteristics to a desired level of accuracy.

The compression stiffness was modelled by clamping the leaves over a limited length on either side of the axle attachment point. Rebound stiffness was modelled by assuming that the leaves were bending about their own neutral axes.



**ABSTRACT (continued)**

Predicted compression stiffness is 196078 N/m, compared with the measured value of 187138 N/m, with a corresponding error of 4,8 %. Predicted rebound stiffness is 161987 N/m, compared with the measured value of 151605 N/m, with a corresponding error of 6,8 %. The predicted lowest natural frequencies for compression and rebound are 28,3 Hz and 28,1 Hz respectively. These compare well with the measured value of 28,2 Hz.

The installed dynamic characteristics of the spring in the vehicle were isolated from the experimental characteristics by omitting the stiffness and moment of inertia of the experimental excitation rod from the model. The resulting lowest natural frequencies for compression and rebound are 7,96 Hz and 7,43 Hz respectively.





## DANKBETUIGINGS

'n Spesiale woord van dank gaan aan my studieleier, prof M C van Schoor, vir sy leiding, werkywer, insig en diepgaande kennis op die gebied van struktuurdinamika. Ek wil ook my dank uitspreek teenoor prof J L Steyn, vir die identifikasie en afbakening van die probleem en sy nuttige wenke.

Die hulp wat die Gerotek Voertuigtoetsfasiliteit met die befondsing van die toetse en voorsiening van die toetsmonster verleen het, was onontbeerlik. Baie dankie veral aan mnre W Haddad en R Viljoen.

'n Hartlike woord van dank aan almal wat gehelp het met die toetse, naamlik mnr C P Combrinck vir die ontwerp van die toetsbank en mnre L Engelbrecht, A du Preez en W D Joubert vir die oprigting van die toetsbank, mnre T Barnard en A D Raath vir die skryf van die "Comptest"-program en mnre W von Fintel en C H Booysen vir die hulp met die toetsuitvoering.

Die opskryf van die verhandeling is aansienlik bespoedig deur die netjiese tikwerk van mev. T Evans en M Viljoen, asook mnre P de Wet en N Plomp se hulp met die sketse.

My ouers se gebede, geduld en aansporing het grootliks daartoe bygedra om my te motiveer om die werk af te handel.

Laastens wil ek graag die volgende woorde van lof met die psalmdigter deel:

Verhef U in u sterkte, Heer,  
en laat u groot vermoë  
gesien word voor die oë  
van almal wat U roem en eer!  
Ons buig ons voor u mag  
en prys u heldekrag

(Ps. 21:9, berymd)



**INHOUD**

	<b>BLADSY</b>
<b>1. INLEIDING EN AGTERGROND</b>	<b>1</b>
1.1 Agtergrond	1
1.2 Bladveer wat ondersoek is	4
1.3 Probleemstelling en Literatuurstudie	4
<b>2. MODELLERING</b>	<b>10</b>
2.1 Detailbespreking van die Rayleigh-Ritzmetode	13
2.2 Modelling van Gedrag in die Uittrekkingsrigting	21
2.3 Modelling van Gedrag in die Samedrukkingsrigting	23
<b>3. EKSPERIMENTELE TOETSE</b>	<b>25</b>
3.1 Motivering	25
3.2 Doel	25
3.3 Toetsmonster	26
3.4 Bedryfstoestande	27
3.5 Spesifikasies vir Toetsopstelling	28
3.6 Toetsopstelling	29
3.6.1 Rekenaarbeheer	30
3.6.2 Toetsbank	32
3.7 Beperkinge van die Toetsopstelling	35
3.8 Toetsontwerp	37
3.9 Toetsprosedure	41



INHOUD (vervolg)

	BLADSY
<b>4. VERWERKING EN BESPREKING VAN TOETSRESULTATE</b>	<b>44</b>
4.1 Gemete teenoor Gevraagde Defleksies	44
4.2 Gemete Spoed teenoor Insetspoed	47
4.3 Kwasi-statiiese Styfheid	49
4.4 Natuurlike Frekwensie	52
4.4.1 Fouriertransforms	52
4.4.2 F.F.T.'s	54
4.4.3 Gestadigde Harmoniese Sein	54
<b>5. VERGELYKING TUSSEN GEMETE EN VOORSPELDE VEERKARAKTERISTIEKE</b>	<b>57</b>
5.1 Kwasi-statiiese Styfhede	58
5.2 Natuurlike Frekwensies	61
<b>6. GEVOLGTREKKINGS EN AANBEVELINGS</b>	<b>65</b>
6.1 Gevolgtrekkings	65
6.2 Aanbevelings	66
6.2.1 Gestadigde Harmoniese Karakterisering	66
6.2.2 Invloed van Asvashegting op die Veerkarakteristieke	66
6.2.3 Verwringing tydens Voertuigrol	67
6.2.4 Opwen van Veer tydens oorsteek van 'n Hindernis	67
6.2.5 Karakterisering van 'n Multistadiumveer	68
6.2.6 Verlengde Oktagonale Ringlassel	68





**INHOUD (vervolg)**

	<b>BLADSY</b>
<b>VERWYSINGS</b>	69
<b>BYLAE A: Verwantskap tussen <math>I</math>, <math>\rho_i</math> en <math>\omega_i</math> van 'n uniforme balk</b>	A.1
<b>BYLAE B: Krukgeometrie en veerdefleksie</b>	B.1
<b>BYLAE C: Gemete reakiekragte teen tyd en defleksie vir toetse 01 tot 51</b>	C.1



UNIVERSITEIT VAN PRETORIA  
UNIVERSITY OF PRETORIA  
YUNIBESITHI YA PRETORIA

## HOOFSTUK 1

### INLEIDING EN AGTERGROND

Wanneer 'n wielvoertuig oor 'n terrein beweeg, word die wiele verplaas en kragte deur die suspensiekomponente aan die voertuigstruktuur, passasiers en vrag oorgedra. Die voertuiggedrag, uitgedruk in terme van verplasing, snelheid en versnelling, sal van die padprofiel, voertuigspoed, band- en suspensie-eienskappe asook massa en plasing van voertuigkomponente, passasiers en vrag afhang.

Die suspensiestelsel bestaan gewoonlik uit 'n veer-demperkombinasie. In die laefrekwensiegebied word padinsette direk aan die passasiers en vrag oorgedra, maar in die hoër frekwensiegebied dien die onderstel as 'n onderdeurlaatfilter. In die algemeen word bladvere wat in Suid-Afrika op voertuie gebruik word, vir oorsese omstandighede ontwerp. Die probleem is dat handels- en militêre voertuie in die Suid-Afrikaanse bedryf dikwels by aansienlik strawwer omstandighede as in tipiese toestande in die land van herkoms gebruik word. Obstruksies soos klippe, slaggate en spoelslote word op ruwe terrein aangetref en stel hoë vereistes aan die ritgedrag en hantering van die voertuig. Daarom is 'n fundamentele begrip van die karakteristieke van bladvere van belang want dit word benodig sodat 'n veilige, betroubare en optimale ontwerpvermoë van voertuigsuspensies en -strukture vir Suid-Afrikaanse toestande gevestig kan word.

#### 1.1 Agtergrond

Bladvere is een van die oudste veertipes vir voertuie en is reeds op koetse en perdekarre gebruik. Fundamenteel gesien, is 'n bladveer 'n oplegbalk met voldoende elastiese defleksievermoë om die padruheid wat aan die as oorgedra word, te verswak ten einde die passasiers en vrag teen oormatige vibrasies en skokke te beskerm.

Bladvere word algemeen in die suspensiestelsels van moderne handels- en militêre

voertuie gebruik. Redes vir hierdie wye gebruik is onder andere lae vervaardigingskoste, eenvoud van suspensiesamestelling deurdat die veer naas vering ook aslokering voorsien, herstelmoontlikheid deur vervanging van blaaië en die vermoë om die veerstyfheid te wysig deur die byvoeging of verwydering van blaaië.

Lug- en kronkelvere, daarenteen, kan nie groot sykragte weerstaan nie en stange word tussen die romp en as benodig om sykragte oor te dra, wat die koste van dié suspensiestelsels verhoog. Die effektiewe massa van lug- en kronkelvere is egter laer as dié van bladvere, met 'n gepaardgaande beperking van geveerde massa. 'n Lae effektiewe massa dui ook daarop dat min veermateriaal benodig word om 'n verlangde veerstyfheid te bewerkstellig. Die eersgenoemde twee veertipes beslaan minder ruimte as bladvere. Verder bied kronkelvere meestal groter defleksievermoë, wat beweeglikheid veral oor ruwe terrein verhoog. Die styfheid van lugvere kan verstel word deur die interne druk te verander. Dit is nodig waar groot laswisselinge ter sprake is en word gedoen om die rithoogte en maksimum veerdefleksie ongeveer konstant te hou.

Die belangrikste voertuigsuspensiekarakteristieke is veerstyfheid en demping. Die statiese defleksie  $\delta_{st}$  vir 'n gegewe wielbelasting  $F$  word soos volg deur die styfheid  $k$  bepaal:

$$\delta_{st} = \frac{F}{k} \quad (1.1.1)$$

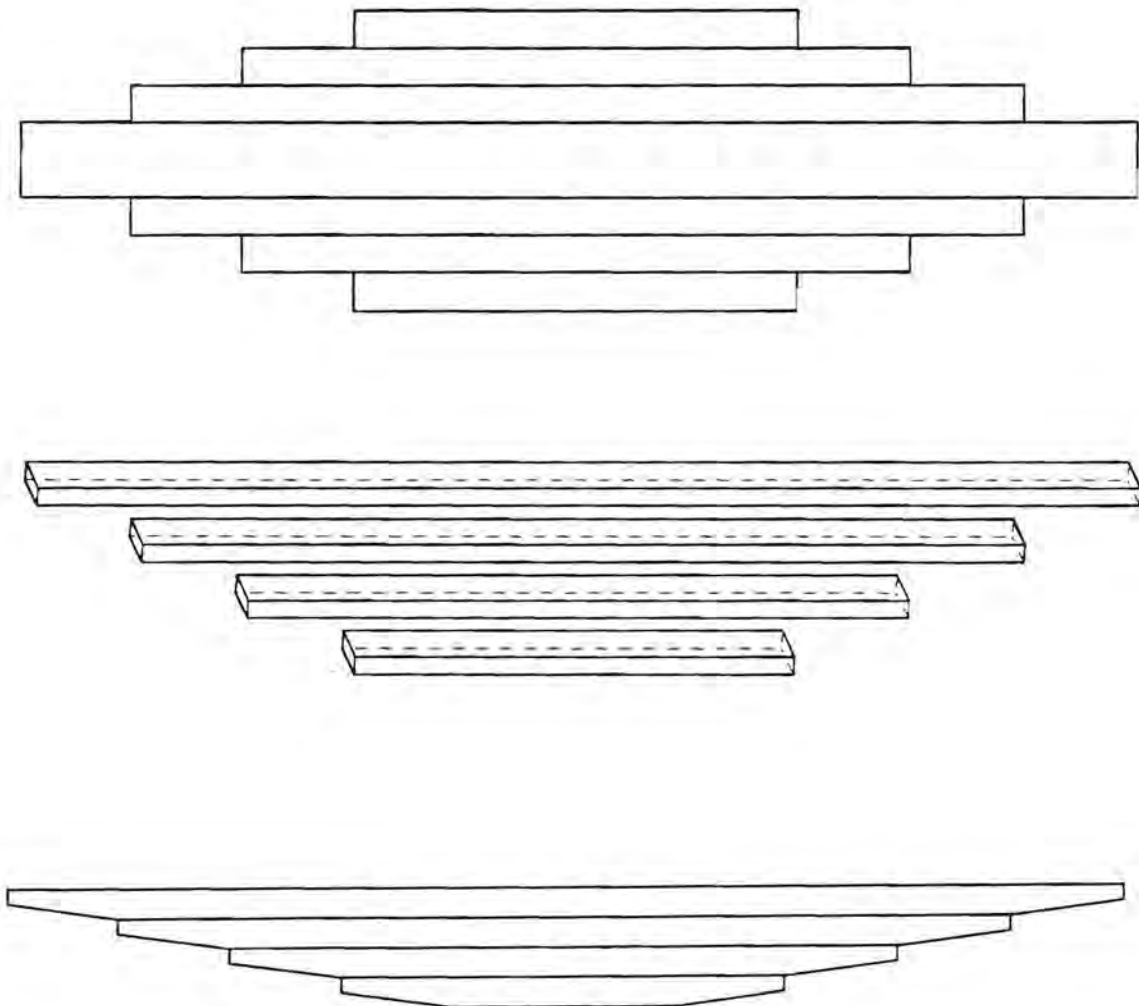
Oormatige veerdeurbuiging kan onder hoë wielbelastings voorkom en die veer kan beskadig word. In 'n poging om deurbuiging te beperk, kan meer veerstadia bygevoeg word om na 'n gespesifiseerde defleksie in werking te tree en sodoende die veerstyfheid te verhoog. Hierdie tipe vere word tweestadiumvere genoem. Ontwerp van tweestadiumvere word volledig deur Mikaila (1973) en Rowland (1973) gedek.

Die as word normaalweg ongeveer in die middel van die veer geplaas om maksimum gebruik van die beskikbare veerdefleksie te verkry. In die geval van 'n uniforme



bladprofiel neem die buigspanning lineêr toe met die afstand vanaf die rompvashetingspunt tot die asvashetingspunt. Uit 'n veersterkte-oogpunt is dit egter wenslik om die buigspanning so na as moontlik konstant te probeer hou. Dit word bewerkstellig deur die dwarsnitprofiel van die veer op twee wyses te varieer:

(i) **Tapse bladveer:** Die bladwydte neem lineêr toe met afstand vanaf die rompvashetingspunt. Sodanige profiel is onprakties weens buitensporige breedte by die as. Die veer word eerder in stroke van gelyke breedte en lineêr-toenemende lengte van onder na bo gestapel. Die bladente word afgeskuins. Die veerprofiel is dus taps. Samestelling van 'n tapse bladveer word in figuur 1.1.1 getoon.



**Figuur 1.1.1:** Samestelling van 'n tapse bladveer



(ii) **Paraboliese bladveer:** Die bladdikte  $h$  neem met afstand  $x$  vanaf die naaste rompvashegtingspunt soos volg toe:

$$h = h_0 \sqrt{\frac{x}{l}} \quad (1.1.2)$$

waar  $h_0$  die dikte by die asvashegtingspunt en  $l$  die totale veerlengte is.

Die bladwydte is konstant en die blaaië is ewe lank. Hierdie veertipe is moeiliker en duurder om te vervaardig as die taps bladveer en word minder in voertuigontwerpe gebruik.

Veer materiale verdien ook kortliks aandag. Buiten veerstaal word saamgestelde materiale ook gebruik (Therén & Lundin, 1990; en Gottenberg & Lo, 1983). Die voordele hiervan is lae massa en eliminerings van korrosie. Betroubaarheid van saamgestelde materiaal bladvere moet nog bewys word.

## 1.2 Bladveer wat ondersoek is

'n Tienbladenkelstadiumvoorveer van 'n Suid-Afrikaansvervaardigde vragmotor is vir bestudering geselekteer aangesien dit ontwerp is om aan die vereistes wat deur die strawwe Suid-Afrikaanse bedryf gestel word, te voldoen. Die veer is van staal vervaardig, is taps en onsimmetries (die lengte voor die as is korter as die lengte agter die as om bakoerhang te beperk). Die statiese ontwerpbelasting van die veer is 1850 kg en die maksimum toelaatbare belasting is 3600 kg.

## 1.3 Probleemstelling en Literatuurstudie

Obstruksies wat op ruwe terrein aangetref word, wek hoë relatiewe snelhede tussen die as en romp van die voertuig op (Nell, 1987). Die veer vertoon dus beide statiese en dinamiese gedrag. Ten einde die gedrag te beskryf, is dit noodsaaklik dat 'n model opgestel word om as bladveerontwerphulpmiddel te dien.

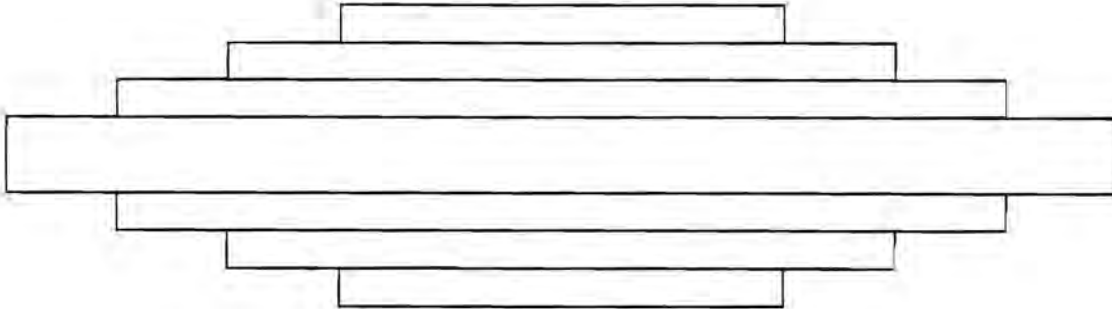
Die vermoë om die statiese en dinamiese karakteristieke van bladvere analities te kan voorspel vir Suid-Afrikaanse omstandighede sal 'n belangrike bydrae wees. Só 'n model sal voertuigontwerpers die vermoë gee om die werkverrigting, effektiwiteit en betroubaarheid van hul bladveerontwerpe te verifieer alvorens hardeware vervaardig word.

Die doel van die navorsing was dus die daarstel van 'n eenvoudige analitiese model waarmee die statiese en dinamiese karakteristieke van 'n eenvoudige bladveer vir enige gegewe padinset voorspel kon word.

Die volgende paragrawe som die relevante werk van ander navorsers, op die gebied van bladvere, op. Hierdie literatuurstudie is gedoen om te bepaal watter bydrae hierdie navorsers tot hierdie studie kon maak en tot watter mate hierdie studie 'n unieke bydrae tot die fundamentele begrip en modellering van tapse bladvere maak.

Die veer besit weens die lengte en relatiewe hoë massa verspreide styfheid en traagheid, met die gevolg dat die veer 'n oneindige aantal natuurlike modusse het. Aangesien die veer onsimmetries en taps is, kan eenvoudige uniforme balkteorie nie hier gebruik word nie. Die teorie is wel geldig, maar die oplossing is moeilik. Verder toon Cebon (1986) aan dat 'n bladveer histeretiese gedrag vertoon, m.a.w. die samedrukking- en uittrekkingskarakteristieke verskil.

Meer gesofistikeerde oplossingsmetodes vir die bladveervibrasieprobleem is deur Kobayashi (1965) en Minami (1970) ontwikkel. Kobayashi maak die aanname dat elke blad van die oplegbalk om sy eie neutrale as buig. Die blaaie kan dus vir modelleringsdoeleindes langs mekaar geplaas word, in plaas van onder mekaar. Die resulterende model is 'n trapvormige blad en word in figuur 1.3.1 getoon.



**Figuur 1.3.1: Trapvormige bladmodel**

Kobayashi los die bewegingsvergelyking analities op deur die randwaardes, naamlik defleksie, helling, buigmoment en skuifkrag by elke trap terug te vervang in die bewegingsvergelyking en 'n stel transendentale vergelykings, met die eiewaardes as onbekendes, op te los. Eksakte eiewaardes en natuurlike frekwensies word verkry. Die metode is hoogs ingewikkeld en is selfs te omslagtig vir rekenaarsimulasies.

Minami stel 'n soortgelyke model op maar maak die aanname dat kontakkrigte slegs by bladpunte oorgedra word. Eksakte eiewaardes en natuurlike frekwensies word ook verkry. Die kompleksiteit van die probleem is soortgelyk aan dié van Kobayashi.

Ter opsomming kan die gevolgtrekking gemaak word dat geen eenvoudige en akkurate dinamiese model beskikbaar is nie.

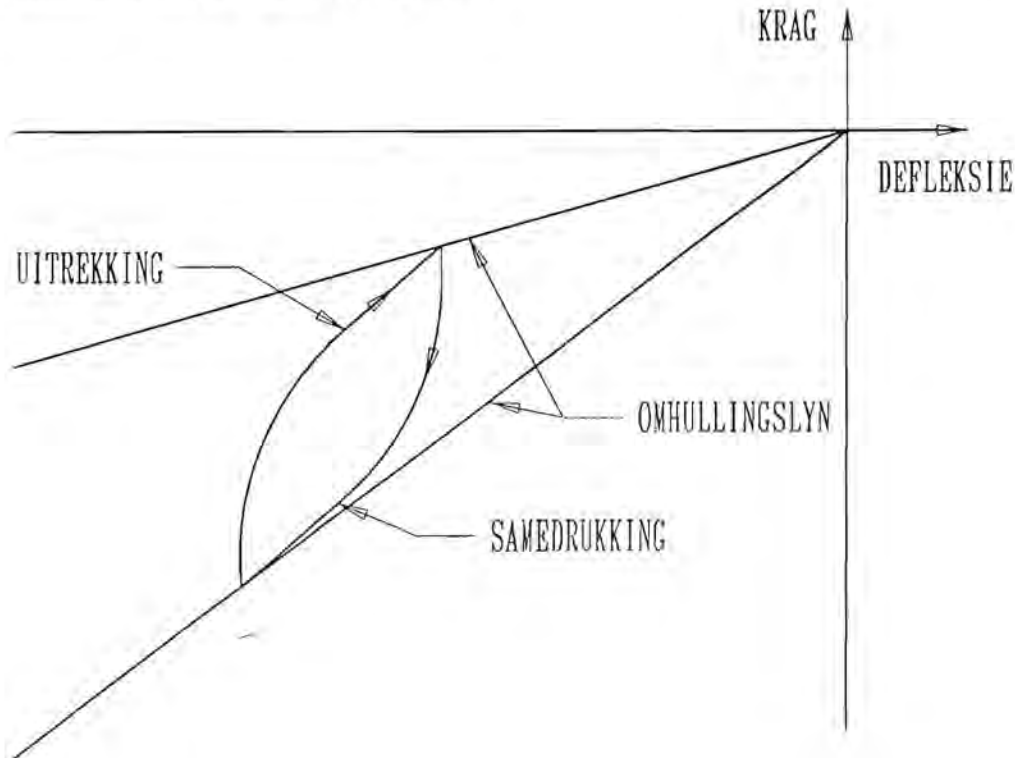
Cebon (1986) lewer die beste bydrae tot die beskrywing van bladveerhisterese. Kragte by die asvashegtingspunt is vir kwasi-statiiese opwekking, d.w.s. teen baie lae frekwensies, vir verskillende slaglengtes gemeet. Die verkrygte histereselus is opgedeel in omhullingslyne, m.a.w. die minimum krag by 'n gegewe defleksie vir



samedrukking en die maksimum krag vir uitrekking, asook vervalkrommes wat die omhullingslyne tydens die omkeer van die bewegingsrigting eksponensieel nader. Die vergelyking wat die histereselusparamters beskryf, is vanaf Cebon (1986):

$$F_i = F_{omh\ i} + (F_{i-1} - F_{omh\ i})e^{-(\delta_i - \delta_{i-1})/\beta} \quad (1.3.1)$$

waar  $F_i$  die veerkrag,  $F_{omh\ i}$  die krag op die omhullingslyn en  $\delta_i$  die veerdefleksie op tydstip  $i$  is.  $F_{i-1}$  en  $\delta_{i-1}$  is onderskeidelik die veerkrag en defleksie op tydstip  $i-1$ , terwyl  $\beta$  die histeretiese eksponensiële vervaltempo is. 'n Voorbeeld van die histereselus word in figuur 1.3.2 getoon.



**Figuur 1.3.2: Kwasi-statische histereselus**

Cebon toon ook aan dat die opwekkingsfrekwensie nie die ingeslote oppervlakte van die histereselus, m.a.w. die gedissipeerde energie vir 'n opwekkingsiklus, beïnvloed nie.

'n Soortgelyke model is deur Kranz (1985) opgestel. Die bogenoemde twee modelle faal egter daarin om die natuurlike modusvorme en frekwensies te voorspel aangesien dit nie analitiese maar empiriese modelle is. Hierdie modelle is nuttig wanneer tyddinamiese simulاسies van voertuie gedoen word.

Die Spring Design Manual (1990) gee 'n geometriese model wat ook die effek van die vertikale skakelskarnierhoek op die veerstyfheid aantoon. Dit is egter slegs 'n statiese model en kan, soos die bogenoemde kwasi-stadiese modelle, nie dinamiese gedrag voorspel nie.

Samevattend kan gesê word dat die balkvibrasiemodelle soos deur Kobayashi (1965) en Minami (1970) metodes vir die berekening van die natuurlike modusvorme en frekwensies daarstel, maar die modelle is hoogs ingewikkeld en neem nie die effek van rigtingafhanklike styfheid in ag nie. Die modelle van Cebon (1986) en Kranz (1985) beskryf wel die histereselusparameters deeglik, maar is slegs kwasi-stadiese modelle en kan nie vir die beskrywing van dinamiese gedrag gebruik word nie.

Ten einde bladveergedrag beide kwasi-stadies en dinamies te kan beskryf, word die volgende prosedure in hierdie studie gevolg. Eerstens word 'n aantal gevorderde teoretiese oplossingsmetodes in hoofstuk 2 ondersoek en die mees geskikte metode word geselekteer, waarna 'n detailbespreking van die geselekteerde metode volg. Daar word verder aangetoon dat die metode op die modellering van beide dinamiese en rigtingafhanklike kwasi-stadiese gedrag toegepas kan word.

In hoofstuk 3 word 'n omvattende stel eksperimentele toetse, wat as 'n karakteriseringshulpmiddel asook vir die vestiging van 'n databasis van reaksiekragte en defleksies oor 'n wye reeks insette dien, bespreek. Verwerking van die toetsparameters word in hoofstuk 4 beskryf. Eerstens word die gemete defleksies en spoede met die gevraagde waardes vergelyk. Daarna word die rigtingafhanklike styfhede en eerste natuurlike frekwensie uit die gemete reaksiekragte en insetdefleksies bereken. 'n Bespreking van die toetsresultate volg.





Die rigtingafhanklike styfhede, natuurlike modusvorme en frekwensies word in hoofstuk 5 m.b.v. die model wat in hoofstuk 2 opgestel is, voorspel en met die eksperimenteel-bepaalde waardes vergelyk. 'n Metode om die model te verfyn ten einde 'n aanvaarbare vlak van akkuraatheid in die voorspellings te verkry, word beskryf. Isolasië van die bladveer karakteristiek uit dié van die eksperimentele opstelling word gedoen. Laastens word gevolgtrekkings ten opsigte van die resultate wat behaal is en aanbevelings ten opsigte van toekomstige navorsingswerk wat op die gebied van bladveer karakterisering gedoen kan word, in hoofstuk 6 gemaak.

## HOOFSTUK 2

### MODELLERING

Die probleemstelling is in hoofstuk 1 gemaak en die beperkinge van die bestaande oplossingstegnieke is uitgespel. Kragtiger metodes word benodig vir beskrywing van kwasi-statiese en dinamiese bladveergedrag.

Die oplossingsmetodes wat oorweeg is, is die Rayleigh- Ritz-, Galerkin-, eindige verskil- en eindige elementmetodes. Die filosofie agter elke metode word kortliks bespreek en 'n geskikte metode word gemotiveer.

#### Die Rayleigh-Ritzmetode

Die gedrag word beskryf deur die superposisie van 'n eindige aantal gekose modusse. Omdat 'n kontinue stelsel 'n oneindige aantal natuurlike frekwensies het, sal 'n eindige aantal gekose modusse nie eksakte resultate lewer nie. Normaalweg geld die reël dat, indien  $N$ -aantal modusvorme en natuurlike frekwensies akkuraat voorspel wil word,  $2N$ -aantal modusse gekies moet word (Clough & Penzien, 1982). Die modusvorme is aanvanklik onbekend. 'n Keuse van toelaatbare modusvorme wat al die randwaardes bevredig, moet gemaak word.

In die geval van 'n nie-uniforme balk, is die natuurlike modusse 'n lineêre kombinasie van die gekose modusvorme. Die natuurlike modusvorme word bereken deur die styfheids- en traagheidsmatrikse vir die gekoppelde vryheidsgrade m.b.v. energiemetodes te bereken en daarna die eiewaardeprobleem op te los. Die metode word wiskundig volledig in paragraaf 2.1 beskryf.

#### Die Galerkinmetode

Soos in die geval met die Rayleigh-Ritzmetode, word 'n eindige aantal modusvorme gekies wat al die randwaardes bevredig. Weens die beperkte aantal modusse

ontstaan 'n foutterm in die bewegingsvergelyking wat as die residu bekend staan. Die fout wat gemaak word, word geminimeer deur die produk van die modusvorm en die residu vir elke vryheidsgraad oor die lengte van die balk te integreer en te vereis dat die resultaat 'n minimum is.

Vir  $N$ -aantal gekose modusvorme word 'n  $N \times N$ -koëffisiëntematriks (in terme van die eiewaardes) verkry, waarvan die determinant gelyk gestel word aan nul om die eiewaardes te lewer. Die modusse is nou ortogonaal en modussuperposisie kan toegepas word. Die metode word meer volledig deur Rao (1989) bespreek.

### Die Eindige Verskilmetode

Die eindige verskilmetode maak in teenstelling met die Rayleigh-Ritz- en Galerkinmetodes nie van gekose modusvorme gebruik nie. Die bekende traagheidsmomente en dwarsnitoppervlaktes word by  $N$  diskrete nodepunte gedefinieer op die balk. Die partiële afgeleides van die defleksie- en traagheidsmomentfunksies word d.m.v. numeriese differensiasie (sentraalverskilmetode) bereken. Randwaardes word in berekening gebring deur addisionele punte onderskeidelik links en regs van die linker- en regtersteunpunte te skep. Die funksiewaardes en partiële afgeleides word in die bewegingsvergelyking vervang en 'n  $N \times N$  matriks in terme van die onbekende eiewaardes en diskrete defleksies verkry. Oplossing van die eiewaardeprobleem lewer die ontkoppelde modusvorme en natuurlike frekwensies. Akkuraatheid van die oplossing neem toe met  $N$ . Die nadele van hierdie benadering is:

(a) Die grootte van die eiewaardeprobleem is  $N$ , wat baie groot kan wees afhanklik van die aantal gekose nodusse.

(b) Die metode vereis dat die beherende differensiaalvergelyking (BDV) van die stelsel bekend moet wees. Die BDV is bekend vir eenvoudige balke maar die afleiding vir meer komplekse stelsels is nie so eenvoudig nie.



Die metode word meer volledig deur Rao (1989) bespreek.

### **Eindige Elementmetode**

Die balk word in N-aantal diskrete of eindige elemente opgedeel. Die defleksievergelyking van elke element word m.b.v. interpolasiepolinome in terme van die translasië- en rotasionele verplasinge by die begin- en eindpunte van die element uitgedruk, wat vier vryheidsgrade per element impliseer. Styfheid- en traagheidsmatrikse word uit energiebeginsels bereken.

Die randwaardes by die einde van die element en dié by die begin van die volgende element word gelyk gestel. Vir N-elemente is die grootte van die saamgestelde styfheid- en traagheidsmatrikse  $(2N+2) \times (2N+2)$ . Bekende verplasinge, byvoorbeeld dié by die balksteunpunte, word verwyder, sodat die grootte van elk van die oorblywende matrikse  $(2N-2) \times (2N-2)$  is. Oplossing van die eiewaardeprobleem lewer die onbekende defleksies en die natuurlike frekwensies. Die nadeel van die metode is dat dit gewoonlik 'n groot probleem lewer wat baie rekenaarintensief is. Die voordeel is dat dit akkurate skattings van die reaksiekragte lewer. Die metode word volledig deur Rao (1989) en Weaver & Johnstone (1984) gedek.

### **Seleksie van die Rayleigh-Ritzmetode**

Die Rayleigh-Ritzmetode is gebaseer op 'n energiebenadering wat fundamenteel 'n beter benadering is as die Galerkinmetode wat 'n geweegde residumetode is. Die Rayleigh-Ritzmetode word dus in die algemeen bo die Galerkinmetode verkies. Die grootte van die styfheid- en traagheidsmatrikse wat m.b.v. die eindige elementmetode bereken word, is  $(2N-2) \times (2N-2)$  teenoor  $N \times N$  in die geval van die Rayleigh-Ritzmetode. Die gekose modusvorme kan só gekies word dat dit eksak differensieerbaar is vir enige orde afgeleide. In die geval van die eindige elementmetode moet die afgeleides vir elke element numeries bepaal word.

Die eindige verskilmetode berus op numeriese differensiasie. 'n Diskontinuiteit in

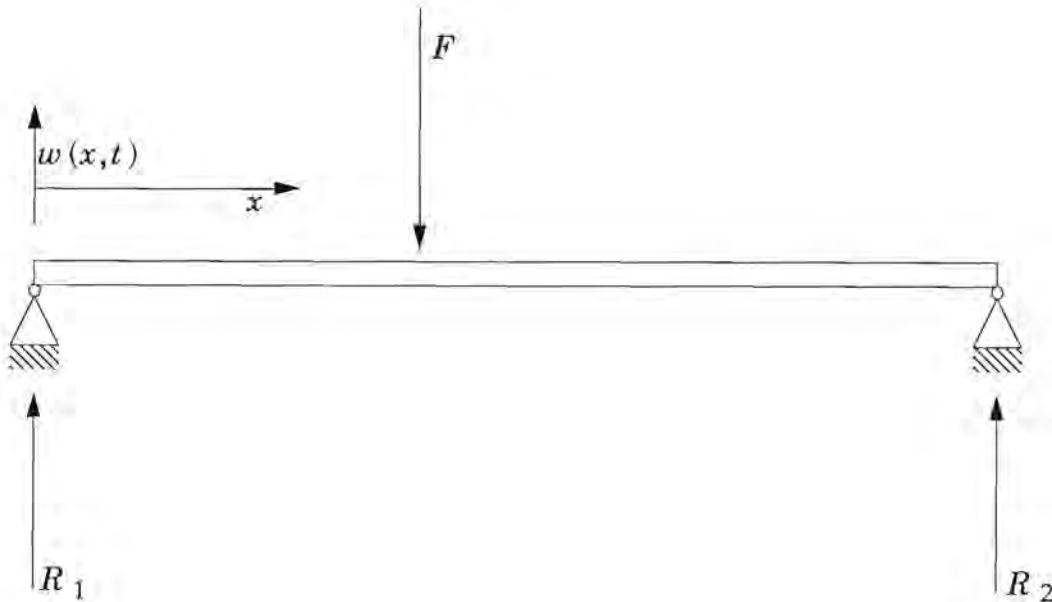
die tweede moment van oppervlakte ontstaan waar 'n klemplaat gebruik word om die as aan die veer te bevestig. 'n Groot aantal nodepunte weerskante van die diskontinuiteite word vir akkurate differensiasie benodig, wat tot 'n onaanvaarbare vlak van wiskundige kompleksiteit lei.

Die Rayleigh-Ritzmetode lewer veral in die frekwensievlak fisies - interpreteerbare resultate. Die relatiewe groothede van die gekose modusvorme wat teenwoordig is in die normaalmodusse, kan maklik geïdentifiseer word.

Weens die bogenoemde redes word die Rayleigh-Ritzmetode vir die oplos van die bladveerbewegingsvergelykings verkies.

### 2.1 Detailbespreking van die Rayleigh-Ritzmetode

Beskou die volgende oplegbalkmodel:



**Figuur 2.1.1:** Oplegbalkmodel



Die defleksie  $w$  by enige punt  $x$  langs die balk op 'n tydstep  $t$  is:

$$w = w(x,t) \quad (2.1.1)$$

$w(x,t)$  word bepaal deur die superposisie van 'n eindige aantal natuurlike, ontkoppelde modusse:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^m \phi_n(x)q_n(t) \quad (2.1.2)$$

waar  $\phi_n(x)$  die  $n$ -de normaalmodusvorm as 'n funksie van  $x$ ,  $q_n(t)$  'n periodiese funksie van tyd en  $m$  die gekose aantal modusvorms is.

Die normaalmodusvorme  $\phi_n$  is tans onbekend. Ten einde die oplossing te bepaal, word 'n aantal toelaatbare modusvorme,  $\psi_i(x)$  gekies. Hierdie modusse staan as gekose modusse ("assumed modes") bekend en moet die geometriese en natuurlike randwaardes vir 'n oplegbalk bevredig.

Die geometriese randwaardes vir die probleem onder bespreking is:

$$\psi_i(0) = \psi_i(L) = 0 \quad (2.1.3a)$$

Die natuurlike randwaardes is:

$$\psi_i''(0) = \psi_i''(L) = 0 \quad (2.1.3b)$$

Die volgende gekose modusvorme bevredig die bogenoemde randwaardes :

$$\psi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \quad (2.1.4)$$

Daar word eerstens aanvaar dat die balk slegs styfheid- en traagheidseienskappe vertoon. Beweging is dus ongedemp. Styfheid- en traagheidsmatrikse word benodig vir die berekening van die natuurlike frekwensies en modale vektore. Die elemente  $k_{ij}$  van die styfheid- en  $m_{ij}$  van die traagheidsmatriks is onderskeidelik:

$$k_{ij} = E \int_0^l I(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad (2.1.5a)$$

$$m_{ij} = \rho \int_0^l A(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (2.1.5b)$$

waar  $E$  Young se modulus van die balkmateriaal  
 $I(x)$  die tweede moment van oppervlakte van die balkdwarssnit by 'n posisie  $x$   
 $\rho$  die materiaaldigtheid  
 en  $A(x)$  die dwarsnitoppervlakte van die balk by 'n posisie  $x$  is.

'n Eksterne styfheid  $k_p$ , massa  $M$  en traagheidsmoment  $J$  wat by 'n punt  $x=p$  op die balk inwerk, beïnvloed  $k_{ij}$  en  $m_{ij}$  soos volg:

$$k_{ij} = E \int_0^l I(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx + k_p \psi_i(p) \psi_j(p) \quad (2.1.6a)$$

$$m_{ij} = \rho \int_0^l A(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx + M \psi_i(p) \psi_j(p) + J \psi_i'(p) \psi_j'(p) \quad (2.1.6b)$$

Indien  $I(x)$  en  $A(x)$  nie konstant is en  $k_p$ ,  $M$  en  $J$  nie nul is nie, is die gekose vryheidsgrade gekoppel.

Verder lei die gebruik van 'n eindige aantal vryheidsgrade tot 'n fout in die berekende natuurlike modusvorme en frekwensies. Foutminimering en ontkoppeling word gedoen deur die volgende eiewaardeprobleem op te los:

$$[k_{ij} - \omega^2 m_{ij}] U = 0 \quad (2.1.7)$$

waar  $U$  die eievektor en  $\omega_i$  die eiewaardes is wat ook die natuurlike frekwensies is. Die benaderde modale amplitudes is  $\phi_i$ . Die benaderde natuurlike modusvorme is nou ontkoppel en die normaalmodusse  $\phi_n$  is:

$$\phi(x) = \bar{\Psi} \bar{U} \quad (2.1.8)$$

Die normaalmodusse is dus die produk van die modale amplitudes en die gekose modusvorme.

Die ontkoppelde styfheid en traagheid vir elke modus word soos volg bereken:

$$k_{ii}^* = u^T k u \quad (2.1.9a)$$

$$m_{ii}^* = u^T m u \quad (2.1.9b)$$

Ongedempte natuurlike gedrag in die tydvlak word beskryf m.b.v. modussuperposisie:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^m \phi_n(x) q_n(t) \quad (2.1.10)$$

Verspreide demping kan ingesluit word. Die gekoppelde dempingsmatriks is:

$$c_{ij} = \int_0^l c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (2.1.11)$$

waar  $c(x)$  'n verspreide viskeuse dempingsfunksie is. Die eiewaardeprobleem verskil van dié vir die ongedempte geval. 'n Hessenberg-matriks met grootte  $2N \times 2N$  wat die verwantskap tussen 'n toestandsvektor  $\{w, \dot{w}\}^T$  ( $2N \times 1$ ) en die afgeleide

daarvan  $\{\dot{w}, \ddot{w}\}^T$  daarstel, word soos volg gedefinieer:

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -m^{-1}k & -m^{-1}c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2.1.12)$$

Oplossing van die eiewaardeprobleem lewer komplekse eiewaardes  $\gamma$  en 'n modale



matriks  $\Psi$  met grootte  $2N \times 1$ :

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} \quad (2.1.13a)$$

waar

$$[\Psi_2] = [\Psi_1] [\gamma] \quad (2.1.13b)$$

Damping kan op 'n alternatiewe wyse in berekening gebring word deur 'n modale dempingsfaktor  $\zeta_n$  te definieer. Die modusse bly ortogonaal indien die viskeuse dempingskoëffisiënt  $c(x)$  direk eweredig aan beide  $\rho A(x)$  en  $E$  is. Hierdie tegniek word meer volledig deur Clough & Penzien (1982) en Craig (1981) gedek.

Tot dusver in hierdie hoofstuk is aanvaar dat die bladveer lineêre gedrag vertoon. Soos in hoofstuk 1 aangetoon is, is bladveergedrag hoofsaaklik weens histerese nie-lineêr. Modale analise kan op verskeie metodes vir nie-lineêre multivryheidsgraad dinamiese stelsels aangewend word, byvoorbeeld deur harmoniese balansering en ekwivalente linearisering (Caughey, 1960; Iwan, 1965; Iwan, 1966; en Van Schoor, 1989). Dit val egter buite die omvang van hierdie verhandeling.

### **Modellering van Statische Gedrag**

Die gedrag kan op twee wyses gemodelleer word. Eerstens kan 'n wrywinglose statiese styfheidsmodel m.b.v. die metode deur die Spring Design Manual (1990) opgestel word. Die model is egter hoogs ingewikkeld. Tweedens kan die natuurlike modusvorme aangewend word om 'n statiese defleksieprofiel deur superposisie te genereer. Hierdie tegniek word ook deur Clough & Penzien (1982) gebruik. Modellering word vergemaklik aangesien die normaalmodusse reeds bekend is. Die metode word vervolgens kortliks omskryf.

Die bewegingsvergelyking vir 'n ongedempte multivryheidsgraadstelsel wat deur 'n toegepaste kragvektor  $F$  opgewek word, is:

$$m\ddot{w} + kw = F \quad (2.1.14)$$

Vir statiese gedrag is die versnellingsvektor nul:

$$\ddot{w} = 0 \quad (2.1.15)$$

Vergelyking (2.1.14) word dus gereduseer tot:

$$kw = F \quad (2.1.16)$$

'n Matriksvorm van die modussuperposisievergelyking (2.1.10) is:

$$w = \Phi q \quad (2.1.17)$$

Vergelyking (2.1.17) word in vergelyking (2.1.16) vervang:

$$k\Phi q = F \quad (2.1.18)$$

Voorafvermenigvuldiging van vergelyking (2.1.18) met  $\phi^T$  lewer:

$$k^*q = \phi^T F \quad (2.1.19)$$

wat lewer:

$$q = k^{-1}\Phi^T F \quad (2.1.20)$$

Hierdie verwantskap word volledig deur Clough & Penzien (1982) afgelei. Die statiese defleksieprofiel word, soos in die dinamiese geval, m.b.v. modussuperposisie bereken:

$$w_s(x,t) = \Phi q \quad (2.1.21)$$

Statiiese reaksiekrigte word verkry deur die waardes van die tweede moment van oppervlakte en die derde afgeleides van  $w$  m.b.t.  $x$  by die steunpunte van die balk te bereken:

$$V(0) = \sum_{n=1}^m EI(0)w_s'''(0,t) \quad (2.1.22a)$$

$$V(\ell) = \sum_{n=1}^m EI(\ell)w_s'''(\ell,t) \quad (2.1.22b)$$

Berekening van die statiese defleksieprofiel word vergemaklik deur die byvoeging van twee gekose statiese modusse volgens die statiese defleksievergelykings soos deur Shigley (1977) vir 'n onsimmetries-belaste oplegbalk gegee word:

$$\phi_1(x) = -\frac{1}{6}\ell_1^3 + \frac{1}{6}(\ell_1 - x)^3 \quad (0 < x < \ell_1) \quad (2.1.23a)$$

$$\phi_1(x) = -\frac{1}{6}\ell_1^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3(x - \ell_1)^3 \quad (\ell_1 < x < \ell) \quad (2.1.23b)$$

en

$$\phi_2(x) = -\frac{1}{2}\ell_1^2 + \frac{1}{2}(\ell_1 - x)^2 \quad (0 < x < \ell_1) \quad (2.1.24a)$$

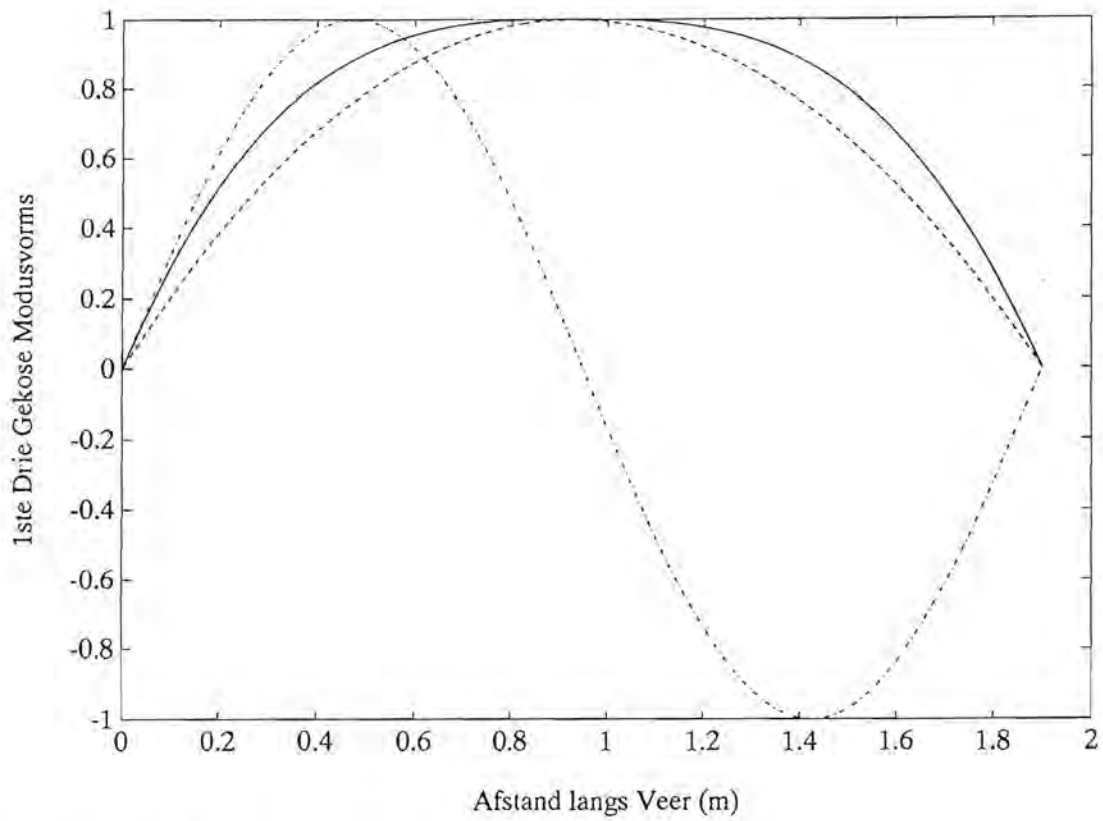
$$\phi_2(x) = -\frac{1}{2}\ell_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2(x - \ell_1)^2 \quad (\ell_1 < x < \ell) \quad (2.1.24b)$$

waar  $\ell_1$  die afstand vanaf die linkersteunpunt tot by die aangrypingspunt van die krag  $F$ ,  $\ell$  die totale bladlengte en  $\ell_2$  die verskil tussen  $\ell$  en  $\ell_1$  is. Die eerste sinusvormige gekose modusvorm word verwyder. Die eerste drie gekose modusvorme word in figuur 2.1.2 getoon. Die belangrikste vergelykings wat die dinamiese en statiese gedrag van 'n nie-uniforme oplegbalk beskryf, is nou bekend en word vervolgens op bladveergedrag van toepassing gemaak.

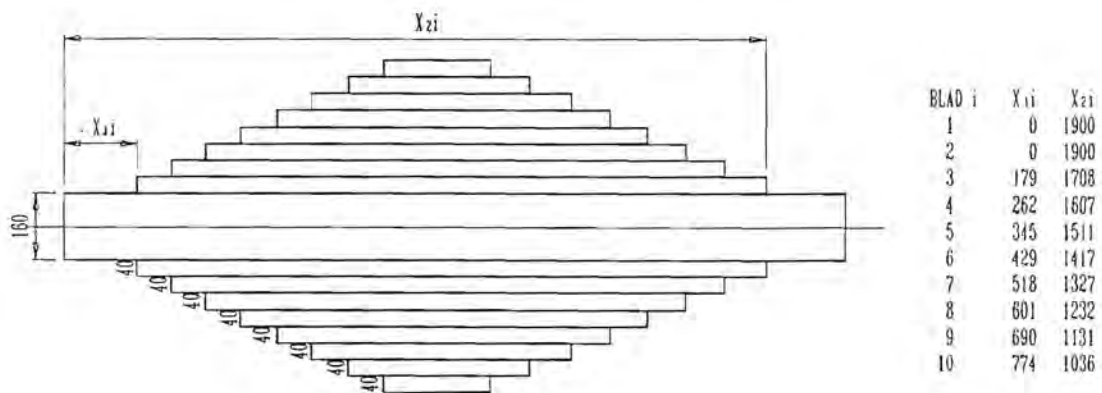
## 2.2 Modellering van Gedrag in die Uittrekkingsrigting

Tydens uitrekking vanuit 'n saamgedrukte posisie word die kontakkrag tussen die blaaie verminder, wat die blaaie toelaat om los van mekaar te kan beweeg. Die aanname van Kobayashi (1965) word dus hier gemaak dat elke blad om sy eie neutrale as buig. Hiervolgens kan 'n trapvormige enkelblad soortgelyk aan dié van Kobayashi (1965) opgestel word. Die ekwivalente bladdimensies word in figuur 2.2.1 getoon.



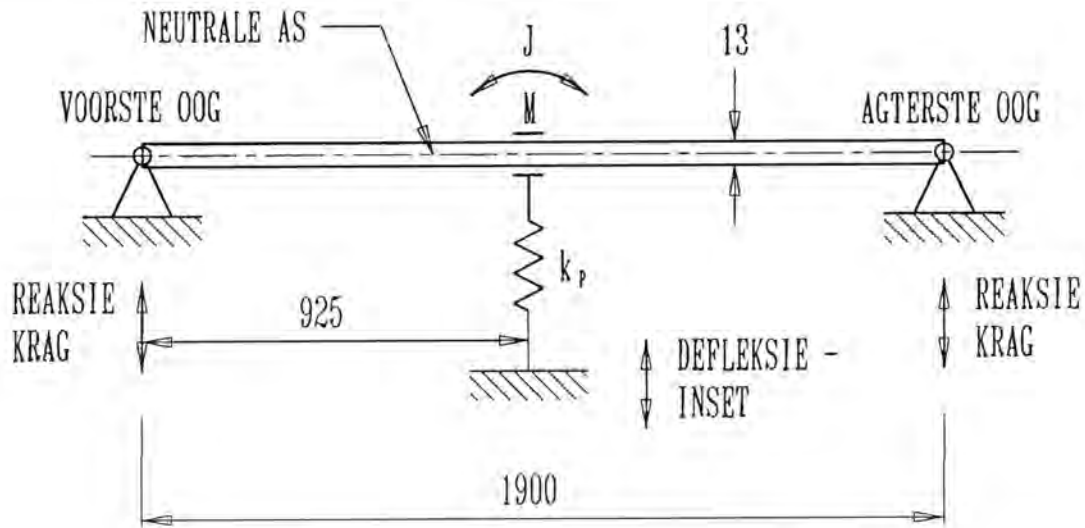


**Figuur 2.1.2:** Die eerste drie gekose modusvorme



**Figuur 2.2.1:** Ekwivalente trapvormige bladdimensies

Die oplegbalkmodel van die veer word in figuur 2.2.2 getoon.  $M$  en  $J$  stel onderskeidelik die massa en traagheidsmoment van die klempate by die as voor, terwyl  $k_p$  die styfheid van die opwekkingstang voorstel. Die laasgenoemde styfheid dien as hulpmiddel vir die karakterisering van die veer indien dit deel uitmaak van 'n eksperimentele opstelling. Die effek wat die skakelskarnier op lengteverandering van die veer tydens opwekking mag hê, word buite rekening gelaat. 'n Lineêre krag-defleksieverwantskap word dus aanvaar.

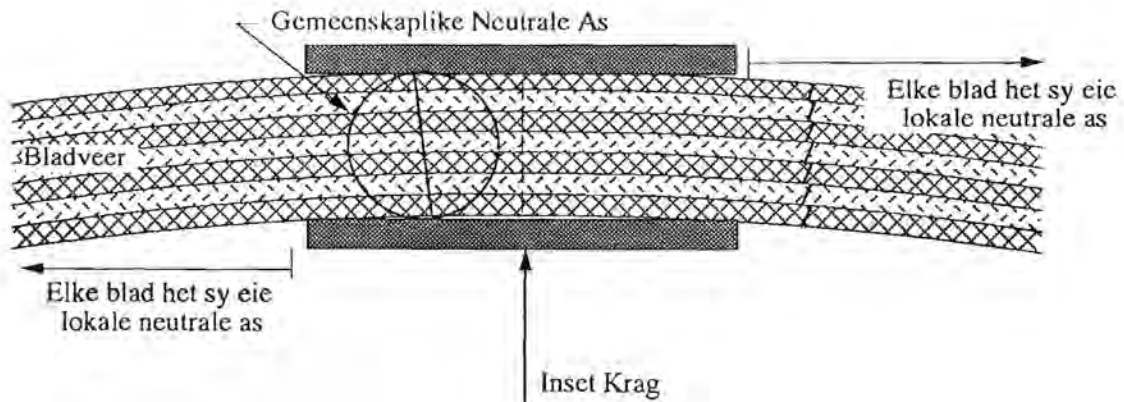


**Figuur 2.2.2:** Oplegbalkmodel van die veer

### 2.3 Modellering van Gedrag in die Samedrukkingsrigting

Tydens samedrukking word 'n drukrag by die asvashegtingspunt toegepas. Die model wat opgestel word, maak van die aanname gebruik dat die blaaië lokaal in die omgewing van die asvashegtingspunt sluit omdat hulle vasgedruk word. Buiging geskied dus om 'n gemeenskaplike neutrale as, wat die tweede moment van oppervlakte lokaal beduidend verhoog. 'n Verdere aanname word gemaak dat glijp tussen die blaaië buite hierdie gebied plaasvind en dat elke blad om sy eie neutrale

as buig, soos wat die geval tydens uitrekking is. Die model is beperk in die sin dat verspreide sluit-en-glip wat m.b.v. Cebon (1986) se empiriese model aangetoon is, nie deur die eersgenoemde model gesimuleer kan word nie. Die lokale sluitaksie word in figuur 2.3.1 uitgebeeld.



**Figuur 2.3.1: Lokale sluitaksie tydens samedrukking**

Dinamiese en kwasi-statische gedrag in die uitrekking- en samedrukkingsrigtings is nou gemodelleer. Simulasies m.b.v. die model word in hoofstuk 5 gedoen en vergelyk met die eksperimentele resultate, wat in die volgende twee hoofstukke gedek word.



## HOOFSTUK 3

### EKSPERIMENTELE TOETSE

#### 3.1 Motivering

Twee metodes kan aangewend word om veer karakteristieke eksperimenteel te bepaal, naamlik deur metings op die voertuig te doen of deur laboratoriumtoetse. In die eersgenoemde geval kan daar fisies met die voertuig oor 'n terrein met variërende ruhede gery word, waartydens as- en rompversnellings gemeet word. Die verskil tussen die twee versnellingsmetings lewer die relatiewe asvashegtingspuntversnelling. Die nadeel van die metode is dat reaksiekragte by die rompvashgtingspunte moeilik gemeet kan word aangesien die aanbring van lasselle tussen die veer en romp wysiginge aan die voertuigstruktuur noodsaak en die rithoogtegeometrie verander en verder dat hierdie metode dan ook die karakteristieke van die demper meet. Met ander woorde, die bladveer kan nie uniek gekarakteriseer word nie.

Met laboratoriumtoetse, daarenteen, kan die veer as substruktuur van die res van die voertuigdinamiese stelsel geïsoleer en apart onder beheerde toestande gekarakteriseer word. In hierdie studie word, op grond van die ooglopende voordele, laboratoriumtoetse as die enigste sinvolle karakteriseringsmetode verkies. Die eksperimentele apparaat word van meet af aan gekonstrueer om die lasselle te inkorporeer deur in die ontwerp stadium voldoende ruimte daarvoor toe te laat.

#### 3.2 Doel

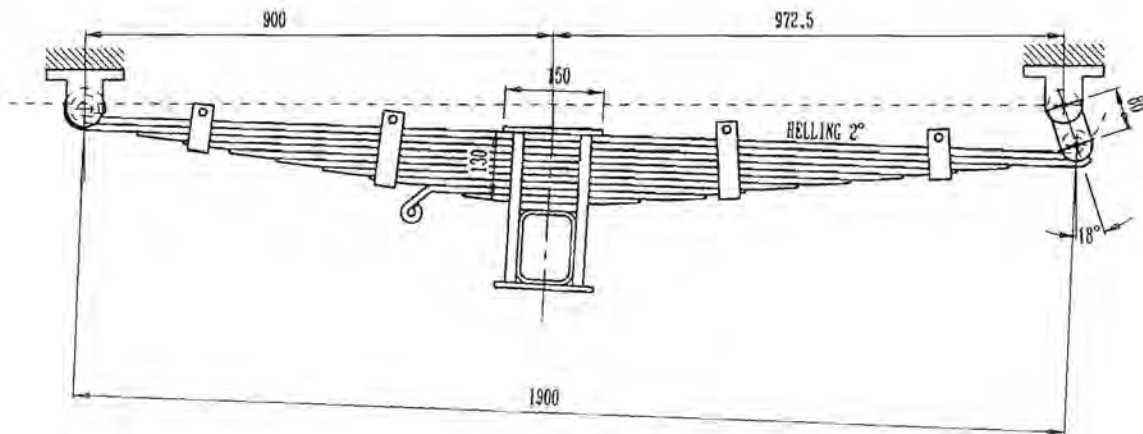
Die mikpunt met die eksperimentele toetse is die verifikasie van die model wat in hoofstuk 2 opgestel is, asook die vestiging van 'n databasis wat veergedrag vir 'n wye reeks insette bevat om as voertuigstruktuur- en suspensiestelselontwerphulpmiddel te dien. Verder moet die toetse praktiese bedryfstoele sover moontlik realisties naboots ten einde toepaslike resultate oor die wydste moontlike gebruiksgesied te verseker.



Akkurate en betroubare resultate kan slegs verkry word indien die toetse ooreenkomstig 'n volledige toetsspesifikasie uitgevoer word. Voorafbekende eienskappe van die toetsmonster lewer 'n belangrike inset tot die opstel van die spesifikasie.

### 3.3 Toetsmonster

'n Tienbladenkelstadiumvoorveer van 'n Suid-Afrikaansvervaardigde vragmotor is geselekteer vir dinamiese karakterisering. Fundamentele en praktiese motivering vir die wetenskaplike ondersoek op die betrokke veer is reeds in hoofstuk 1 gegee. 'n Sy-aansig van die veer in die geïnstalleerde toestand word in figuur 3.3.1 getoon.



**Figuur 3.3.1:** Toetsmonster

Die veer is onsimmetries, d.w.s. die veerlengtes voor en agter die asvashegtingspunt verskil. Die horisontale afstande tussen die asvashegtingspunt en die voorste en agterste oë is onderskeidelik 900 mm en 972,5 mm. Die boonste twee blaaië is ewe lank (1900 mm) en strek oor die volle lengte van die veer. Die bladwydte van 80 mm is konstant en elke blad het 'n maksimum dikte van 13 mm. Die onderste agt blaaië is taps. Die maksimum veerdikte, wat by die asvashegtingspunt voorkom, is 130 mm. By 'n oneindige krommingstraal (reguit veer) is die horisontale hellingshoek 2° na agter.

'n Skakelskarnier is by die agterste rompvashegtingspunt aangebring. Die veer is voorsien van 'n senterbout en vier klampe langs die lengte om verspreide kontak tussen die blaaie te bewerkstellig en sodoende die spanning in elke blad te verlaag. Die tweede onderste blad is van 'n vashegtingspunt vir 'n hidrouliese demper voorsien.

Vervaardigerspesifikasies vir die veer word hieronder in tabel 3.3.1 gegee:

**Tabel 3.3.1: Vervaardigerspesifikasies**

Styfheid (staties, wrywingloos)	155469 N/m
Statische ontwerplas	18190 N
Statische ontwerpdefleksie (reguit veer)	117 mm samedrukking
Maksimum toelaatbare statiese las	35291 N
Maksimum toelaatbare statiese defleksie	227 mm samedrukking

### 3.4 Bedryfstoestande

Soos in hoofstuk 1 aangetoon is, is die vertikale spoed waarteen die veer opgewek word, afhanklik van die voertuigspoed, terreinruheid, band- en veer karakteristieke en traagheideienskappe van die as en voertuigromp. 'n Maksimum en minimum opwekkingspoed word as inset tot die toetsspesifikasie benodig. Die maksimum veilige spoed waarteen die voertuig 'n 200 mm hoë trapvormige hindernis kan oorsteek, is 40 km/h. Oorskryding hiervan kan tot voertuigskade lei. Die gepaardgaande maksimum relatiewe spoed waarteen die veer by die asvashegtingspunt opgewek word, is 3,48 m/s (Nell, 1987). Die minimum opwekkingspoed wat die veer ondervind, behalwe vir die statiese belastinggeval, is ongedefinieerd aangesien enige opwekkingspoed tussen nul en die maksimum kan voorkom. Vir kwasi-statische karakterisering (m.a.w. slegs styfheid en histerese word gemeet) kan 0,01 m/s as laag genoeg beskou word.

Tydens die oorsteek van 'n hindernis word die veer aanvanklik saamgedruk, waarna dit die gestoorde potensiële energie vrystel en ontspan om weer die statiese defleksie na 'n sekere tydverloop te bereik. Veergedrag in beide die samedrukking- en uittrekkingsrigtings is dus van belang.

Om die veer te kan karakteriseer, moet 'n geskikte toetsapparaat opgerig word. Die toetsmonster- en bedryfstoestandspesifikasie dien as inset tot die spesifikasies waaraan die opstelling moet voldoen.

### **3.5 Spesifikasies vir Toetsopstelling**

'n Maksimum slaglengte van 227 mm oor 'n opwekkingspoedbereik van 0,01 tot 3,5 m/s in beide samedrukking- en uittrekkingsrigtings word benodig.

Die frekwensie  $f_m$  waarteen seine gemonster moet word tydens opwekking is afhanklik van die opwekkingspoed  $V$ , die slaglengte  $s$  en die aantal meetpunte  $n$ :

$$f_m = \frac{Vn}{s} \quad (3.5.1)$$

'n Maksimum monsterfrekwensie van 1024 Hz is beskikbaar. Vir hoëspoed, kortslagtoetse lewer hierdie frekwensie 'n minimum van 30 meetpunte per toets. Meer datapunte kan egter in die geval van laespoedtoetse gemeet word.

Die vereiste maksimum statiese opwekkingskrag is 35291 N. Die transmissie tydens dinamiese opwekking, d.w.s. die reaksiekrag per eenheid insetkrag, is, veral in die omgewing van 'n natuurlike frekwensie, afhanklik van demping, wat onbekend is. Twee 100 kN lasselle (een by elke rompvashetingspunt) is as voldoende beskou.



Kwasi-statische opwekking geskied relatief stadig en aktuering van die asvashegtingspunt kan per hand vanaf 'n beheerkonsole verstel word. Die pulstyd vir hoëspoedopwekking is egter baie kort. 'n Puls met 'n slaglengte van byvoorbeeld 227 mm teen 'n spoed van 3,5 m/s het 'n tydverloop van slegs 65 ms. Uiteraard kan sodanige puls nie per hand beheer word nie en word 'n rekenaar en 'n proporsionele-integraal-afgeleide beheerder (afgekort PIA) vir akkurate posisiebeheer benodig.

Die toetsapparaat moet die geïnstalleerde konfigurasie van die veer in die voertuig realisties naboots. Eerstens moet die posisies van die lasselle ooreenstem met dié van die rompvashegtingspunte en die opwekkingspunt met dié van die asvashegtingspunt. Opwekking moet sover moontlik slegs in die vertikale rigting geskied.

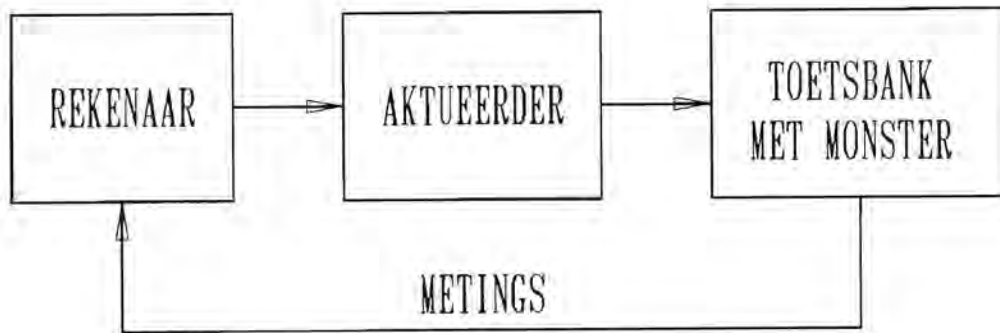
Verder moet die opstelling nie resoneer tydens opwekking nie. 'n Hoë minimum natuurlike frekwensie van die toetsapparaat is dus 'n vereiste. Hierdie vereiste is nodig om te verseker dat die dinamiese karakteristieke van die toetsopstelling nie die toetsresultate besmet nie.

Al die bogenoemde spesifikasies waaraan die toetsopstelling moet voldoen, word vervolgens in ag geneem om die toetsopstelling te ontwerp.

### **3.6 Toetsopstelling**

'n Vloeiagram wat die globale werking van die toetsopstelling uitbeeld, word in figuur 3.6.1 getoon.





**Figuur 3.6.1:** Vloedigram vir toetsopstelling

'n Persoonlike rekenaar beheer die aktueerder, wat meganiese beweging van die toetsmonster opwek. Die toetsbank bevat die aktueerder, toetsmonster, lassel en 'n verplasingssomsetter.

### **3.6.1 Rekenaarbeheer**

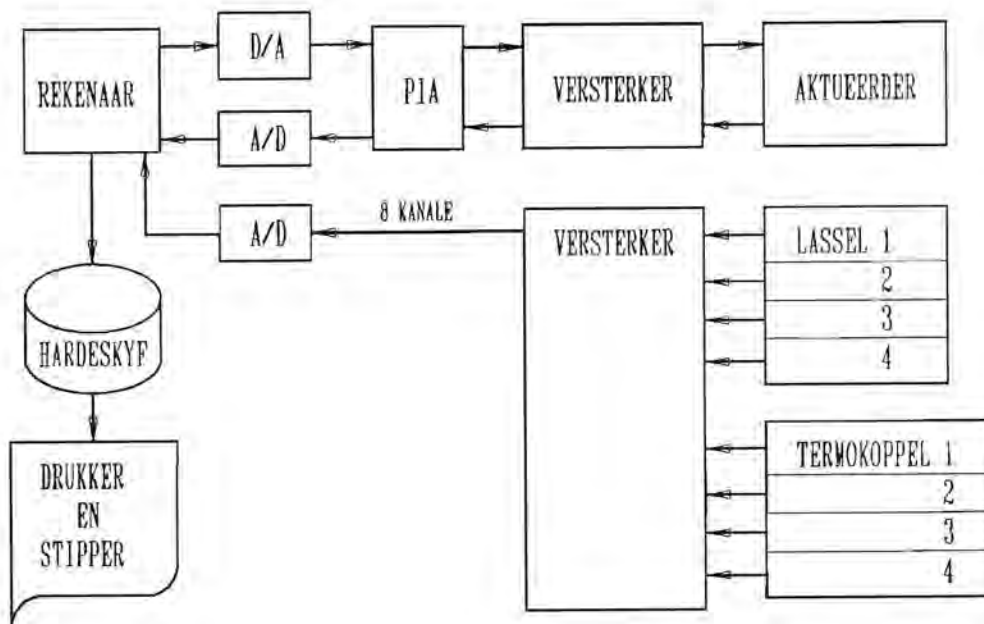
Buiten vir die hoëspoedbeheer wat in paragraaf 3.5 gemeld is, maak rekenaarbeheer ook intydse meting en omskakeling van seine moontlik. Verplasinge en kragte word normaalweg as elektriese spannings gemeet en m.b.v. kalibrasiefaktore omgeskakel om die terugvoer- en uitsetparameters in die toepaslike dimensies te lewer. Boonop kan groot hoeveelhede data op hardeskyf gestoor en in die vorm van tabelle en grafieke afgevoer word.

Kanale word benodig om data tussen die rekenaar en die meet- en beheerpunte uit te ruil. Twee aktueerderkanale is beskikbaar, naamlik een vir aandrywing en een vir verplasingmeting. Voorsiening is gemaak vir 'n maksimum aantal van vier lasselkanale vir kragmetings en vier termokoppelkanale vir temperatuurmetings. Kanaalinligting wat in die rekenaar ingevoer word, is kalibrasiefaktore, monsterfrekwensie en anti-aliasfrekwensie.

Die rekenaar lewer en ontvang seine in versyferde vorm. Die PIA, aktueerder, lasselle en termokoppels is egter analoogtoestelle. Omskakeling van analoog- na versyferde seine word gedoen deur analoogversyferaars (beter bekend as A/D-kaarte), terwyl D/A-kaarte die versyferde seine vanaf die rekenaar omskakel na analoogseine.

'n Program bekend as "Comptest" (Barnard, 1989) is uitsluitlik vir die karakterisering van voertuigsuspensiekomponente geskryf. Die program word gebruik om drie tipes suspensieparameters te bepaal, naamlik krag teen spoed vir hidrouliese dempers, krag teen verplasing vir konstante spoed- en gestadigde harmoniese insette op vere en dempers, sowel as temperatuur teen aantal siklusse vir gestadigde harmoniese opwekking van hidrouliese dempers. 'n Volledige handleiding is vir die gebruik van die program opgestel (Barnard, 1989).

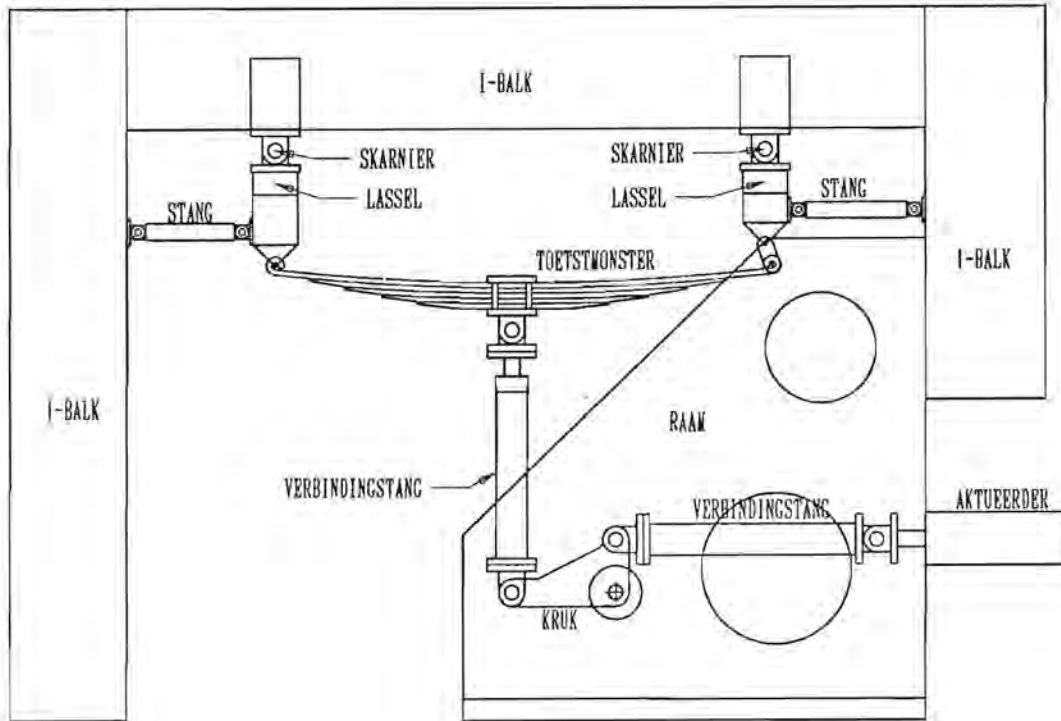
'n Diagrammatiese voorstelling van die rekenaarbeheersiklus word in figuur 3.6.2 getoon.



**Figuur 3.6.2: Rekenaarbeheersiklus**

### 3.6.2 Toetsbank

Die toetsbank word in figuur 3.6.3 getoon.



**Figuur 3.6.3:** Toetsbank

'n Bestaande raam wat aanvanklik vervaardig is vir die dinamiese karakterisering van hidrouliese dempers het as basis vir die toetsapparaat gedien. Die raam is van bevestigingspunte voorsien vir aktueerders van 40 kN tot 250 kN. 'n Balkstruktuur is aangebring om die veer en lasselle te ondersteun. Die posisies van die lasselle stem ooreen met dié van die rompvashegtingspunte op die voertuig en die opwekkingspunt met dié van die asvashegtingspunt.

Twee skuifweblassele is vir die kragmetings gebruik. 'n Bereik van 100 kN per lasselle is as voldoende beskou (sien ook paragraaf 3.5). Hoewel die bogenoemde tipe lasselle, volgens die vervaardiger, eksentriese belasting, buigmomente en sykragte kan weerstaan, is skarniere en stange aangebring om akkurate meting en aksiale belasting



van die lassel se sover moontlik te verseker.

Dit kan aangetoon word dat 'n natuurlike frekwensie  $f_i$  van die balk direk eweredig is aan die vierkantwortel van die verhouding van die tweede moment van oppervlakte  $I$  van die dwarsnit tot die gewig per eenheidlengte  $\rho_l$ :

$$f_i \propto \sqrt{I/\rho_l} \quad (3.6.1)$$

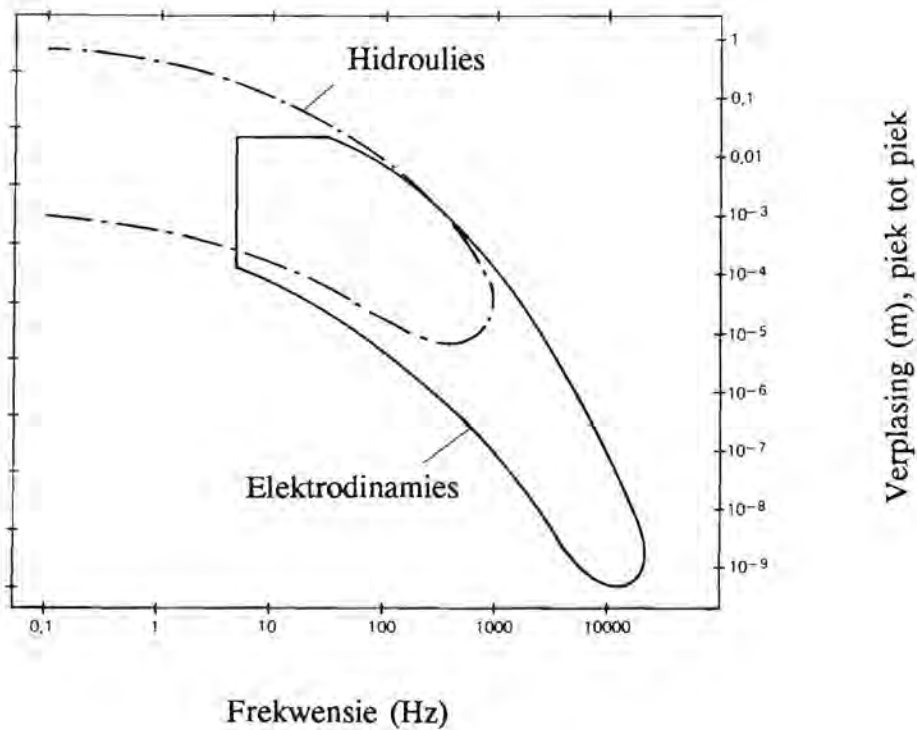
Hierdie verwantskap word in Bylae A afgelei. In 'n poging om apparaatresonansie te verhoed, is 'n I-balk met 'n hoë  $I:\rho_l$ -verhouding geselekteer m.b.v. gepubliseerde tabelle (Struktuurstaaltabelle (Hersien), 1987). Die balkparameters word in tabel 3.6.1 getoon. Die geskatte natuurlike frekwensie van die I-balk, vanaf vergelyking 3.6.1, was 380 Hz. Hierdie frekwensie is aansienlik hoër as die eerste resonante frekwensie van die toetsmonster in die toetsbank (ongeveer 28 Hz).

**Tabel 3.6.1: Balkparameters**

Diepte (flens tot flens)	457 mm
Flensbreedte	191 mm
Tweede moment van oppervlakte	$2,941 \cdot 10^{-4} \text{m}^4$
Gewig per eenheidlengte	657 N/m

Aktueerders word normaalweg op een van twee wyses aangedryf, naamlik elektrodinamies en hidroulies. Elektrodinamiese aktueerders is geskik vir opwekking oor 'n frekwensieband van ongeveer 5 Hz tot 20 kHz. Beskikbare slaglengtes wissel vanaf ongeveer 0,3 nm tot 20 mm. Hidrouliese aktueerders kan aangewend word vir frekwensies laer as 1 kHz en slaglengtes van  $5,5 \mu\text{m}$  tot so lank as 1 m. 'n Grafiek wat die toepassingsgebiede van die twee aktueerdertipes aantoon (ontleen aan Broch, 1984) word in figuur 3.6.4 getoon.



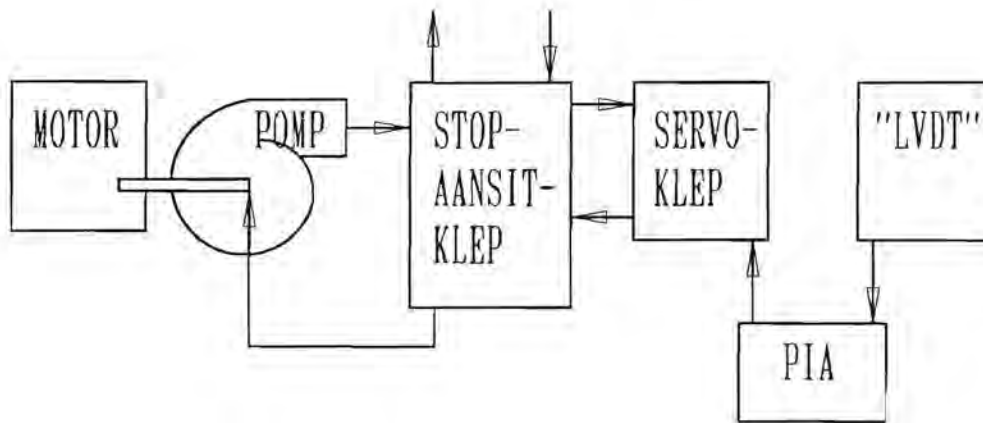


**Figuur 3.6.4:** Toepassingsgebiede van elektrodinamiese en hidrouliese aktueerders

Die gespesifiseerde slaglengte van 227 mm noodsaak dus hidrouliese opwekking. Vloeiërdrywing vir die aktueerders word voorsien deur 'n hidrouliese kragpakstelsel bestaande uit elektriese motors en sentrifugaalpompe. 'n Vloeiërvendeelklep, ook bekend as 'n stop-aansitklep, beheer vertakking van die vloei indien die kragpak aktueerders vir twee of meer eksperimente van drywing moet voorsien.

Aktueerderverplasing word deur 'n servoklep beheer. Die klep ontvang seine deur 'n versterker vanaf die PIA-beheerder. Die aktueerder is voorsien van 'n lineêre veranderlike verplasingssomsetter LVDT ("linear variable displacement transducer") wat gemete verplasing terugvoer na die PIA-beheerder.

Die hidrouliese beheersiklus word diagrammaties in figuur 3.6.5 getoon.



**Figuur 3.6.5:** Hidrouliese beheersiklus

### 3.7 Beperkinge van die Toetsopstelling

Die maksimum spoed van die aktueerderstang word bepaal deur die kragpakdrywing, die weerstand van die stop-aansitklep, lengtes en diktes van die hidrouliese pype, weerstand en traagheid van die servoklep, stangdiameter van die aktueerder, traagheid van al die bewegende dele en meganiese impedansie van die toetsmonster.

Aktueerders met hoë nominale kraguitsette bereik oor die algemeen 'n laer maksimum spoed en andersom. Suierspoed teen klepvloei vir verskillende aktueerders word in tabel 3.7.1 getoon. 'n 100 kN aktueerder in kombinasie met 'n beskikbare 250 l/min servoklep is ter wille van maksimum spoed bo 'n 250 kN aktueerder verkies.

**Tabel 3.7.1: Maksimum spoed vir verskeie aktueerder-servoklepkombinasies**

Klep- vloei l/min	Nominale aktueerderkraguitset (kN)												
	10	16	25	40	63	100	160	250	400	630	1000	1600	2500
9,5*	0,7	0,43	0,28	0,18	0,12	0,08	0,05						
19 *	1,35	0,85	0,55	0,35	0,23	0,15	0,09	0,05					
38 *		1,7	1,1	0,7	0,45	0,29	0,18	0,10	0,07				
63 *			1,8	1,15	0,72	0,5	0,3	0,18	0,12	0,08	0,05		
125*				2,2	1,4	0,8	0,55	0,35	0,22	0,15	0,09	0,06	
160**					1,75	1,15	0,7	0,45	0,3	0,19	0,11	0,08	0,05
250**						1,8	1,1	0,75	0,45	0,3	0,17	0,13	0,08
400**							1,7	1,15	0,7	0,45	0,27	0,19	0,12
630**								1,8	1,1	0,7	0,42	0,29	0,19
1000**										1,1	0,65	0,44	0,3
1600**											1,0	0,68	0,45

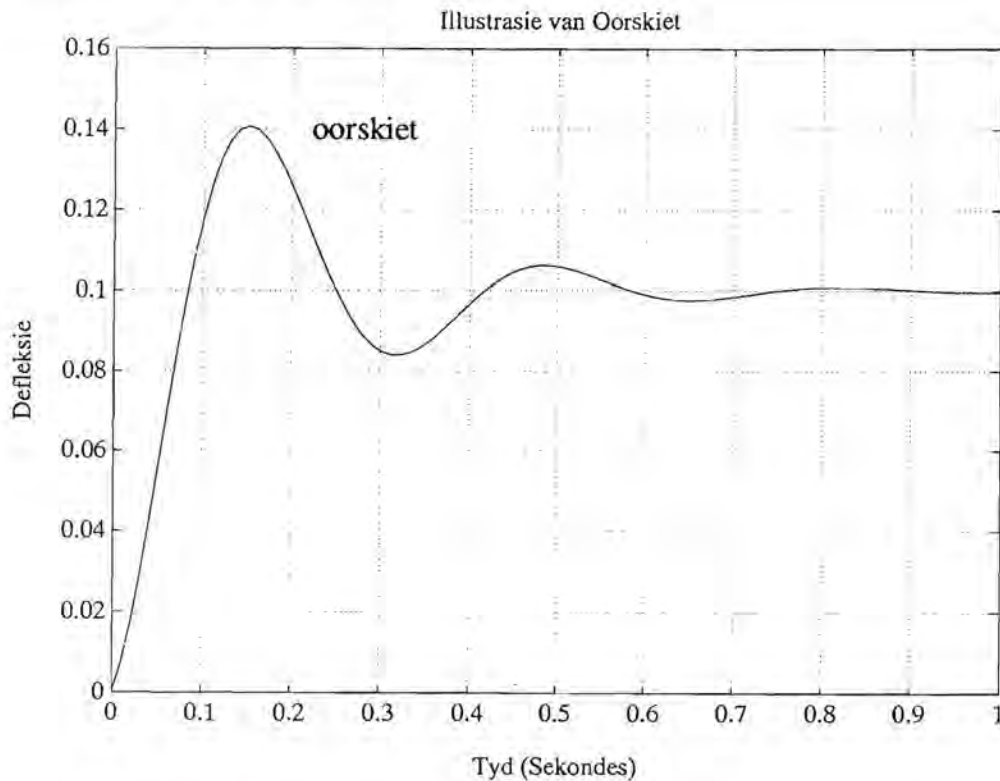
\* Tweestadiumservokleppe  
\*\* Driestadiumservokleppe

Die maksimum getabelleerde spoed van 1,8 m/s is slegs 51% van die benodigde spoed van 3,5 m/s. Die raamwerk is van 'n meganiese kruk met 'n 2:1 uitset-tot-insetverplasingverhouding tussen die aktueerder en die toetsmonster voorsien om die spoed te verdubbel. By langslagopwekking swaai die kruk deur groot rotasiehoeke met gepaardgaande geometriese afwykings. Verder impliseer die teenwoordigheid van die kruk vyf addisionele skarniere tussen die aktueerder en die veer, wat spelings, histerese en traaghede meebring wat nie teenwoordig sou wees indien 'n aktueerder met voldoende spoed direk op die veer kon inwerk nie. 'n Stel vergelykings wat die geometriese afwykings beskryf, maak deel uit van die "Comptest"-program en word volledig in Bylae B afgelei.

Hoëspoedopwekking skep ook 'n probleem met beskikbare slaglengte. Weens die traaghede van die aktueerder, kruk en toetsmonster is die uitsetslaglengte langer as die slaglengte wat beveel word. Hierdie verskynsel staan as oorskiet ("overshoot") bekend. Figuur 3.7.1 beeld oorskiet van 'n liggedempte stelsel vir 'n trapinset uit. Oorskiet kan beperk word deur die demping te verhoog. Dit is egter ongewens vir hoëspoedopwekking omdat hoër insetkragte vereis word om die dempkrag te bowe te kom. Beperking van die insetslaglengte is as alternatief verkies. Vir die doel van



die toetse is die asvashegtingspuntdefleksie beperk tot 210 mm (i.p.v. die gespesifiseerde waarde van 227 mm) om veerskade te voorkom. Dit beteken dat 17 mm vir oorskiet toegelaat is.



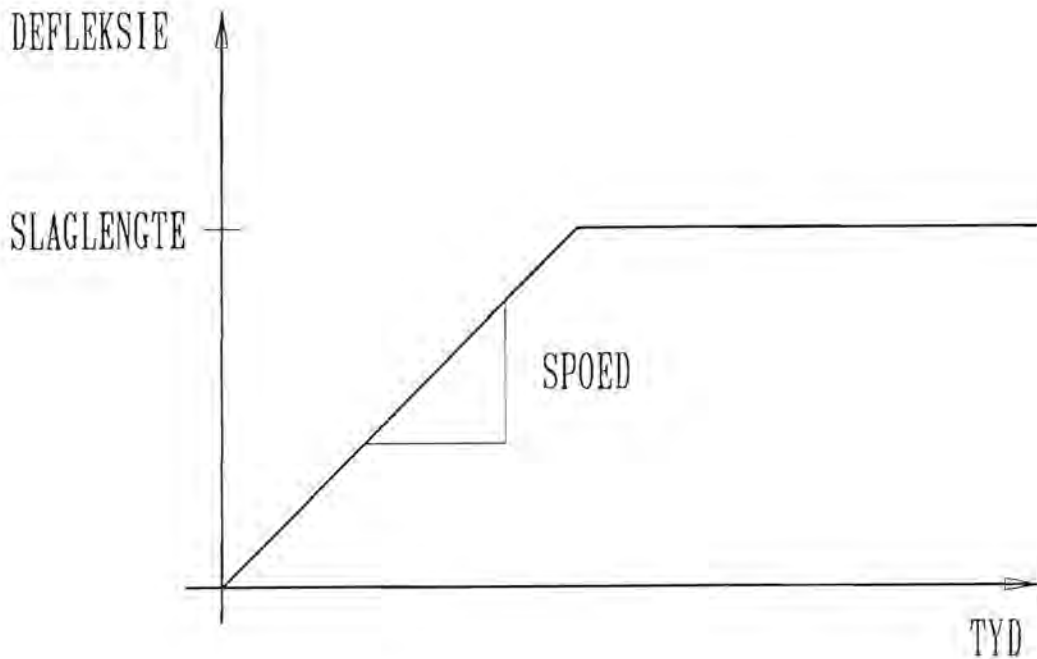
**Figuur 3.7.1:** Oorskiet van 'n liggedempte stelsel

### 3.8 Toetsontwerp

Die bekendste insettipes wat vir die bepaling van die oorgangsgedrag van dinamiese stelsels gebruik word, is impuls-, trap- en hellingsdefleksies teen tyd. Impuls- en trapinsette is moeilik toepasbaar aangesien dit in die praktyk onmoontlik is, as gevolg van die traagheid van die toetsopstelling, om 'n perfekte trap- of impulsinset te verkry. Hellingsinsette bied die voordeel dat die spoed op enige tydstip tydens opwekking eindig is. Die hoë vereistes van 'n oneindige helling wat met impulse en trappe geassosieer word, word derhalwe nie in die geval van hellingsinsette aan die aktueerder en beheerstelsel gestel nie.

'n Hellingsinset word in figuur 3.8.1 getoon. Sodra die gevraagde slaglengte bereik

is, word die helling beëindig en die defleksie konstant gehou om veerskade te voorkom. Let wel daarop dat dit ook onmoontlik is om 'n perfekte helling te verkry, veral aan die einde van die slaglengte waar die dinamika van die toetsopstelling tot oorskiet lei.



**Figuur 3.8.1:** Hellingsdefleksie teen tyd

Inssetsnelhede is vanaf die kwasi-statische spoed van 0,01 m/s tot die maksimum verlangde spoed van 3,5 m/s geïnkrementeer. Ses tot tien snelheidsinkremente word as voldoende beskou. Die maksimum spoed is tot 4,0 m/s verhoog om vir die aktueerder-, kruk- en toetsmonstertraaghede te kompenseer.

Ten einde die volle kwasi-statische en dinamiese gedrag van die veer te bepaal, is die volgende aanvangsdefleksies geselekteer: 10 mm, 60 mm, 117 mm, 165 mm en 210 mm. 117 mm verteenwoordig die defleksie by die statiese ontwerplas.

Alle kwasi-statische toetse is weens die gepaardgaande lae monsterfrekwensies tot kortslagtoetse beperk, aangesien die datalêers die beskikbare "Comptest"- geheue tydens langslagkarakterisering mag oorskry.

Die begindefleksies wat gebruik is, maak slaglengtes van 45 mm tot 200 mm moontlik.

Die parameters wat tydens opwekkingstoetse gemeet is, is reaksiekrag by elke lassel sowel as asvashegtingspuntverplasing. Die tydinterval  $t_m$  waarteen data gemeet is, is die resiprook van die monsterfrekwensie  $f_m$ :

$$t_m = \frac{1}{f_m} \quad (3.8.1)$$

Die kriterium waarvolgens die monsterfrekwensie bepaal is, naamlik 'n minimum aantal van dertig punte per toets (sien ook paragraaf 3.5) is vir alle toetse gehandhaaf.

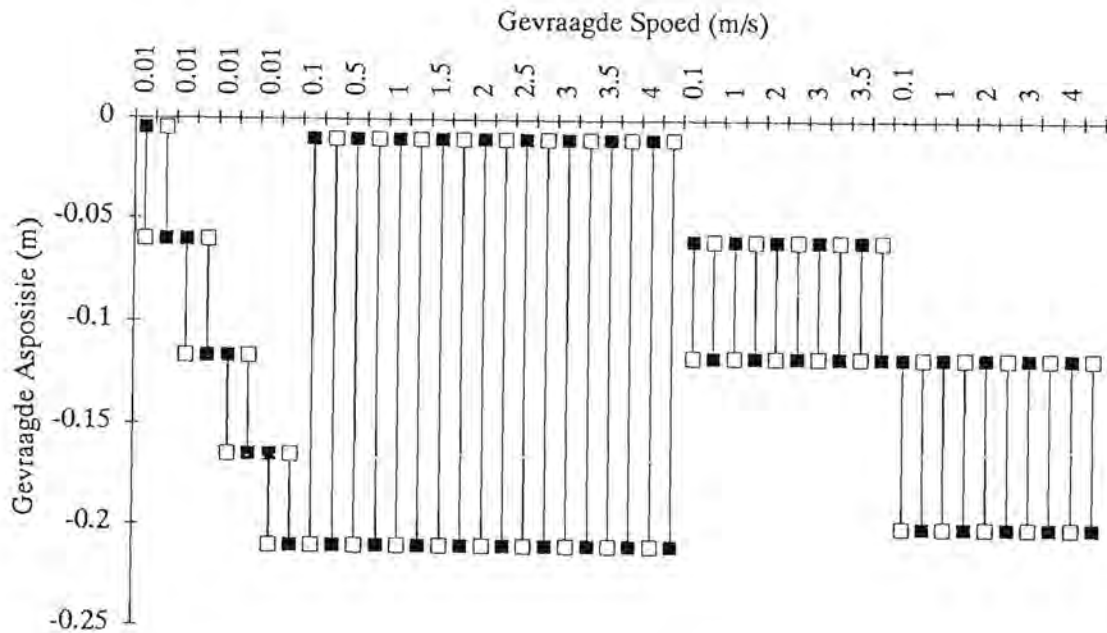
Gemete reaksiekragte en asvashegtingspuntverplasing vir elke toets is op hardeskyf gestoor. Elke toets is van 'n nommer voorsien vir latere herwinning en verwerking. Verdere gestoorde toetsparameters was toetsdatum, operateur, reeksnommers en datums van laaste kalibrasie van lasselle en aktueerderverplasingssomsetter, toetsmonstertipe, -vervaardiger, -model en voertuig, nominale aktueerderlas, slaglengte en klepvloeitempo.

Die volledige toetsskedule ooreenkomstig die verlangde begindefleksies, slaglengtes, opwekkingsmetode, die twee snelheidsrigtings en die monsterfrekwensies word in tabel 3.8.1 gerapporteer en grafies in figuur 3.8.2 aangedui.



**Tabel 3.8.1: Toetsskedule**

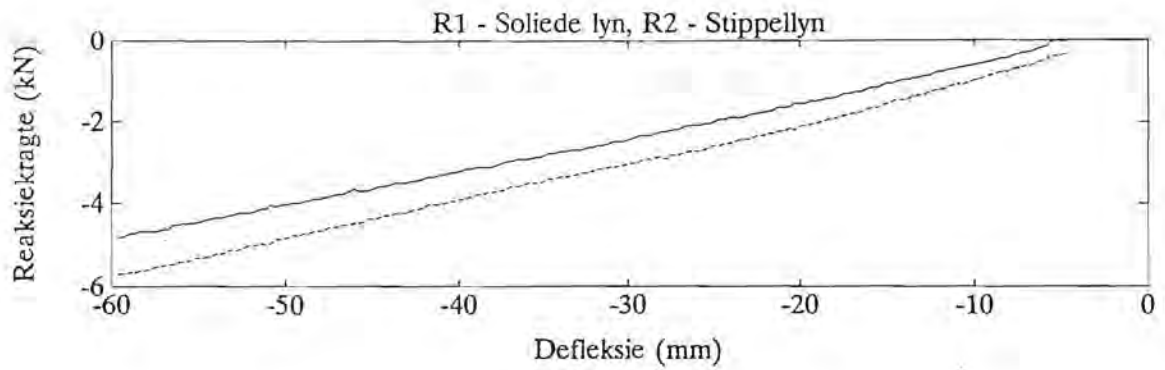
Toets Nr.	Begíndefleksie (mm)	Slaglengte (mm)	Snelheid (m/s)	Snelheidsrigting	Monsterfrekwensie (Hz)
01	-5	55	0,01	samedrukking	32
02	-60	55	0,01	uitrekking	32
03	-60	57	0,01	samedrukking	32
04	-117	57	0,01	uitrekking	32
05	-117	48	0,01	samedrukking	32
07	-165	48	0,01	uitrekking	32
08	-165	45	0,01	samedrukking	32
09	-210	45	0,01	uitrekking	32
11	-10	200	0,1	samedrukking	32
12	-210	200	0,1	uitrekking	32
13	-10	200	0,5	samedrukking	128
14	-210	200	0,5	uitrekking	128
15	-10	200	1,0	samedrukking	256
16	-210	200	1,0	uitrekking	256
17	-10	200	1,5	samedrukking	256
18	-210	200	1,5	uitrekking	256
19	-10	200	2,0	samedrukking	512
20	-210	200	2,0	uitrekking	512
21	-10	200	2,5	samedrukking	512
22	-210	200	2,5	uitrekking	512
23	-10	200	3,0	samedrukking	512
24	-210	200	3,0	uitrekking	512
25	-10	200	3,5	samedrukking	512
26	-210	200	3,5	uitrekking	512
27	-10	200	4,0	samedrukking	512
28	-210	200	4,0	uitrekking	512
31	-60	57	0,1	samedrukking	128
32	-117	57	0,1	uitrekking	128
33	-60	57	1,0	samedrukking	512
34	-117	57	1,0	uitrekking	512
35	-60	57	2,0	samedrukking	1024
36	-117	57	2,0	uitrekking	1024
37	-60	57	3,0	samedrukking	1024
38	-117	57	3,0	uitrekking	1024
39	-60	57	3,5	samedrukking	1024
40	-117	57	3,5	uitrekking	1024
41	-117	83	0,1	samedrukking	128
42	-200	83	0,1	uitrekking	128
43	-117	83	1,0	samedrukking	512
44	-200	83	1,0	uitrekking	512
45	-117	83	2,0	samedrukking	512
46	-200	83	2,0	uitrekking	512
47	-117	83	3,0	samedrukking	512
48	-200	83	3,0	uitrekking	512
49	-117	83	4,0	samedrukking	1024
51	-200	83	4,0	uitrekking	1024



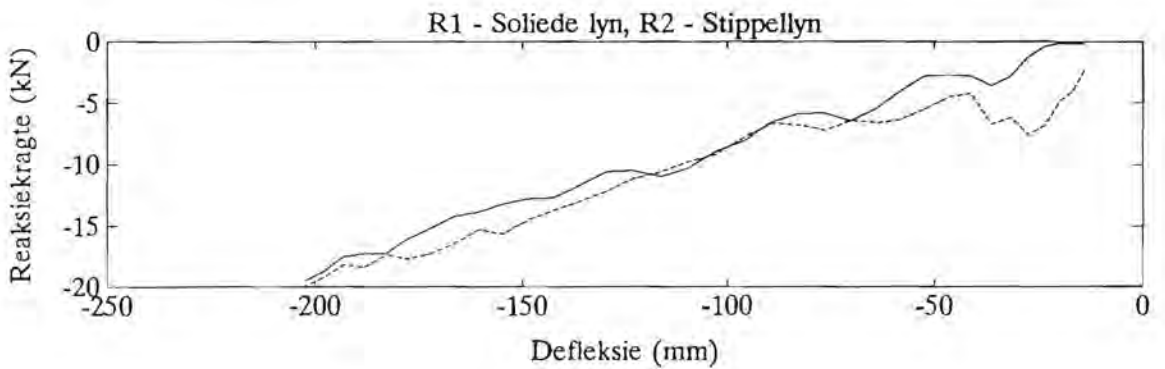
**Figuur 3.8.2: Toetsskedule (grafies)**

**3.9 Toetsprosedure**

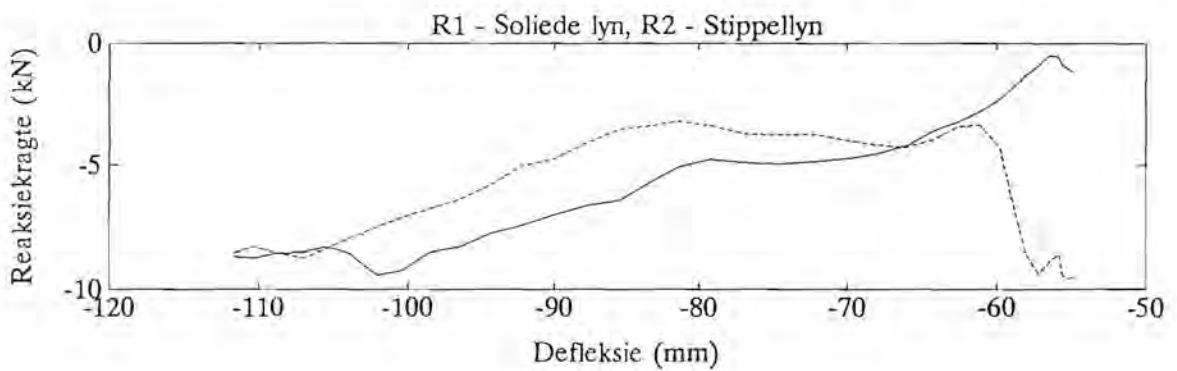
Die lasselle, LVDT en aktueerder is vooraf gekalibreer en die kalibrasiefaktore is in die "Comptest"-program en versterkers ingevoer. Verder is die data vir elke toets ooreenkomstig tabel 3.8.1, tesame met die anti-aliasfrekwensie ("anti-aliasing frequency") ingevoer. Alarmlimiete is ingestel ten einde die aktueerder af te skakel in die geval van oormatige oorskiet. Uitvoering van elke toets is begin deur die asvashegtingspunt stadig (teen 0,01 m/s) vanaf nuldefleksie tot by die begindefleksie te verplaas. Defleksies en reaksiekragte is slegs tydens die duur van elke insetpuls gemeet. Toetsdata is in die vorm van tabelle en grafieke van reaksiekragte teen asvashegtingspuntdefleksie afgevoer. Gemete reaksiekragte teen defleksie vir toetse 01, 27 en 40 word grafies in figure 3.9.1a tot 3.9.1c voorgestel.  $R_1$  verwys telkens na die reaksiekrag by die skakelskarnier en  $R_2$  na die reaksiekrag by die voorste oog.



**Figuur 3.9.1a:** Reaksiekrigte  $R_1$  en  $R_2$  vir toets 01



**Figuur 3.9.1b:** Reaksiekrigte  $R_1$  en  $R_2$  vir toets 27



**Figuur 3.9.1c:** Reaksiekrigte  $R_1$  en  $R_2$  vir toets 40



Volledige resultate vir toetse 01 tot 51 word grafies in Bylae C getoon.

In hierdie hoofstuk is 'n eksperimentele toetsprosedure daargestel en 'n databasis van verteenwoordigende toetsresultate is gevestig. Die resultate word verder in hoofstuk 4 verwerk om die benodigde kwasi-statiiese en dinamiese karakteristieke te verkry. Hierdie resultate word dan in hoofstuk 5 met die voorspelde resultate vergelyk.

## HOOFSTUK 4

### VERWERKING EN BESPREKING VAN TOETSRESULTATE

Die resultate van die eksperimentele toetse is in hoofstuk 3 gegee. Verwerking daarvan moet gedoen word om die benodigde kwasi-statische en dinamiese karakteristieke te verkry. Die parameters wat bepaal moet word, is defleksie teen tyd, spoed teen tyd, kwasi-statische styfheid en die eerste natuurlike frekwensie.

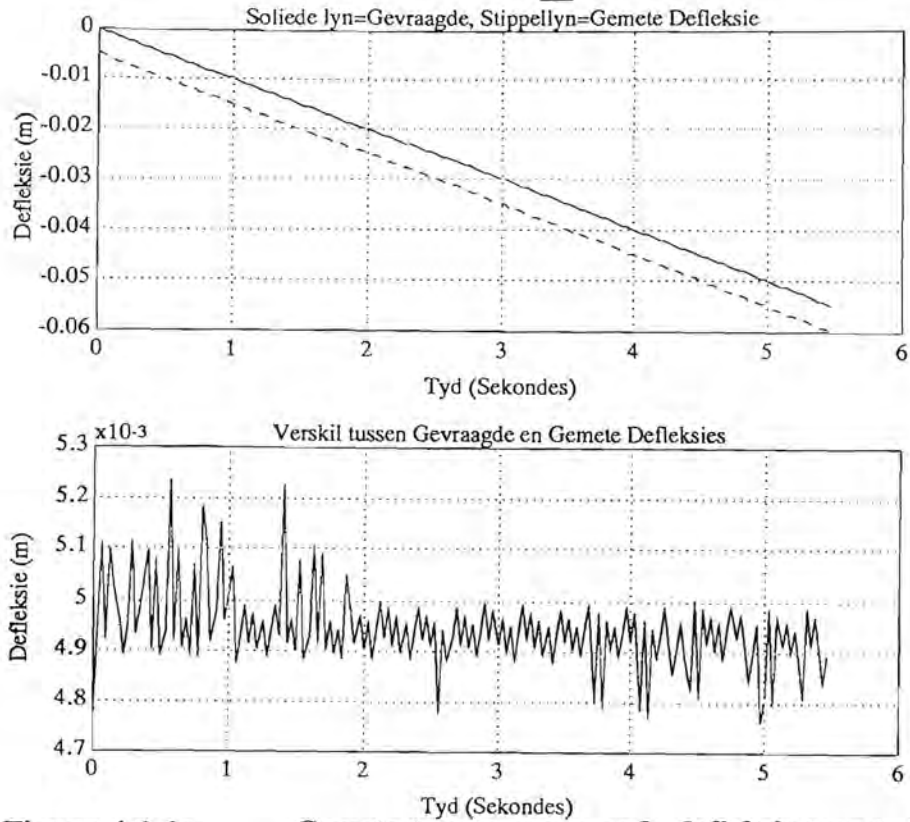
#### 4.1 Gemete teenoor Gevraagde Defleksies

Aangesien die bladveer gekarakteriseer wou word deur 'n hellinginset as opwekkingsein te gebruik, is dit belangrik om na die verskil tussen die gemete en gevraagde defleksies te kyk. Die toetse wat vir hierdie doeleinde geselekteer is, word in tabel 4.1.1 getoon.

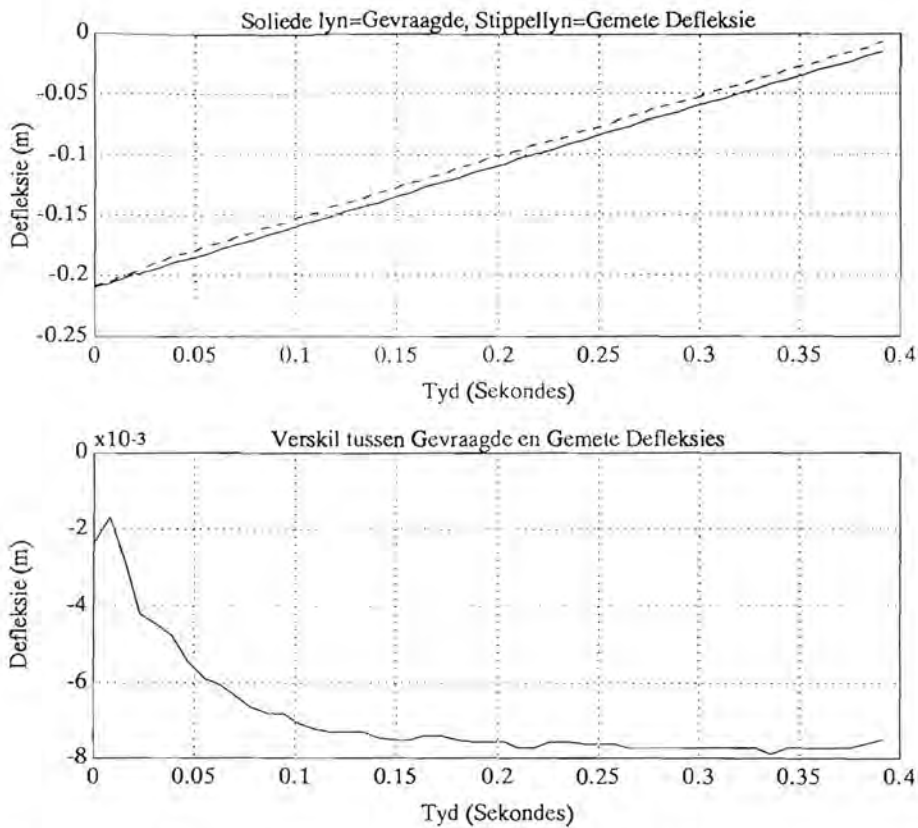
**Tabel 4.1.1:** Tabel van geselekteerde toetse

Toetsnommer	Insetspoed (m/s)	Tipe toets
01	-0,01	Kwasi-statische samedrukking, kortslag
14	0,5	Laespoed uitrekking, langslag
28	4,0	Hoespoed uitrekking, langslag
49	-4,0	Hoespoed samedrukking, kortslag

Gemete teenoor gevraagde defleksies teen tyd vir die getabelleerde toetse word tesame met die fout grafies in figure 4.1.1 getoon.

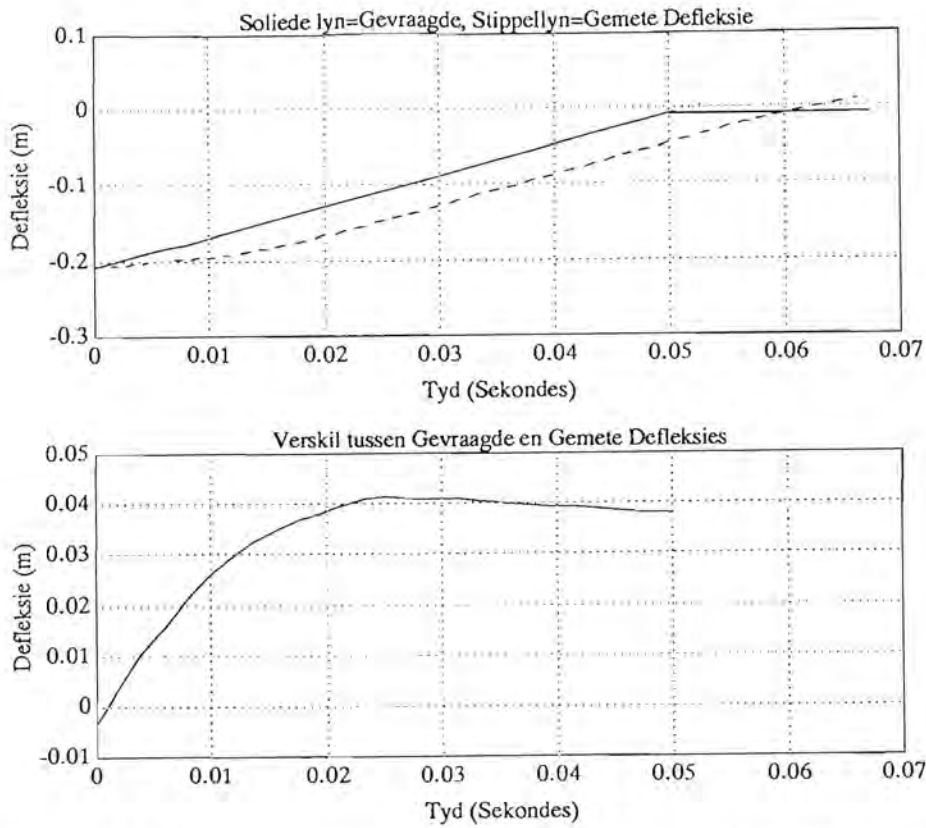


**Figuur 4.1.1a:** Gemete teenoor gevraagde defleksie teen tyd vir toets 01

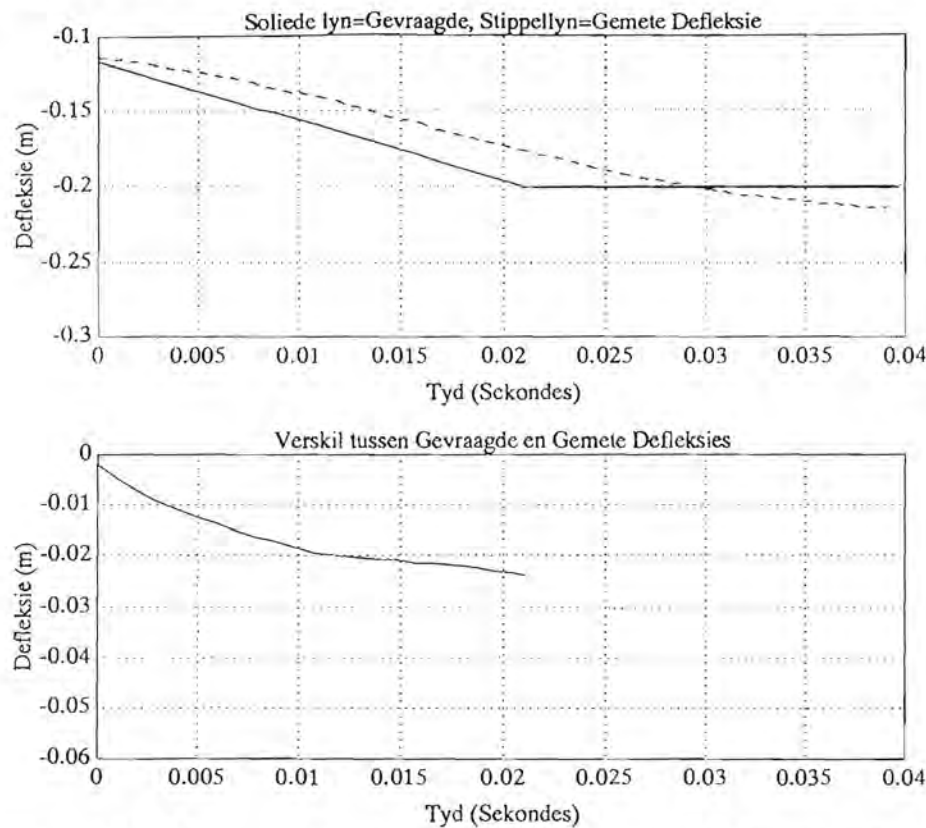


**Figuur 4.1.1b:** Gemete teenoor gevraagde defleksie teen tyd vir toets 14





**Figuur 4.1.1c: Gemete teenoor gevraagde defleksie teen tyd vir toets 28**



**Figuur 4.1.1d: Gemete teenoor gevraagde defleksie teen tyd vir toets 49**

Uit figure 4.1.1a tot 4.1.1c kan waargeneem word dat defleksies tydens kwasi-statiiese toetse akkurater beheer kan word as vir lae- en hoëspoedtoetse. Akkuraatheid van defleksiebeheer neem algemeen af met insetspoed. Die rede daarvoor is dat traagheidseffekte van die toetsopstelling en -monster afwesig is by kwasi-statiiese toetse, maar meer beduidend word namate spoed toeneem omdat verhoogde aktueerderdrywing benodig word om die verlangde defleksie teweeg te bring. 'n Oorskiet van 15 mm is in die geval van toets 49 waargeneem, wat tipies verwag kan word in die geval van 'n hoëspoedinset en 'n kort slaglengte.

## 4.2 Gemete Spoed teenoor Insetspoed

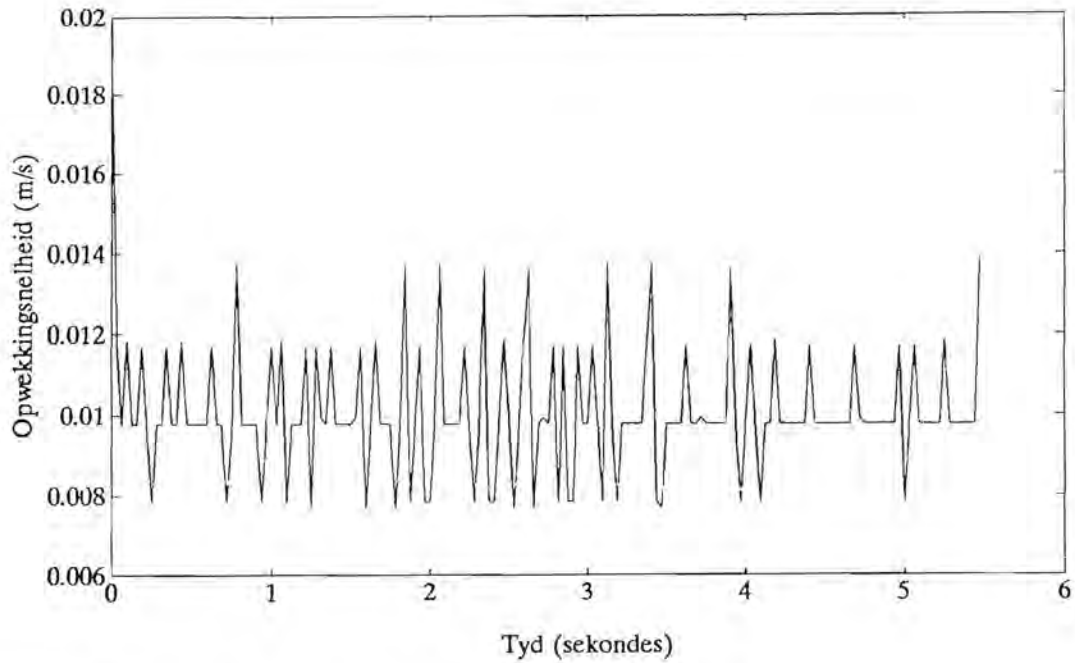
Gemete spoed is bereken en met die gevraagde insetspoed vergelyk ten einde die akkuraatheid daarvan te bepaal. Aangesien defleksies by diskrete monsterpunte gemeet is (sien ook hoofstuk 3), kan spoed nie analities bereken word nie en is daar van numeriese differensiasiemetodes gebruik gemaak. Die metodes word volledig deur Burden & Faires (1989) en Bartlett & Fyfe (1974) beskryf. 'n Voorwaartse verskilmetode is telkens vir die eerste datapunt en 'n terugwaartse verskilmetode vir die laaste punt gebruik. Die spoed by alle punte tussenin is m.b.v. die driepunt sentraalverskilmetode bereken. Daar is gevind dat die laasgenoemde metode veral by groot spoedveranderinge akkurater resultate lewer as die vyfpuntmetode.

Die toetse wat vir spoedberekening geselekteer is, word in tabel 4.2.1 getoon.

**Tabel 4.2.1:** Tabel van geselekteerde toetse vir spoedberekening

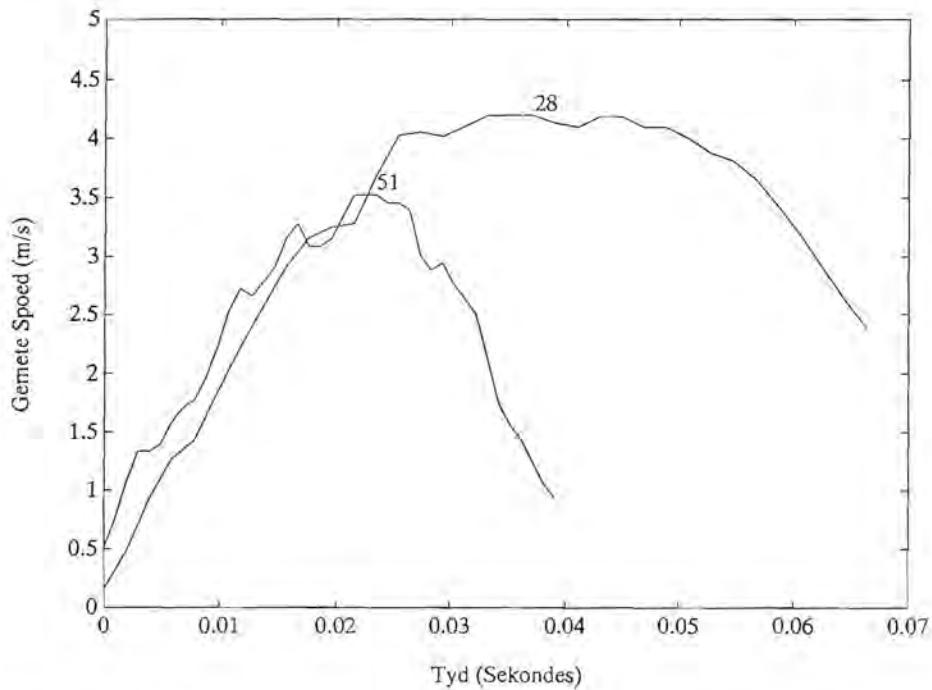
Toetsnommer	Insetspoed (m/s)	Tipe toets
02	0,01	Kwasi-statiiese uitrekking, kortslag
28	4,0	Hoëspoed uitrekking, langslag
51	4,0	Hoëspoed uitrekking, mediumslag

Die gemete spoed teen tyd vir toets 02 word grafies in figuur 4.2.1a getoon.



**Figuur 4.2.1a:** Gemete spoed teen tyd vir toets 02

'n Vergelykende grafiek wat die gemete spoed vir toets 28 met dié vir toets 51 vergelyk, word in figuur 4.2.1b getoon.



**Figuur 4.2.1b:** Gemete spoed teen tyd vir toetse 28 en 51



In die kwasi-statische geval fluktueer die spoed tussen 0,008 m/s en 0,014 m/s. Die fluktuasie is egter aanvaarbaar aangesien die maksimum oombliklike spoed van 0,014 m/s vir alle praktiese doeleindes as kwasi-staties beskou kan word. Belangriker is die feit dat die fluktuasies toegeskryf kan word aan die diskrete natuur van die versyferde datasein en wel as gevolg van 'n bis wat spring.

In die geval van die langslag-, hoëspoeduitrekkingstoets is 'n maksimum spoed van 4,2 m/s bereik. Die feit dat hierdie hoë spoed bereik is, kan toegeskryf word aan die vrystelling van potensiële energie deur die veer wanneer dit vanaf 'n saamgedrukte posisie uitgerek word. Hierdie hoë spoed was nie moontlik met die kortslag-, hoëspoeduitrekkingstoets nie aangesien hoër versnellings in die laasgenoemde geval vereis word, wat waargeneem kan word indien die totale tydverloop van toets 51 met dié van toets 28 vergelyk word.

'n Maksimum gemete spoed van 3,5 m/s word egter as voldoende aanvaar aangesien dit met die maksimum verwagte opwekkingspoed tydens die oorsteek van 'n hindernis ooreenstem (sien ook paragraaf 3.4).

### **4.3 Kwasi-statische Styfheid**

Kwasi-statische styfheid word benodig om die omhullingslyne van die histereselus, oftewel die maksimumkrag vir uitrekking en die minimumkrag vir samedrukking teen defleksie vir die bladveer daar te stel. Die styfheid word bereken deur 'n kleinstekwadraatpassing op die reaksiekragte d.w.s.  $R_1$  en  $R_2$ , teen defleksie vir elk van die bewegingsrigtings te doen. Die orde van die passing is beperk tot een aangesien slegs lineêre veergedrag aanvaar is. Slegs kort- en mediumslaglengtes is vir kwasi-statische opwekking gebruik.

Ten einde slegs een langslag-samedrukkingskarakteristiek te verkry, is die vier karakteristieke wat tydens toetse 01, 03, 05 en 08 gemeet is, gekombineer. Die passings wat op die resulterende karakteristiek uitgevoer is, is:

$$R_1(\delta) = 89096 \delta + 444,11 N \quad (4.3.1a)$$

$$R_2(\delta) = 98042 \delta + 24,934 N \quad (4.3.1b)$$

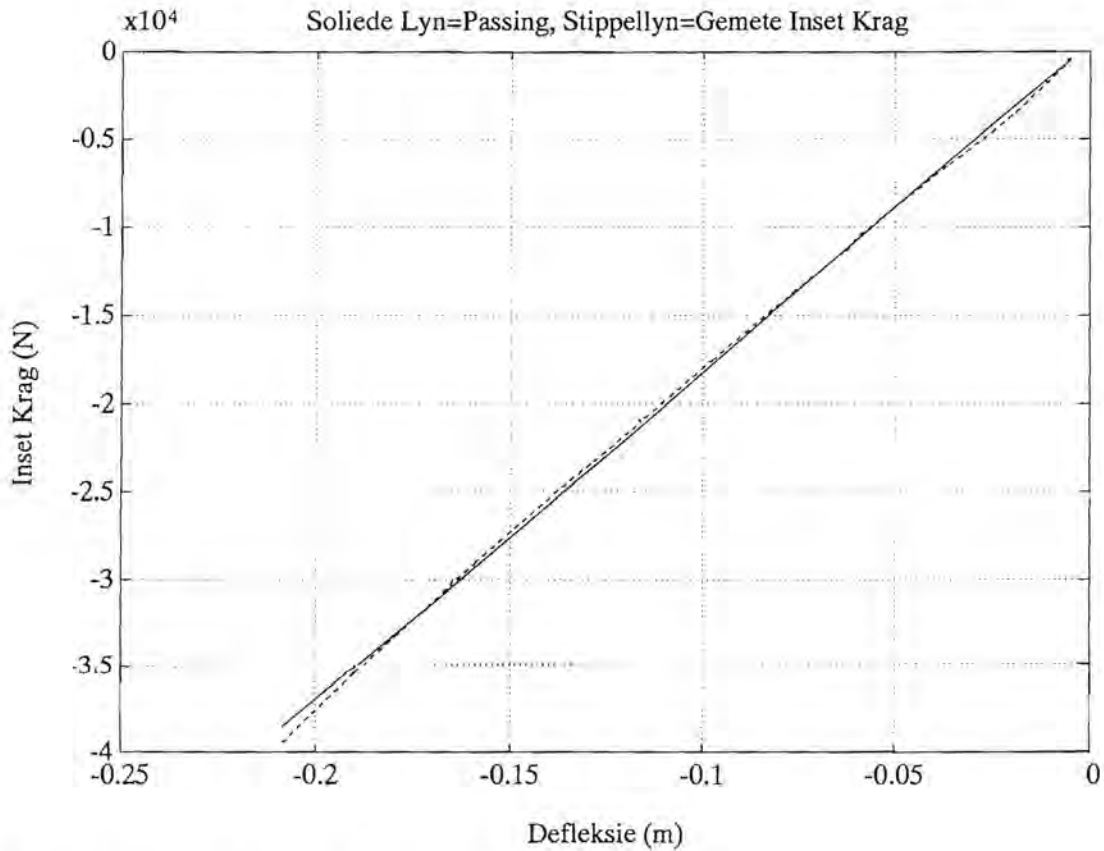
$R_1$  is telkens die reaksiekrag by die skakelskarnier en  $R_2$  die reaksiekrag by die voorste oog. Die totale veerreaksiekrag-teen-defleksieverwantskap  $F_s(\delta)$  vir samedrukking word verkry deur die som van die reaksiekragte te bereken, oftewel:

$$F_s(\delta) = 187138 \delta + 469,044 N \quad (4.3.2)$$

Die gepaardgaande styfheid  $k_s$  vir samedrukking is:

$$k_s = 187138 N/m \quad (4.3.3)$$

Die gemete krag-defleksiekarakteristiek in die samedrukkingsrigting word tesame met die passing soos deur vergelyking 4.3.2 beskryf is, in figuur 4.3.1 getoon.



**Figuur 4.3.1: Gemete karakteristiek en passing**

Resultate van die kwasi-statische uitrekkingstoetse 02, 04, 07 en 09 is op 'n soortgelyke metode as dié van die samedrukkingstoetse gekombineer. Die eksponensiële vervalkrommes is verwyder en 'n eerste-orde kleinste kwadraatpassing is op die oorblywende lyne gedoen. Die passingsvergelyking vir die totale reaksiekrag-teen-defleksieverwantskap in die uitrekkingsrigting is:

$$F_u = 151600 \delta + 897,665 N \quad (4.3.4)$$

Die styfheid  $k_u$  vir die uitrekkingsrigting is:

$$k_u = 151600 N/m \quad (4.3.5)$$



Hierdie styfheid vergelyk goed met die wrywinglose styfheid wat deur die vervaardiger verskaf is, naamlik 155469 N/m en die verskil relatief tot laasgenoemde is slegs -2,49 %.

#### 4.4 Natuurlike Frekwensie

Verskeie metodes vir die berekening van die eerste natuurlike frekwensie m.b.v. oorgangstoetsresultate is oorweeg, naamlik Fouriertransforms, die sogenaamde "Fast Fourier Transform" (F.F.T.) en gestadigde harmoniese seine. Die faktor wat die belangrikste rol by die keuse van 'n geskikte verwerkingsmetode gespeel het, is die puls-lengte. Soos in paragraaf 3.5 aangetoon is, is die insetdefleksie-pulse relatief kort en hierdie verskynsel het beperkings op die toepassing van die bogenoemde metodes geplaas, wat elk kortliks bespreek word.

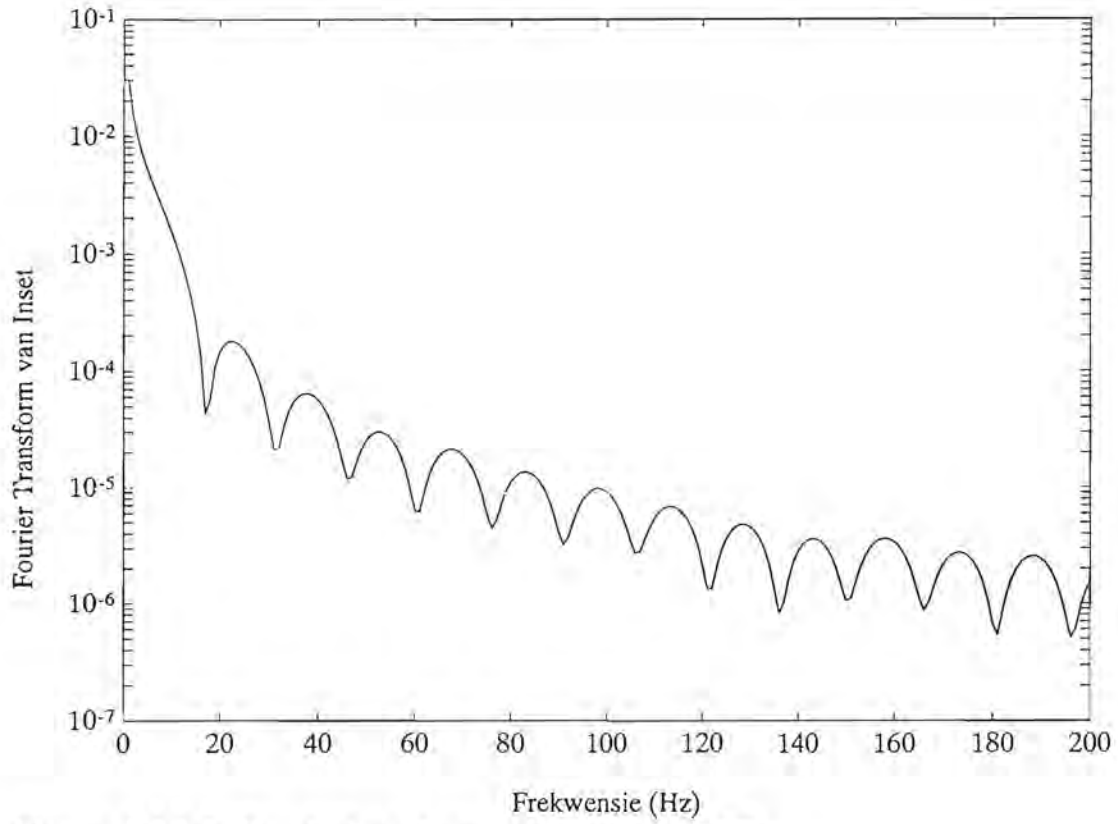
##### 4.4.1 Fouriertransforms

Die Fouriertransform van 'n defleksiesein wat in die tydvlak bekend is, kan m.b.v. die volgende vergelyking bereken word:

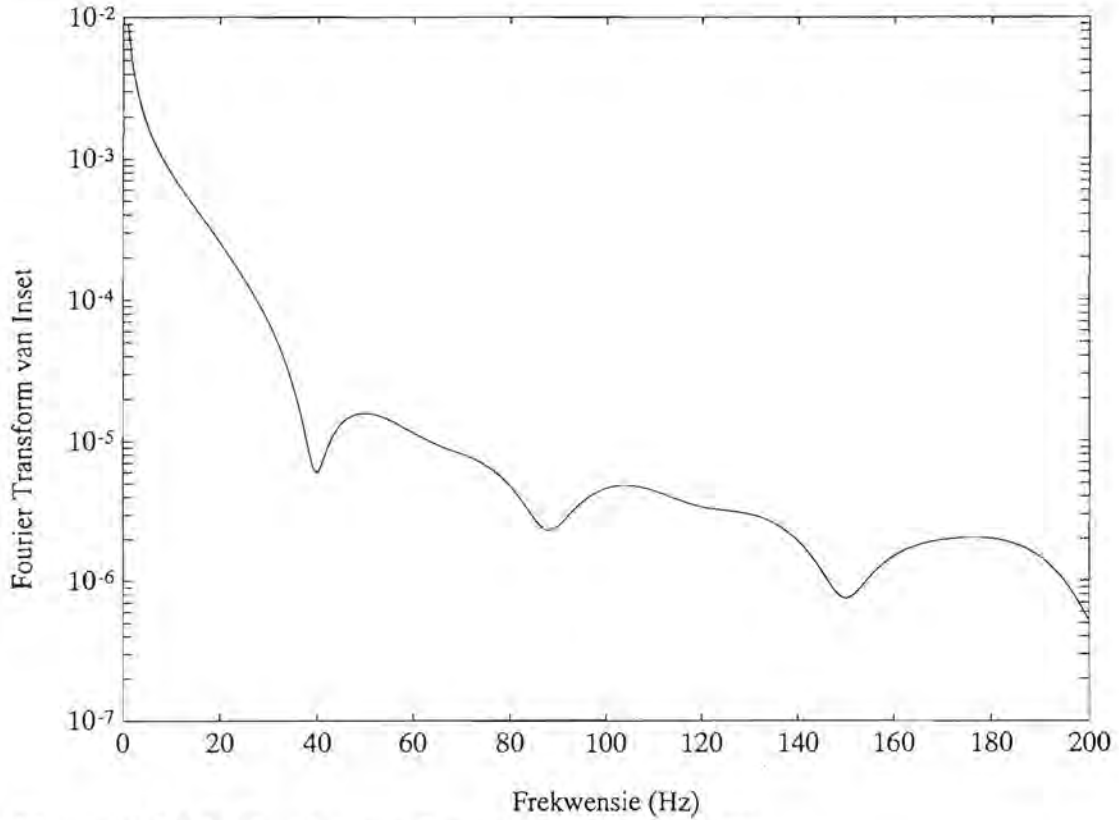
$$\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.4.1.1)$$

waar  $\delta$  defleksie,  $t$  tyd en  $\omega$  frekwensie is.

Die absolute waardes van die getransformeerde defleksie-pulse vir toets 27 ('n hoëspoed-, langslaglengtesamedrukkingstoets) en toets 40 ('n hoëspoed-, kortslaguitrekkingstoets) word onderskeidelik in figuur 4.4.1.1 en figuur 4.4.1.2 getoon.



**Figuur 4.4.1.1: Fouriertransform van inset (toets 27)**



**Figuur 4.4.1.2: Fouriertransform van inset (toets 40)**

Die defleksieimpuls is bekend na beëindiging van die impuls aangesien die defleksie vir 'n lang tydverloop daarna konstant gehou word (sien ook paragraaf 3.8). Die reaksiekrante na beëindiging van die impuls is egter onbekend aangesien die oorgang nie oombliklik by die einde van die impuls uitsterf nie.

#### 4.4.2 F.F.T.'s

Die vergelyking vir die F.F.T. van 'n sein wat by diskrete punte in die tydvlak bekend is, is:

$$A_n = \sum_{i=0}^{N-1} \delta_i e^{-j\frac{2\pi ni}{N}} \quad (4.4.2.1)$$

waar  $A_n$  die amplitude van die  $n$ -de diskrete frekwensie,  $N$  die aantal monsterpunte in die tydvlak en  $\delta_i$  die defleksie op die  $i$ -de diskrete tydstep is. Die frekwensie-inkrement of die frekwensieresolusie  $\Delta f$  is die resiprook van die totale pulstyd  $T$ :

$$\Delta f = 1/T \quad (4.4.2.2)$$

Omdat die pulstyd kort is, sal die amplitudes slegs bekend wees by frekwensies wat wyd gespaseerd is en belangrike inligting wat tussen hierdie punte benodig mag word, sodoende verlore kan gaan.

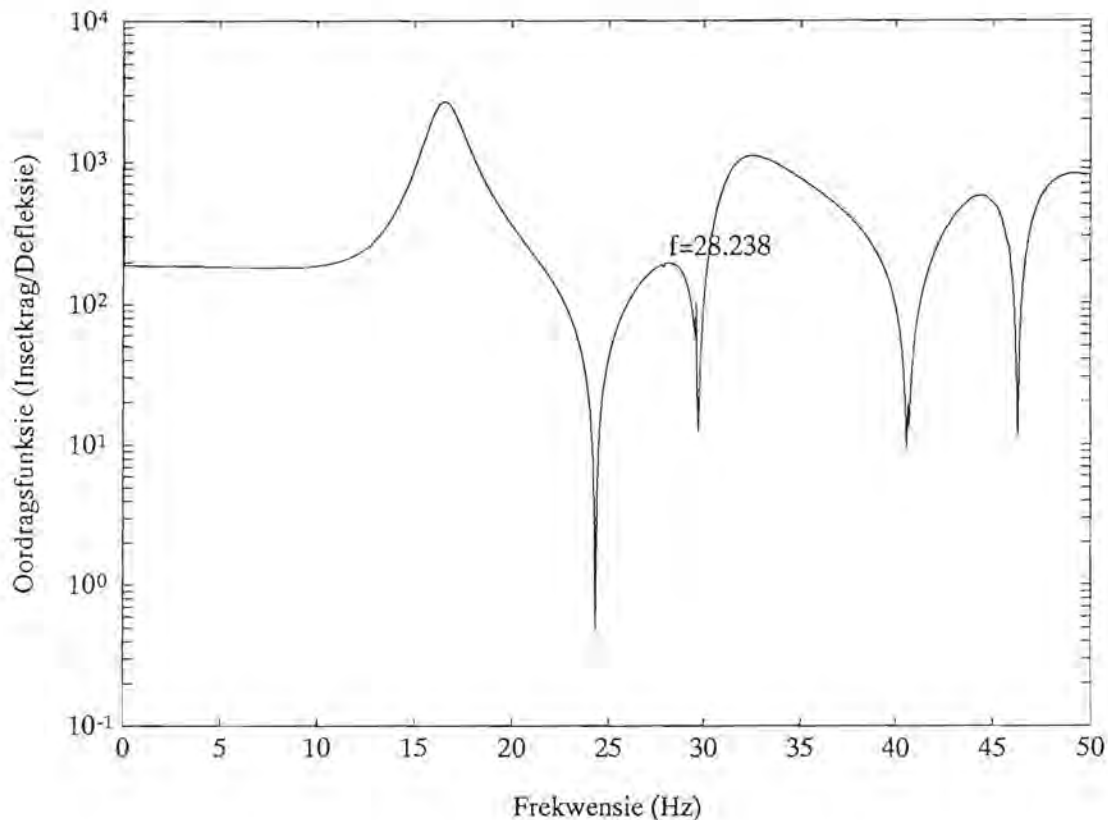
#### 4.4.3 Gestadigde Harmoniese Sein

Die pulslengte word verleng deur die defleksie- en reaksiekrantepulse rondom  $T$  te spieël en die sein dan te dupliseer totdat die totale seinelengte met die resiprook van die verlangde frekwensie-inkrement ooreenstem. Die resulterende sein is dus

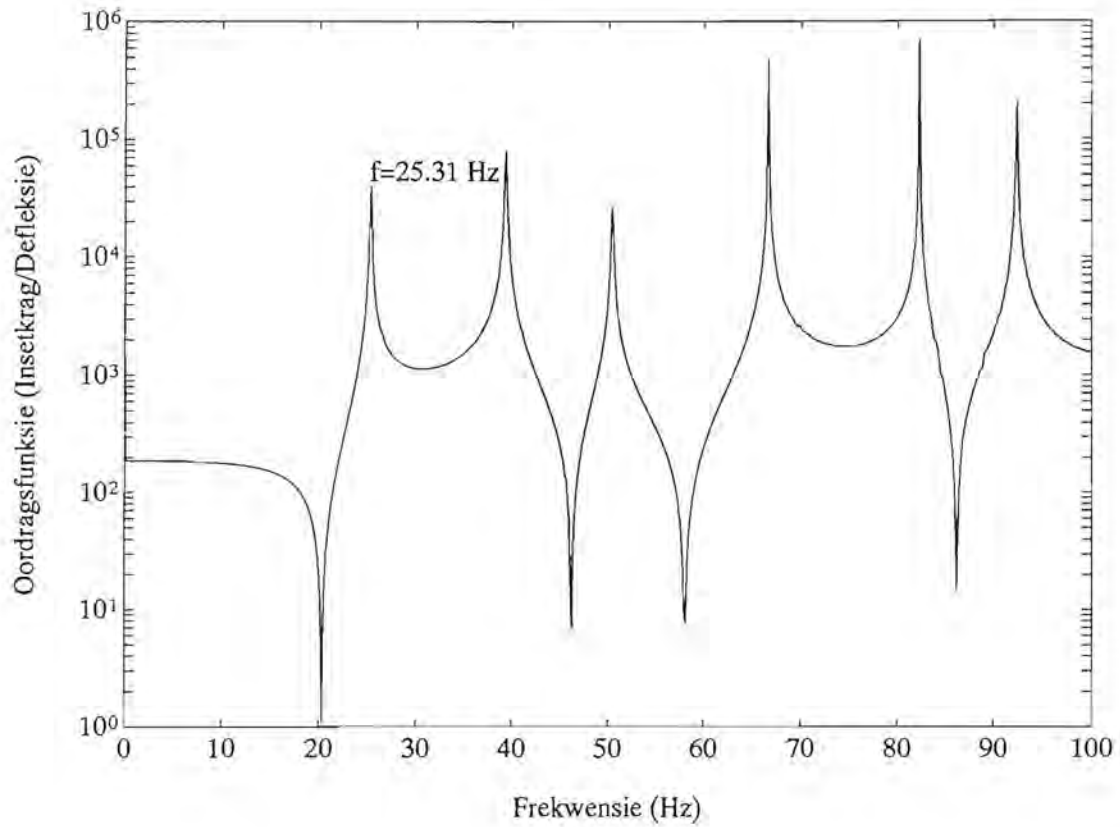


periodies-herhalend. Alhoewel die metode die voordeel inhou dat dit die natuurlike frekwensie met groter akkuraatheid kan bereken, is daar 'n nadeel naamlik dat die dupliseringproses daartoe lei dat foutiewe frekwensiepieke in die frekwensievlak verskyn. Indien die metode gebruik word, moet pieke wat naby veelvoude van die opwekkingsfrekwensie voorkom, met agterdog bejeën word.

Ten einde die natuurlike frekwensie te bepaal, word daar na die oordragsfunksie gekyk. Die reaksiekragamplitude by elke diskrete frekwensie word deur die insetdefleksie-amplitude by die ooreenstemmende frekwensie gedeel. Die natuurlike frekwensies kom voor waar die kragamplitude pieke vertoon. Die natuurlike frekwensies is op die bogenoemde metode vir toets 27 en 40 bereken en is onderskeidelik 28,2 Hz en 25,3 Hz. Die oordragsfunksies vir toets 27 en 40 in die frekwensievlak word onderskeidelik in figure 4.4.3.1 en 4.4.3.2 getoon.



**Figuur 4.4.3.1:** Oordragsfunksie vir toets 27



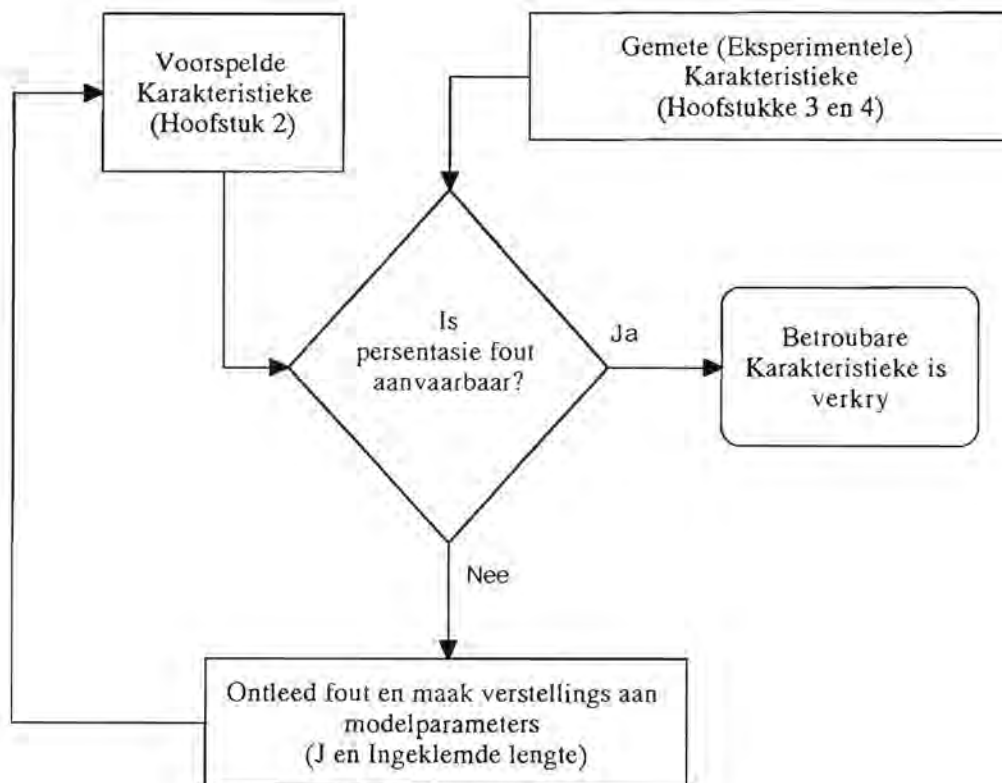
**Figuur 4.4.3.2: Oordragsfunksie vir toets 40**

Ongelukkig was die "opwekkingsfrekwensie" van toets 40 baie naby aan die natuurlike frekwensie en moet die natuurlike frekwensieresultaat van hierdie toets, vir redes soos voorheen bespreek, met agterdog bejeën word.

## HOOFSTUK 5

### VERGELYKING TUSSEN GEMETE EN VOORSPELDE VEERKARAKTERISTIEKE

'n Model waarmee die kwasi-stasiese en dinamiese karakteristieke van die bladveer voorspel kan word, is in hoofstuk 2 ontwikkel. Verder is eksperimentele bepaling van hierdie karakteristieke in hoofstukke 3 en 4 gerapporteer. Die voorspelde en eksperimentele karakteristieke moet vergelyk word om die akkuraatheid van die model te bepaal. Die metode wat gevolg word, word m.b.v. die volgende vloeiagram uitgebeeld:



**Figuur 5.1:** Vloeiagram vir evaluasie van die model

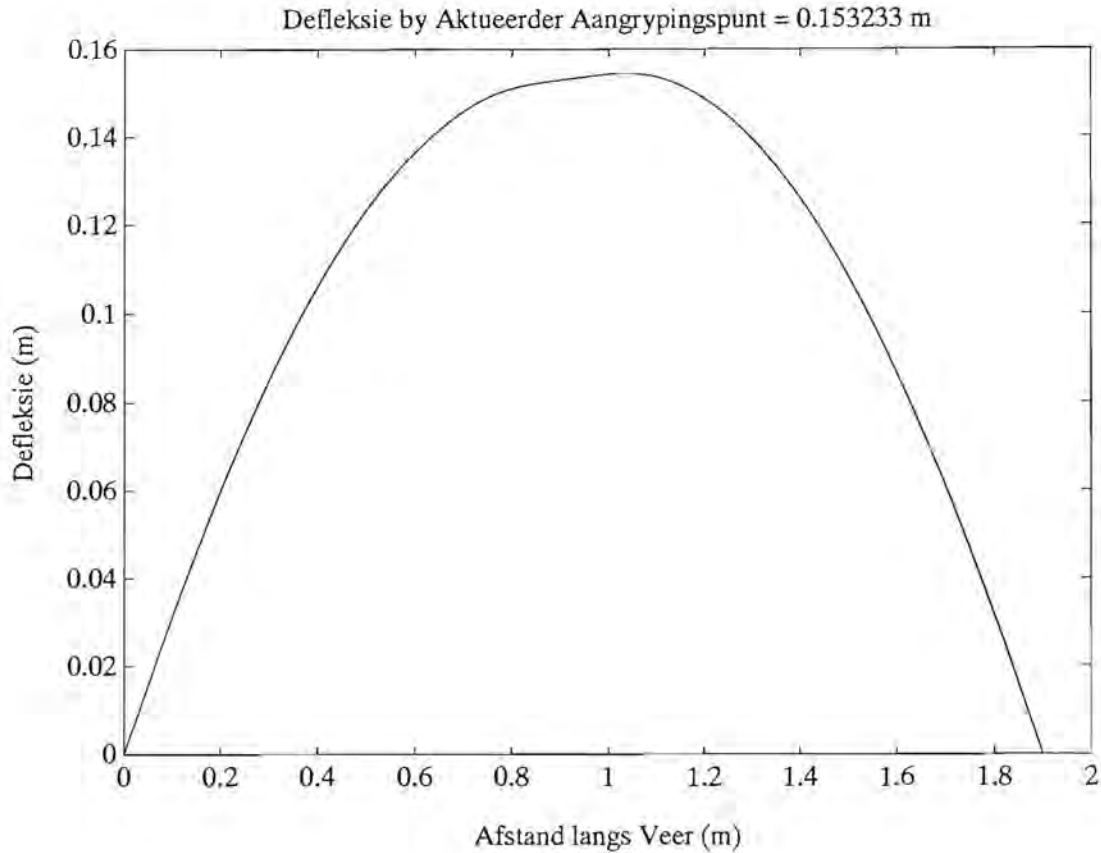


Beide die gesimuleerde en gemete resultate word benodig aangesien akkurate simulaties nie onmiddellik gedoen kan word nie. Indien 'n onaanvaarbare vlak van akkuraatheid, byvoorbeeld 'n fout van groter as 10 % tussen die gemete en voorspelde karakteristieke verkry word, moet die gemodelleerde ingeklemde lengte en die traagheidsmoment by die asvashegtingspunt verstel word totdat 'n aanvaarbare vlak van akkuraatheid bereik word. 'n Verstelling in ingeklemde lengte sal beide die natuurlike frekwensie en die kwasi-statische styfheid verander, terwyl 'n verandering in die traagheidsmoment slegs die natuurlike frekwensie beïnvloed.

### 5.1 Kwasi-statische Styfhede

Die veerstyfheid in die samedrukkingsrigting is voorspel deur die veerblaai oor 'n beperkte gedeelte van die veer in die omgewing van die asvashegtingspunt as geklem te beskou, m.a.w. die neutrale as loop deur die massamiddelpunt van die veerdwarssnit. Die veerstyfheid in die uittrekkingsrigting is bereken deur die blaai as los van mekaar te beskou, m.a.w. elke blad buig deur sy eie neutrale as (sien figure 2.2.1 en 2.3.1).

Simulasies m.b.v. die samedrukking-en uittrekkingsmodelle is apart uitgevoer. Veertig modusse is gekies en integrasie van vergelykings (2.1.6a) en (2.1.6b) is numeries met Simpson se reël (Burden & Faires, 1989) uitgevoer. Die geklemde lengte in die geval van samedrukking is as 0,083 m geneem en die kwasi-statische defleksieprofiel is m.b.v. vergelykings (2.1.20) en (2.1.21) vir 'n asvashegtingspuntbelasting van 30 kN bereken. Die profiel word in figuur 5.1.1 getoon.



**Figuur 5.1.1: Defleksieprofiel vir samedrukking**

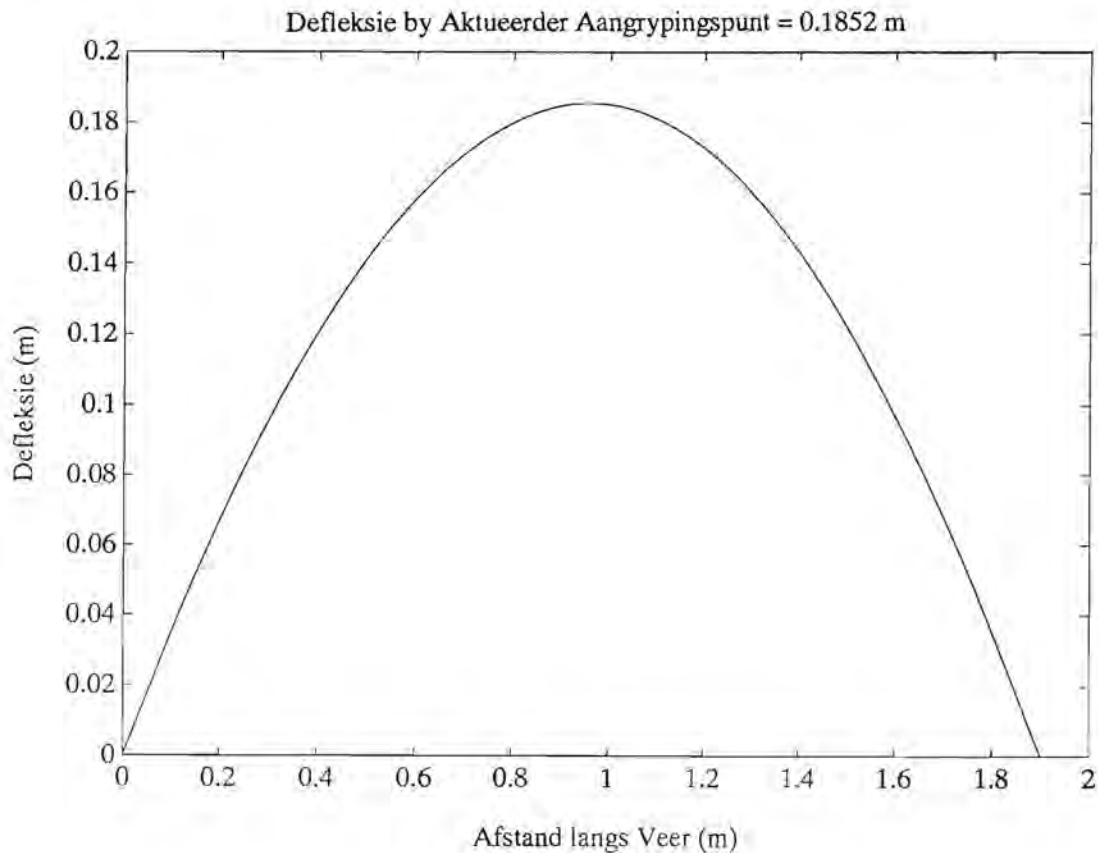
Die gepaardgaande styfheid vir 'n defleksie van 0,153 m is 196078 N/m. Die gemete styfheid, d.w.s. volgens die passing wat op die saamgestelde samedrukkingskarakteristiek in hoofstuk 4 gedoen is, word tesame met die voorspelde styfheid hieronder in tabel 5.1.1 getoon. Die persentasie fout relatief tot die gemete styfheid word ook aangetoon.

**Tabel 5.1.1 Vergelykende kwasi-statische styfhede in die samedrukkingsrigting**

Voorspelde styfheid (N/m)	196 078
Gemete styfheid (N/m)	187 138
Persentasie fout	4,8

Die geklemde lengte van 0,083 m is 55 % van die lengte van die vashegtingsklamp (sien figuur 3.3.1). Enige persentasie kleiner of gelyk aan 100 % kan geregverdig word aangesien die kans dat glip tussen die blaaie kan intree, toeneem met die afstand vanaf die asvashegtingspunt.

Die kwasi-staiese defleksieprofiel in die uittrekkingsrigting is ook m.b.v. vergelykings (2.1.20) en (2.1.21) vir 'n asvashegtingspuntbelasting van 30 kN bereken, maar met die blaaie as los van mekaar gemodelleer. Die profiel word in figuur 5.1.2 getoon.



**Figuur 5.1.2:** Defleksieprofiel vir uitrekking

Die gepaardgaande styfheid vir 'n defleksie van 0,185 m is 161987 N/m. Die gemete styfheid in die uittrekkingsrigting wat m.b.v. die passing in hoofstuk 4 bepaal is, word tesame met die voorspelde styfheid en die vervaardigerspesifikasie hieronder in tabel 5.1.2 getoon.



**Tabel 5.1.2: Vergelykende kwasi-statische styfhede in die uitrekkingsrigting**

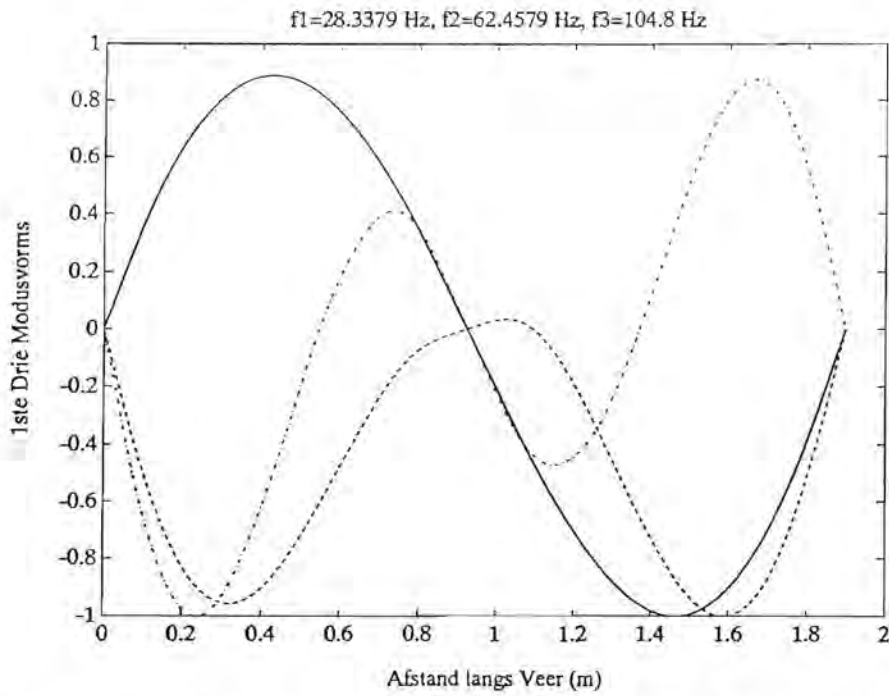
Voorspelde styfheid (N/m)	161 987
Gemete styfheid (N/m)	151 600
Styfheid volgens vervaardiger (N/m)	155 469

Die voorspelde styfheid verskil met 6,8 % van dié van die gemete styfheid. Die bogenoemde korrelasies tussen die gemete en voorspelde kwasi-statische styfhede is besonder goed.

## 5.2 Natuurlike Frekwensies

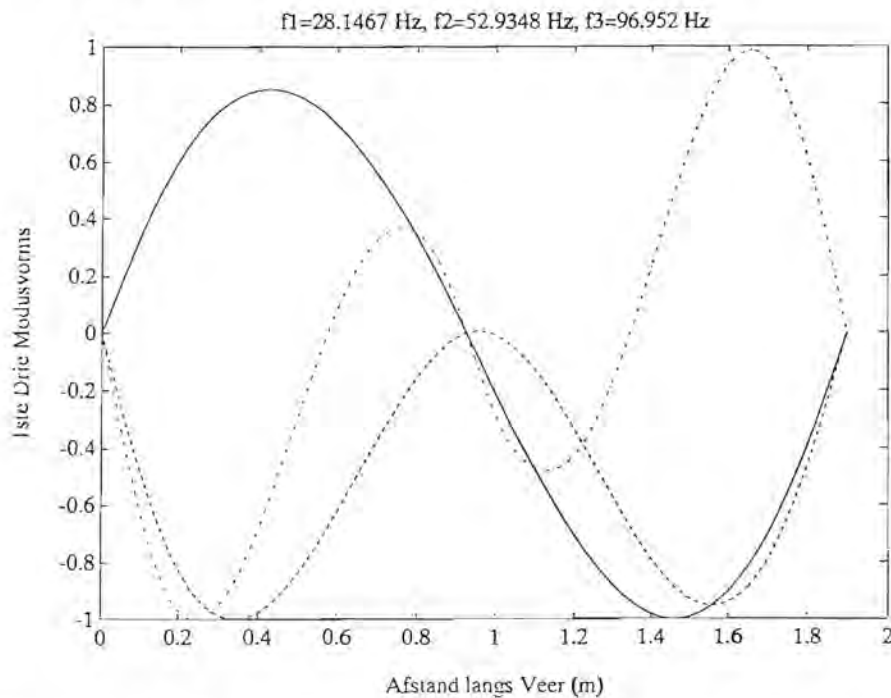
Die ekwivalente traagheidsmoment  $J$  van die eksperimentele opwekkingsmeganisme wat by die asvashegtingspunt inwerk, is moeilik bepaalbaar. Die minimumwaarde is dié van klemplate alleen, naamlik  $0,296 \text{ kgm}^2$ . Dit is egter 'n oorvereenvoudiging aangesien die stang wat die kruk met die klemplate verbind, ook neig om te roteer, maar nie om dieselfde as, as dié van die klemplate nie. Indien die aanname gemaak word dat die stang wel om die as van die klemplate roteer, is die berekende waarde van  $J$   $9,33 \text{ kgm}^2$  en kan dit as 'n maksimum moontlike waarde beskou word. Die natuurlike frekwensies wat met die minimum en maksimum traagheidsmomente geassosieer kan word, is onderskeidelik 33 Hz en 20 Hz. Deur  $J$  iteratief te verstel, het die model natuurlike frekwensies van onderskeidelik 28,3 Hz en 28,1 Hz in die samedrukking- en uitrekkingsrigtings gelewer vir 'n  $J$ -waarde van  $1,0 \text{ kgm}^2$ . Hierdie natuurlike frekwensies vergelyk uitstekend met die eksperimenteel-bepaalde waarde van 28,2 Hz. Dit is egter duidelik dat daar tydens toekomstige eksperimentele toetse aandag aan apriori-bepaling van  $J$  gegee behoort te word.

Die eerste drie natuurlike modusse en frekwensies vir die samedrukking- en uitrekkingsrigting, met 'n geklemde lengte van 0,083 m en 'n traagheidsmoment van  $1,0 \text{ kgm}^2$ , word in figuur 5.2.1 getoon. Die effek van die lokale sluiting in die tweede modus is duidelik sigbaar.



**Figuur 5.2.1:** Natuurlike modusse en frekwensies vir samedrukking

Die eerste drie natuurlike modusse en frekwensies vir die uitrekkingsrigting, met die blaaië los van mekaar (m.a.w. die geklemde lengte is nul) en 'n traagheidsmoment van  $1,0 \text{ kgm}^2$ , word in figuur 5.2.2 getoon.



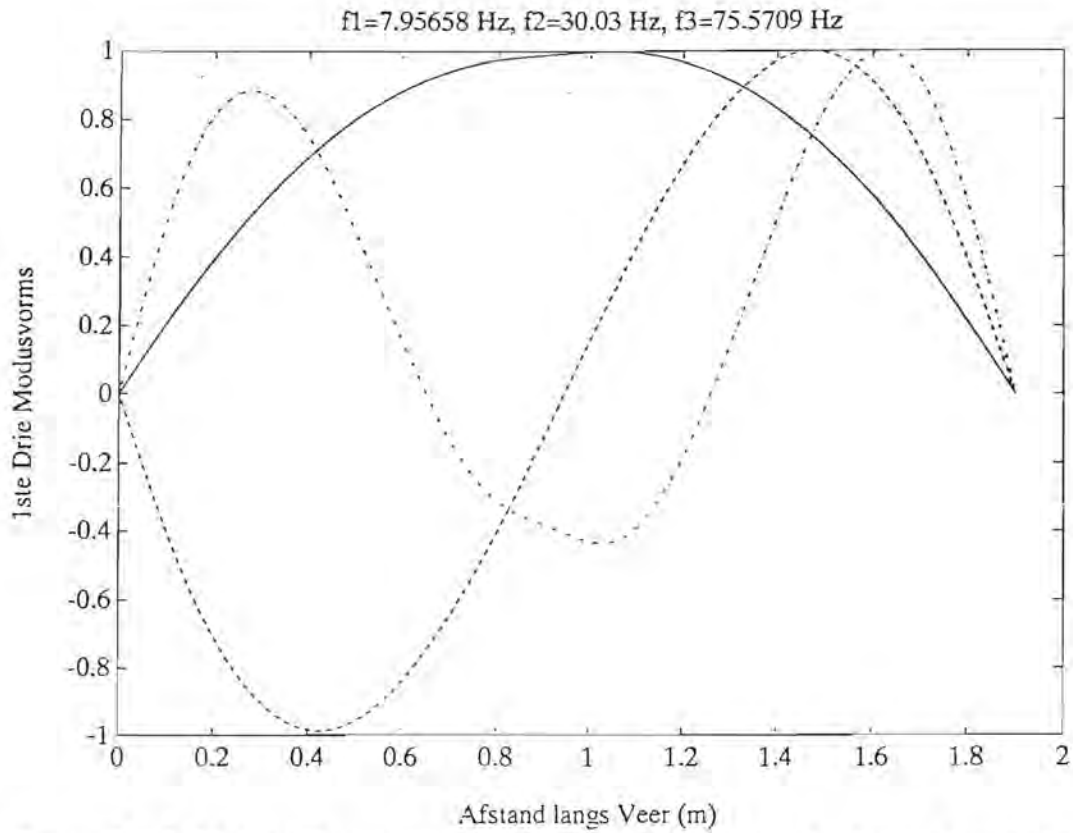
**Figuur 5.2.2:** Natuurlike modusse en frekwensies vir uitrekking

Die sluitaksie-effek in die tweede modus is afwesig in die geval van uitrekking.

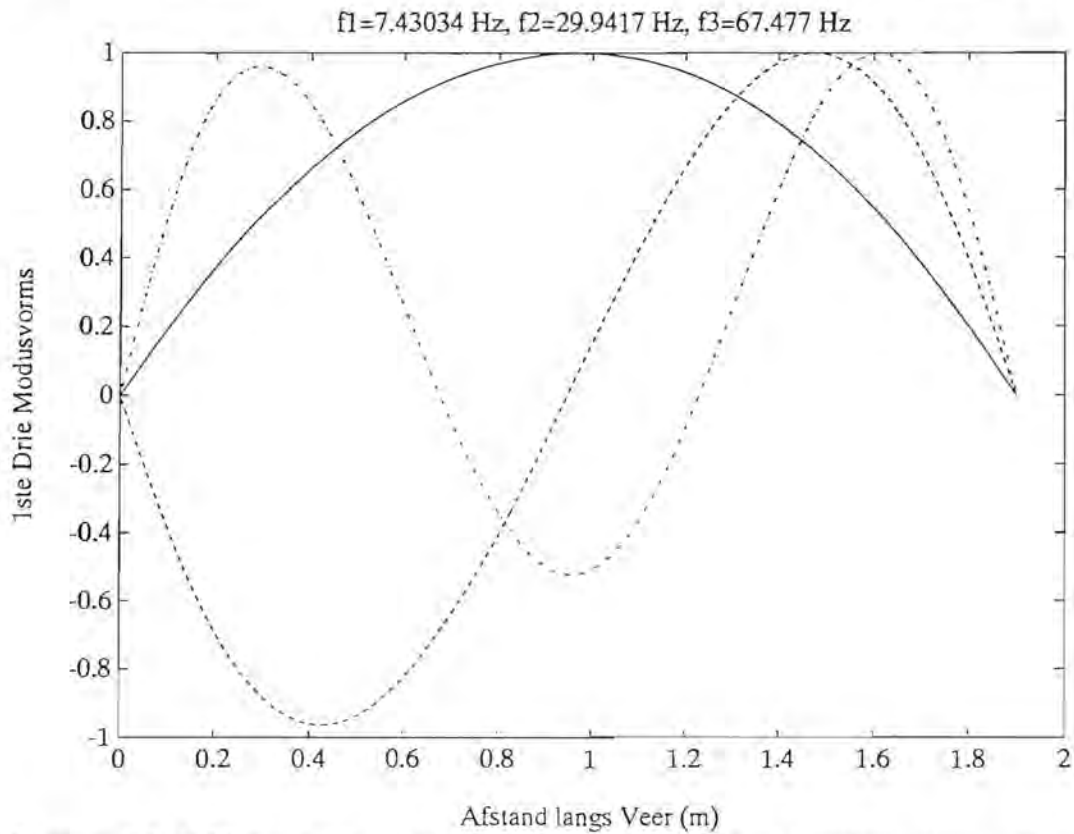
Die kwasi-statische en dinamiese karakteristieke van die veer in die toetsbank is nou geverifieer. Karakteristieke van die veer in die voertuig sal egter van dié in die toetsbank verskil. Die model wat in hoofstuk 2 opgestel is, maak voorsiening vir die effek van die styfheid van die opwekkingstang wat die kruk met die boonste klempaatskarnier verbind. In die voertuig is beide die stang en die skarnier afwesig. Die effek van die verwydering van die laasgenoemde twee komponente word gesimuleer deur  $k_p = 0$  te stel in vergelyking (2.1.6a) en die J-waarde van die klempaatskarnier alleen, naamlik  $0,296 \text{ kgm}^2$ , in vergelyking (2.1.6b) te vervang en die simulasies te herhaal.

Die natuurlike modusvorme en frekwensies in die samedrukking- en uittrekkingsrigtings word onderskeidelik in figure 5.2.3 en 5.2.4 getoon. Vergelyking van die laasgenoemde twee figure met figure 5.2.1 en 5.2.2 bring aan die lig dat die modusvorme en natuurlike frekwensies beduidend verander. Die eerste natuurlike frekwensie verander vanaf  $28,3 \text{ Hz}$  na  $7,96 \text{ Hz}$  in die geval van samedrukking en vanaf  $28,1 \text{ Hz}$  na  $7,43 \text{ Hz}$  in die geval van uitrekking. Dit kan toegeskryf word aan die feit dat die hoë styfheid van die opwekkingstang, wat defleksie by die asvashegtingspunt beperk het in die toetsbank, verwyder is.





**Figuur 5.2.3:** Natuurlike modusse en frekwensies vir samedrukking (veer alleen)



**Figuur 5.2.4:** Natuurlike modusse en frekwensies vir uitrekking (veer alleen)

## HOOFSTUK 6

### GEVOLGTREKKINGS EN AANBEVELINGS

#### 6.1 Gevolgtrekkings

'n Betroubare eksperimentele tegniek waarmee 'n tapse, onsimmetriese bladveer gekarakteriseer kan word, is ontwikkel en 'n databasis van reaksiekragte by die rompvashegtingspunte is vir 'n wye reeks begindefleksies, slaglengtes en snelhede in beide die samedrukkings- en uittrekkingsrigtings gevestig. Die resultate kan as inset tot voertuigdinamikasimulasies en struktuurontwerp dien.

Verder is 'n Rayleigh-Ritz-modelleringstegniek ontwikkel waarmee die natuurlike frekwensies en -modusvorme van die veer bereken kan word.

Ten einde 'n akkurate model te verkry, moet die gesimuleerde geklemde lengte en die traagheidsmoment by die asvashegtingspunt verstel word totdat die gemodelleerde kwasi-statische styfhede en die minimum natuurlike frekwensie met die eksperimenteel-bepaalde waardes ooreenstem.

Vir die veer wat as die onderwerp van hierdie studie gedien het, is 'n hoë vlak van akkuraatheid vir die styfheid in die samedrukkingsrigting verkry met 'n geklemde lengte van 0,083 m. Hierdie lengte is 55 % van die lengte van die inklemmingsplate. Die persentasie verskil tussen die gemete en gesimuleerde waardes is slegs 4,8 %. In die uittrekkingsrigting word die persentasie verskil van 6,85 % as besonder goed beskou.

Die voorspelde eerste natuurlike frekwensies van 28,3 Hz en 28,1 Hz stem goed ooreen met die eksperimenteel-bepaalde waarde van 28,2 Hz vir 'n traagheidsmoment van  $1,0 \text{ kgm}^2$  by die asvashegtingspunt.

Die natuurlike modusvorme en frekwensies van die veer in die konfigurasie

waarvolgens dit in die voertuig geïnstalleer word, verskil beduidend van dié in die eksperimentele opstelling, weens die afwesigheid van die opwekkingstang en klempaatskarnier in eersgenoemde geval. Die eerste natuurlike frekwensie van die veer in die samedrukking- en uittrekkingsrigtings is onderskeidelik 7,96 Hz en 7,43 Hz.

## **6.2 Aanbevelings**

Aanbevelings wat ten opsigte van toekomstige navorsingswerk op die gebied van bladveerkarakterisering gedoen kan word, is ondersoek na die reaksiekragte vir gestadige harmoniese opwekking, die invloed wat die aanbring van die as aan die veer op die modusvorme en natuurlike frekwensies sal hê, verwringing van die veer tydens voertuigrol en opwen van die veer tydens die oorsteek van 'n hindernis. Karakterisering van 'n multistadiumveer moet ook aandag geniet. Verder kan die reaksiekragmeetmetode verbeter word deur die gebruik van 'n verlengde oktagonale ringlassel. Die aanbevelings word kortliks hieronder bespreek.

### **6.2.1 Gestadige Harmoniese Karakterisering**

Meting van nie-lineêre demping kan aansienlik vergemaklik word deur reaksiekragmetings tydens gestadige harmoniese defleksie-insette by die asvashegtingspunt te doen. Die parameters wat gevarieer moet word, is frekwensie en defleksie-amplitude. Verkrygte toetsdata kan m.b.v. die model deur Iwan (1966) verwerk word.

### **6.2.2 Invloed van Asvashegting op die Veerkarakteristieke**

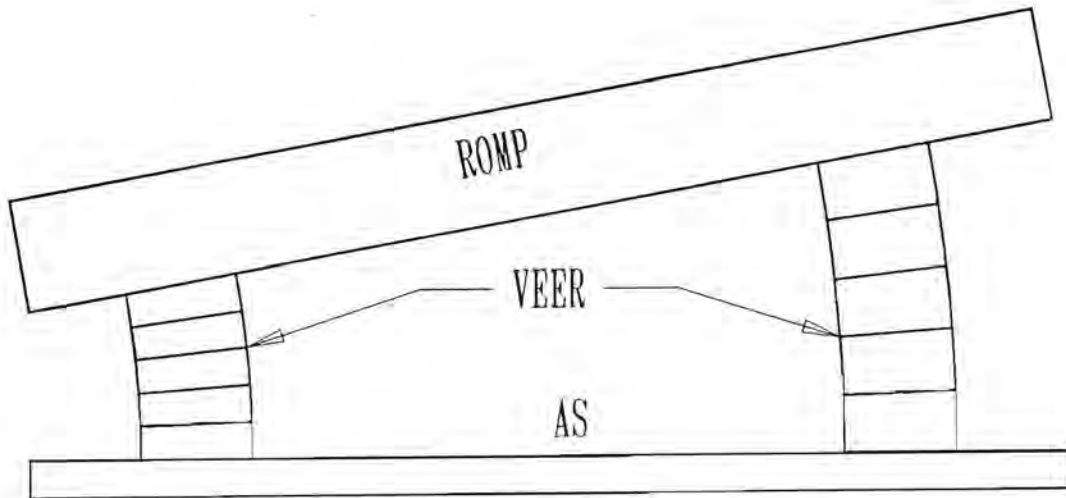
Die eksperimentele bepaling van die dinamiese karakteristieke van die veeraskombinasie sal aansienlik bemoelik word weens die hoë asmassa-tot-veermassa-verhouding. Die alternatief sal wees om die asmassa by die massa van die klempaat te tel en die natuurlike frekwensies en modusvorme m.b.v. die model soos in hoofstuk 2 ontwikkel is, te bereken. Daar kan verwag word dat die natuurlike



frekwensies en modusvorme beduidend sal verander.

### 6.2.3 Verwringing tydens Voertuigrol

Wanneer 'n voertuig deur 'n draai beweeg, word dwarsrigtingkragte op die romp opgewek wat die romp relatief tot die as laat rol, met 'n gepaardgaande verwringing van die bladveer. Daar kan verwag word dat die veerstyfheid in sodanige geval beduidend sal toeneem. Die verwringing van die veer word skematies in figuur 6.2.3.1 voorgestel.



**Figuur 6.2.3.1:** Verwringing van veer

### 6.2.4 Opwen van Veer tydens oorsteek van 'n Hindernis

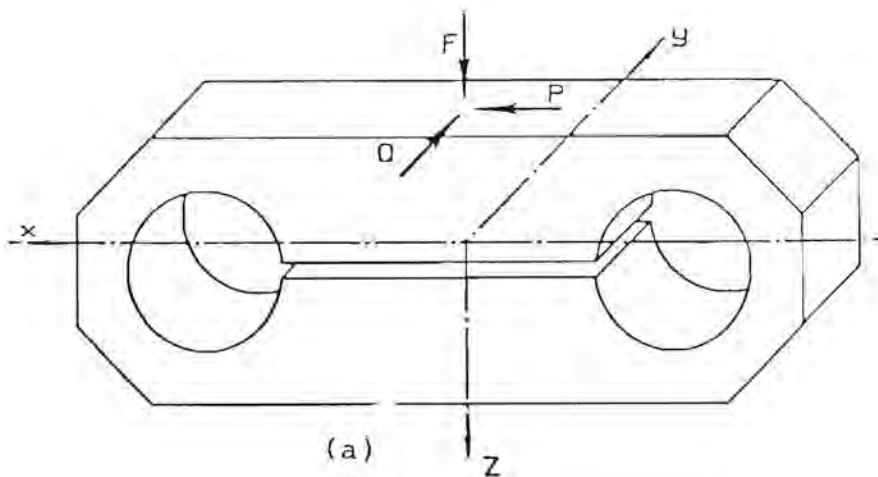
In hierdie studie is slegs vertikale veerbelastings beskou. Wanneer 'n voertuig 'n hindernis oorsteek, ontstaan 'n moment by die asvashegtingspunt wat die veer opwen. Die drukkrag by die voorste oog neem af en dié by die skakelskarnier neem toe. Hierdie verskynsel word wel deur Spring Design Manual (1990) aangespreek, maar in die afwesigheid van histerese. Die effek van histerese op reaksiekragte tydens opwen behoort aandag te geniet. Daar kan verwag word dat die reaksiekragverandering kleiner behoort te wees in die teenwoordigheid van histerese.

### 6.2.5 Karakterisering van 'n Multistadiumveer

Daar is melding van multistadiumvere in hoofstuk 1 gemaak. Die styfheid neem toe sodra 'n voorgeskrewe defleksie oorskry word, wat tot die opwekking van superharmonieke lei. Hierdie nie-lineêre gedrag kan m.b.v. die harmoniese balansmetode (Van Schoor, 1989) ondersoek word.

### 6.2.6 Verlengde Oktagonale Ringlassel

Die ontwikkeling van 'n verlengde oktagonale ringlassel vir die meet van reaksiekragte behoort aandag te geniet. Buiten vir die uitskakeling van 'n aantal skarniere en spelings, bied die lassel ook die voordeel van krag- en momentmetings in drie onafhanklike rigtings, waarvoor rekstrookies op spesifieke posisies aangebring word. Langsrigtingkragte en buigmomente kan dus ook gemeet word, hoewel laasgenoemde nie van toepassing is op 'n bladveer nie. 'n Skets van die ring word in figuur 6.2.6.1 getoon.



**Figuur 6.2.6.1:** Verlengde oktagonale ringlassel

## VERWYSINGS

Anderson, G.M., "Timoshenko Beam Dynamics", *Journal of Applied Mechanics*, Trans ASME, pp. 591-594, September 1971.

Anderson, R.A., "Wave Groups in the Flexural Motion of Beams Predicted by the Timoshenko Theory", *Journal of Applied Mechanics*, Trans ASME, pp. 388-394, December 1954.

Arruda, J.R.F., "Objective Functions for the Nonlinear Curve Fit of Frequency Response Functions", *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 3: Technical Notes, March 1992.

Barnard, T.M., "Comptest Users Manual", Rev. 2.0, University of Pretoria, January 1989.

Bartlett, B.R., & Fyfe, D.J., "Handbook of Mathematical Formulae for Engineers and Scientists," Denny, 1974.

Bickford, W.B., "An Improved Perturbation Technique for Eigenvalues of Continuous Systems", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 7, pp. 103-110, 1991.

Broch, J.T., "Mechanical Vibration and Shock Measurements," Bruel & Kjaer, April 1984.

Burden, R.L., & Faires, J.D., "Numerical Analysis," Fourth Edition, Prindle, Weber & Schmidt, 1989.

Capecchi, D., & Vestroni, F., "Steady-State Dynamic Analysis of Hysteretic Systems", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 111, No. 12, pp. 1515-1531, December 1985.



Case, J., & Chilver, A.H., "Strength of Materials and Structures", Second Edition, Arnold, 1978.

Caughey, T.K., "Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 27, pp. 640-643, December 1960.

Cebon, D., "Simulation of the Response of Leaf Springs to Broad Band Random Excitation," Vehicle System Dynamics, Vol. 15, pp. 375-392, 1986.

Chenea, P.F., "On the Application of the Impedance Method to Continuous Systems," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 20, 1953.

Clough, R.W., & Penzien, J., "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, 1982.

Combrinck, C.P., "Ontwerp van Bladveertoetser," Finalejaarskripsie, Departement Meganiese Ingenieurswese, Universiteit van Pretoria, Oktober 1988.

Craig, R.R., "Structural Dynamics; An Introduction to Computer Methods," Wiley, New York, 1981.

Cranch, E.T., & Adler, A.A., "Bending Vibrations of Variable Section Beams," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 23, pp. 103-108, March 1956.

Fancher, P.S., Ervin, R.D., MacAdam, C.C., & Winkler, C.B., "Measurement and Representation of the Mechanical Properties of Truck Leaf Springs," SAE/SP-80/475, 1980.

Gottenberg, W.G., & Lo, K.H., "Glass fibre reinforced epoxy leaf spring design," International Journal of Vehicle Design, Vol. 4, No. 3, pp. 312-322, 1983.

Harris, C.M., "Shock and Vibration Handbook," Third Edition, McGraw-Hill, 1988.

Imai, H., & Iizuka, K., "Nonelasticity of Leaf Springs," Bulletin - Japan Society of Precision Engineering," Vol. 11, No. 2, pp. 93-94, June 1977.

Iwan, W.D., "The Steady-State Response of a Two-Degree-of-Freedom Bilinear Hysteretic System," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 32, pp. 151-156, March 1965.

Iwan, W.D., "A Distributed-Element Model for Hysteresis and Its Steady State Dynamic Response," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 33, pp. 893-900, December 1966.

Jacobson, L.S., & Ayre, R.S., "Engineering Vibrations with Applications to Structures and Machinery," McGraw-Hill, New York, 1958.

Jones, R.P.N., "The Wave Method for Solving Flexural Vibration Problems," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 21, pp. 75-80, March 1954.

Kobayashi, S., "The Lateral Vibration of a Leaf Spring with an Added Mass and an Added Movement of Inertia," Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers, Vol. 8, No. 29, pp. 28-38, 1965.

Kranz, A., "Eigenschaften geschichteter Trapez- und Parabelfedern," Zeitschrift für Eisenbahnwesen und Verkehrstechnik," Vol. 109, Nr. 11, November 1985.

Liu, C.L., & Liu, J.W.S., "Linear Systems Analysis," McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1975.

Macduff, J.N., & Felgar, R.P., "Vibration Frequency Charts," Machine Design, pp. 109, February 1957.

- Megson, T.H.G., "Aircraft Structures for Engineering Students," Arnold, 1980.
- Meirovitch, L., & Kwak, M.K., "Inclusion Principle for the Rayleigh-Ritz based Substructure Synthesis," AIAA Journal, Vol. 30, No. 5, pp. 1344-1351, May 1992.
- Mikaila, J., "Two-Stage Multileaf Spring Design," SAE Trans. 730272, pp. 19-32, 1973.
- Mindlin, R.D., & Goodman, L.E., "Beam Vibrations With Time Dependent Boundary Conditions," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 17, pp. 377-380, December 1950.
- Minami, T., "Fundamental Analysis of Lateral Vibration of a Leaf Spring," Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers, Vol. 13, No. 62, pp. 978-986, 1970.
- Morduchow, M., "On Application of a Quasi-Static Variation Principle to a System With Damping," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 21, pp. 8-10, March 1954.
- Nashif, A.D., Jones, D.I.G. & Henderson, J.P., "Vibration Damping," Wiley, New York, 1985.
- Nell, S., "'n Simulasieprosedure vir Ritdinamika van Bandvoertuie oor Ruwe Terrein," M.Ing Verhandeling, Departement Meganiese Ingenieurswese, Universiteit van Pretoria, November 1987.
- Newland, D.E., "Mechanical Vibration Analysis and Computation," Longman, 1989.
- Newman, M.K., "Viscous Damping in Flexural Vibrations of Bars" Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 26, pp. 367-376, September 1959.



Noor, A.K., & Knight, N.F., "Nonlinear Dynamic Analysis of Curved Beams, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 23, pp. 225-251, 1980.

Plunkett, R., "Experimental Measurement of Mechanical Impedance or Mobility," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 21, pp. 250-256, September 1954.

Rao, S.S., "The Finite Element Method in Engineering," Second Edition, Pergamon, 1989.

Reissner, E., "Note on the Problem of Vibrations of Slightly Curved Bars," Journal of Applied Mechanics, Vol. 21, Brief Notes, pp. 195-196, June 1954.

Rowland, F., "Variable Rate Leaf Springs - Their Design and Characteristics," SAE Trans. 730271, pp. 7-18. 1973.

Seto, W.W., "Mechanical Vibrations," Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill, New York, 1964.

Shi, G., & Atluri, S.N., "Static and Dynamic Analysis of Space Frames with Non-Linear Flexible Connections," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 2635-2650, 1989.

Shigley, J.E., "Mechanical Engineering Design," Third Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1977.

Snowdon, J.C., "Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems," Wiley, New York, 1968.

Spencer, B.F., & Bergman, L.A., "On the Reliability of a Simple Hysteretic System," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 111, No. 12, December 1985.

Spiegel, M.R., "Laplace Transforms," *Schaum's Outline Series in Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Spiegel, M.R., "Mathematical Handbook," *Schaum's Outline Series in Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Spring Design Manual, Part I, "Design and Application of Leaf Springs," *Society of Automotive Engineers*, SAE HS 788, 1990.

Steidel, R.F., "An Introduction to Mechanical Vibrations," *Wiley*, New York, 1971.

Strukturstaaltabelle (Hersien), Vyfde Uitgawe, Die Suid-Afrikaanse Instituut vir Staalkonstruksie, 1987.

Therén, K., & Lundin, A., "Advanced Composite Materials for Road Vehicles," *Materials and Design*, Vol. 11, No. 2, April 1990.

Thomson, W.T., "Impulsive Response of Beams in the Elastic and Plastic Regions," *Journal of Applied Mechanics*, *Trans ASME*, Vol. 21, pp. 271-278, September 1954.

Tse, F.S., Morse, I.E., & Hinkle, R.T., "Mechanical Vibrations Theory and Applications," Second Edition, *Allyn & Bacon*, 1978.

Van Schoor, M.C., "The Coupled Non-Linear Dynamics of Spacecraft with Fluids in Tanks of Arbitrary Geometry," *Ph.D.-Thesis*, *Massachusetts Institute of Technology*, 1989.

Weaver, W., & Johnston, P.R., "Finite Elements for Structural Analysis," Prentice-Hall, 1984.

Winkler, C.B., & Hagan, M., "A Test Facility for the Measurement of Heavy Vehicle Suspension Parameters," SAE Trans. 800906, pp. 2754-2781, 1980.

Yen, T.C., & Kao, S., "Vibration of Beam-Mass Systems with Time-Dependent Boundary Conditions," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 26, pp. 353-356, September 1959.

Young, D., "Vibration of a Beam With Concentrated Mass, Spring, and Dashpot," Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, Vol. 5, pp. 65-72, March 1948.

Zhang, Z., "A note on the hybrid-mixed  $C^0$  curved beam elements," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 95, pp. 243-252, 1992.





# BYLAES

## A.1

### BYLAE A

#### Verwantskap tussen $I$ , $\rho_l$ en $\omega_l$ van 'n uniforme balk

Die bewegingsvergelyking vir die natuurlike transversale vibrasie van 'n uniforme balk is:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Die eksakte oplossing word m.b.v. skeiding van veranderlikes verkry:

$$w(x,t) = X(x)T(t) \quad (\text{A.2})$$

Indien  $T(t)$  'n harmoniese funksie van tyd is, word vergelyking (A.1):

$$EI \frac{d^4 X}{dx^4} - \rho A \omega^2 X = 0 \quad (\text{A.3})$$

Die oplossing van vergelyking (A.3) is:

$$X(x) = C_1 \cosh \beta_l x + C_2 \sinh \beta_l x + C_3 \cos \beta_l x + C_4 \sin \beta_l x \quad (\text{A.4})$$

$C_1$  tot  $C_4$  is konstantes wat uit die randwaardes bepaal word. Die eiewaardes  $\beta_l$  is:

$$\beta_l = \sqrt{\omega_l} \cdot (\rho A / EI)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{A.5})$$

## A.2

waar  $\omega_i$  die natuurlike frekwensies is.

Die gewig per eenheidlengte  $\rho_l$  is:

$$\rho_l = \rho g A \quad (\text{A.6})$$

Indien vergelyking (A.6) in vergelyking (A.5) vervang word, word die volgende verwantskap na herrangskikking verkry:

$$\omega_i = \sqrt{EIg/\rho_l} \cdot \beta_i^2 \quad (\text{A.7})$$

$\beta_i$  word slegs deur die randwaardes en die balklengte  $l$  bepaal. Stel verder:

$$\beta_i l = \alpha_i \quad (\text{A.8})$$

$\alpha_i$  word vir verskillende randwaardes deur Tse, Morse en Hinkle (1978) getabelleer.

Met  $\alpha_i$  bekend, word  $\omega_i$ :

$$\omega_i = \sqrt{EIg/\rho_l} \cdot (\alpha_i/l)^2 \quad (\text{A.9})$$

Verder is E en g konstant. Dit is duidelik dat die natuurlike frekwensie direk eweredig is aan die verhouding van die tweede moment van oppervlakte van die dwarsnit tot die gewig per eenheidlengte:

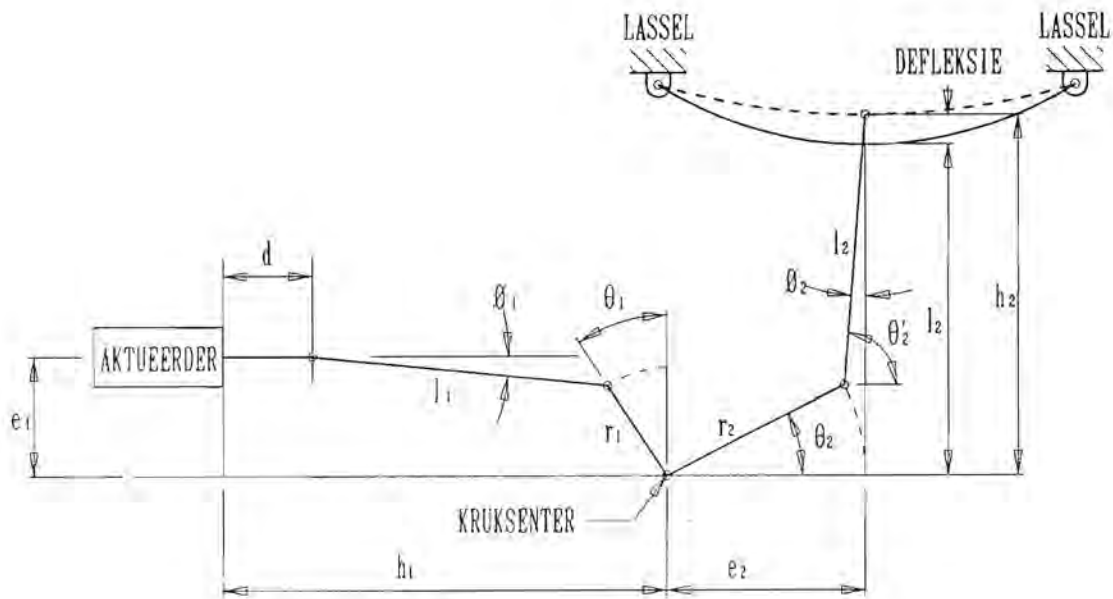
$$\omega_i \propto \sqrt{I/\rho_l} \quad (\text{A.10})$$



**BYLAE B**

**Krukgeometrie en veerdefleksie**

Die toetsbank met die kruk, hidrouliese aktueerder en toetsmonster kan vir die doel van geometriese ontleding skematies soos volg voorgestel word:



**Figuur B1:** Geometrie van toetsopstelling

Die afstand tussen die kruksenter en die vashegtingspunt van die verbindingstang aan die veer, naamlik  $h_2$ , is:

$$h_2 = l_2 + \delta \tag{B.1}$$

## B.2

$\theta_2$  kan nou in terme van  $h_2$  uitgedruk word. Die volgende twee vergelykings word hiervoor gebruik:

$$r_2 \cos \theta_2 + \ell_2 \sin \phi_2 = e_2 \quad (\text{B.2a})$$

$$r_2 \sin \theta_2 + \ell_2 \cos \phi_2 = h_2 \quad (\text{B.2b})$$

Kwadreer beide die bogenoemde vergelykings ten einde  $\phi_2$  te elimineer:

$$e_2^2 - 2e_2 r_2 \cos \theta_2 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 = \ell_2^2 \sin^2 \phi_2 \quad (\text{B.3a})$$

$$h_2^2 - 2h_2 r_2 \sin \theta_2 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 = \ell_2^2 \cos^2 \phi_2 \quad (\text{B.3b})$$

Tel vergelykings (B.3a) en (B.3b) bymekaar:

$$e_2^2 + h_2^2 - 2r_2(e_2 \cos \theta_2 + h_2 \sin \theta_2) + r_2^2 = \ell_2^2 \quad (\text{B.4})$$

Stel gerieflikheidshalwe

$$e_2 \cos \theta_2 + h_2 \sin \theta_2 = A \sin(\theta_2 + \psi_2) \quad (\text{B.5})$$

$$\text{waar } A = \sqrt{e_2^2 + h_2^2} \quad (\text{B.6a})$$

$$\text{en } \psi_2 = \text{bg tan} \left( \frac{e_2}{h_2} \right) \quad (\text{B.6b})$$

### B.3

Vergelyking (B.4) kan met behulp van vergelyking (B.5) soos volg geskryf word:

$$e_2^2 + h_2^2 - 2r_2 A \sin(\theta_2 + \psi_2) + r_2^2 = l_2^2 \quad (\text{B.7})$$

Dus

$$A \sin(\theta_2 + \psi_2) = \frac{l_2^2 - e_2^2 - h_2^2 - r_2^2}{-2r_2} \quad (\text{B.8})$$

$\theta_2$  is nou bekend in terme van  $h_2$  en die vaste afmetings  $e_2$ ,  $l_2$  en  $r_2$ :

$$\theta_2 = \text{bg} \sin \left( \frac{e_2^2 + h_2^2 + r_2^2 - l_2^2}{2r_2 \sqrt{e_2^2 + h_2^2}} \right) - \text{bgtan} \left( \frac{e_2}{h_2} \right) \quad (\text{B.9})$$

Vir die kruk geld dat:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta \quad (\text{B.10})$$

Die aktueerderstangverplasing  $d$  kan in terme van  $\theta$  uitgedruk word:

$$d = h_1 - l_1 \cos \phi_1 - r_1 \sin \theta \quad (\text{B.11})$$

waar  $l_1 \cos \phi_1 = \sqrt{l_1^2 - (e_1 - r_1 \cos \theta)^2}$  (B.12)



#### B.4

Dit is dus moontlik om die benodigde stangverplasing te bereken indien die veerdeleksie gegewe is.

Ten einde terugvoerbeheer moontlik te maak, moet  $h_2$  ook in terme van  $d$  uitgedruk word.

$$\text{Stel } s_1 = h_1 - d \quad (\text{B.13})$$

$\theta$  as funksie van  $s_1$  word afgelei:

$$\ell_1 \sin \phi_1 = e_1 - r_1 \cos \theta \quad (\text{B.14a})$$

$$\ell_1 \cos \phi_1 = s_1 - r_1 \sin \theta \quad (\text{B.14b})$$

Dus:

$$\theta = \text{bg} \sin \left( \frac{r_1^2 + e_1^2 + s_1^2 - \ell_1^2}{2r_1 \sqrt{e_1^2 + s_1^2}} \right) - \text{bg} \tan \left( \frac{e_1}{s_1} \right) \quad (\text{B.15})$$

Definieer 'n nuwe  $\theta'_2$  sodat:

$$r_2 \cos \theta_2 + l_2 \cos \theta'_2 = e_2 \quad (\text{B.16a})$$

$$r_2 \sin \theta_2 + l_2 \sin \theta'_2 = h_2 \quad (\text{B.16b})$$

Uit vergelyking (B.16a):

**B.5**

$$\cos\theta'_2 = \frac{1}{l_2} (e_2 - r_2\cos\theta_2) \quad (\text{B.17})$$

Verder geld die identiteit:

$$\sin^2\theta'_2 + \cos^2\theta'_2 \equiv 1 \quad (\text{B.18})$$

Deur die laasgenoemde twee vergelykings te kombineer, kan die volgende uitdrukking vir  $\sin \theta'_2$  verkry word:

$$\sin\theta'_2 = \sqrt{1 - \left[ \frac{1}{l_2} (e_2 - r_2\cos\theta_2) \right]^2} \quad (\text{B.19})$$

Indien vergelyking (B.19) in vergelyking (B.16b) vervang word en  $\theta_2 = \theta$  gestel word, is  $h_2$  bekend in terme van  $\theta$ :

$$h_2 = r_2\sin\theta + l_2 \sqrt{1 - \left[ \frac{1}{l_2} (e_2 - r_2\cos\theta) \right]^2} \quad (\text{B.20})$$

In die geval van nuldefleksie van die veer is  $\delta = 0$ . Die volgende geld dus:

$$\theta = 0 \quad (\text{B.21a})$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (\text{B.21b})$$

**B.6**

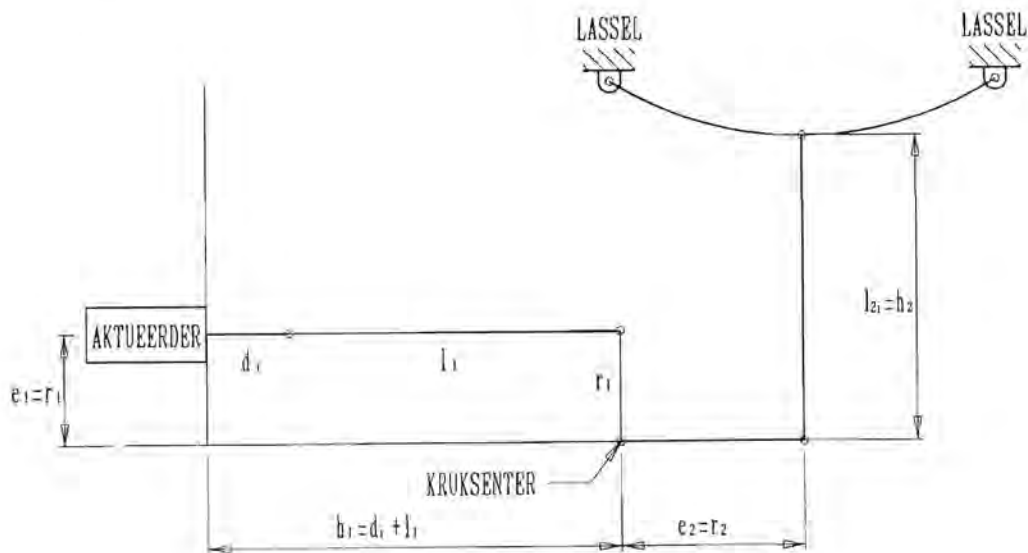
$$h_1 = d_i + \ell_1 \quad (B.21c)$$

$$h_2 = \ell_2 \quad (B.21d)$$

waar  $d_i$  die beginverplasing van die aktueerderstang is.

Die insetarm van die kruk is vertikaal en die uitsetarm horisontaal. Die stange  $d$  en  $\ell_1$  vorm 'n reguitlyn.

Die geometrie van die toetsopstelling vir nuldefleksie word skematies soos volg voorgestel:



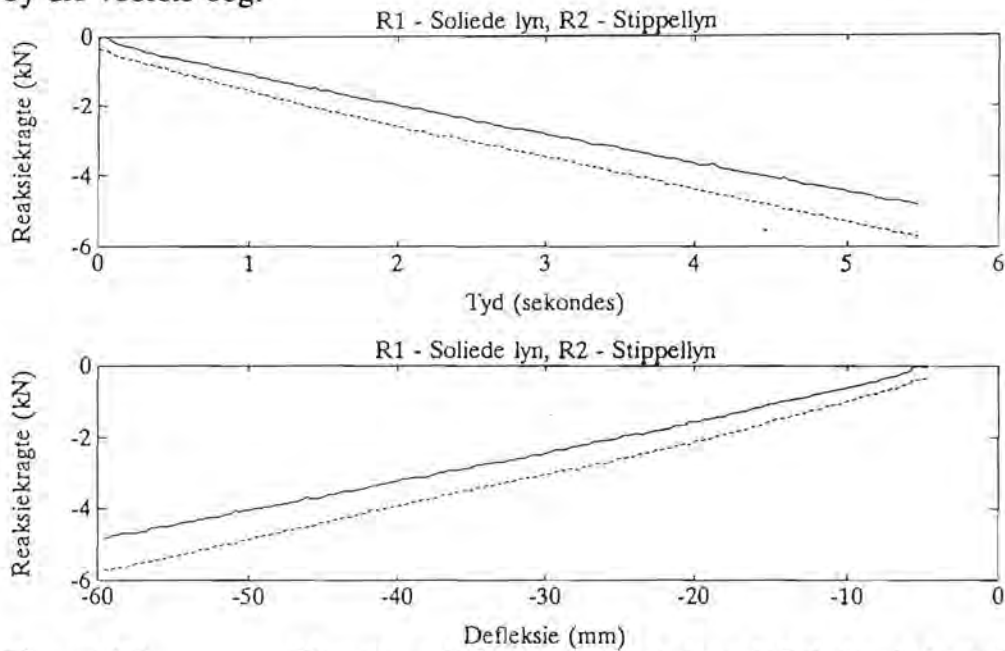
**Figuur B2:** Toetsgeometrie vir nuldefleksie

**C.1**

**BYLAE C**

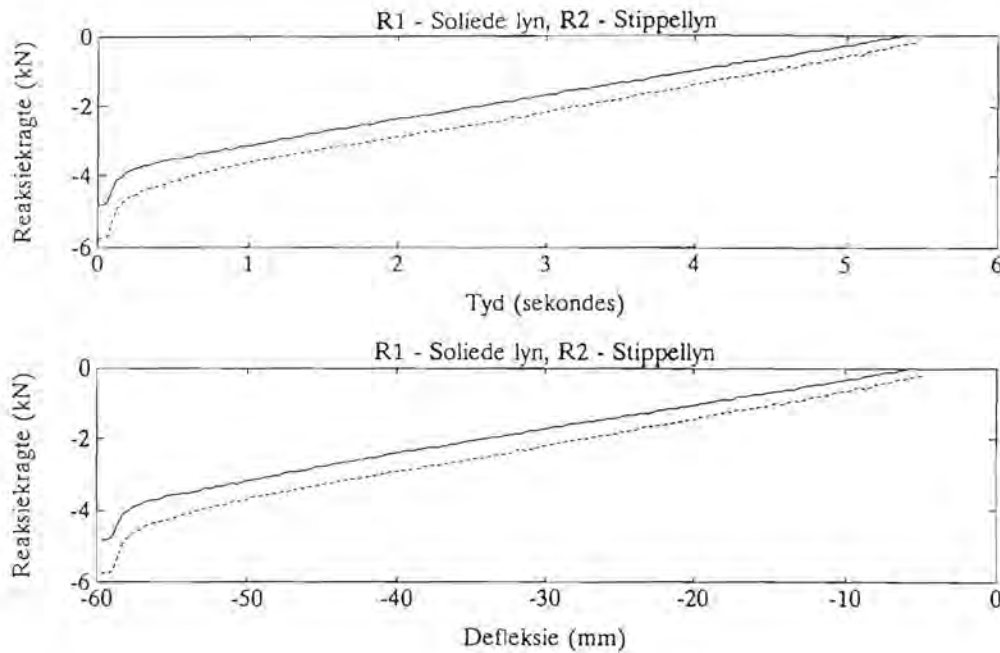
**Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toetse 01 tot 51**

$R_1$  verwys telkens na die reaksiekrag by die skakelskarnier en  $R_2$  na die reaksiekrag by die voorste oog.



**Figuur C1**

Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 01

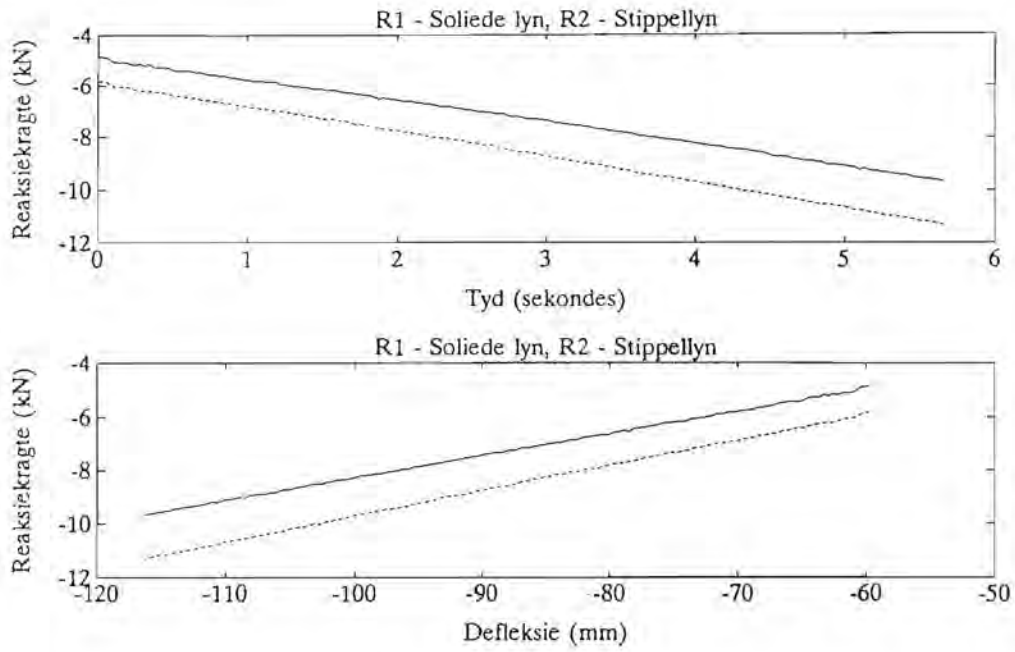


**Figuur C2**

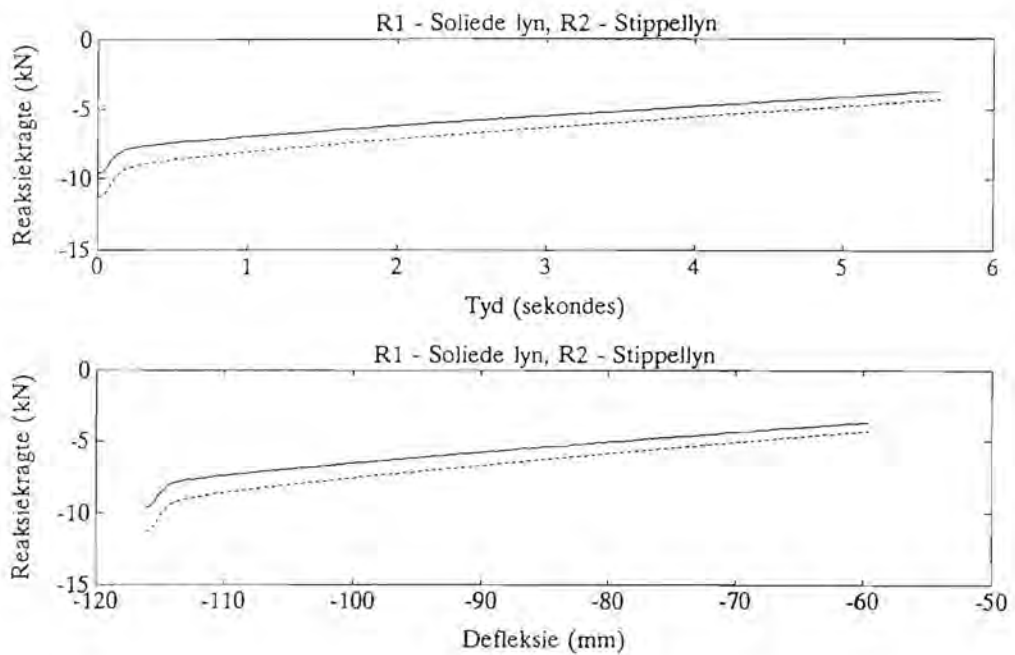
Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 02



C.2

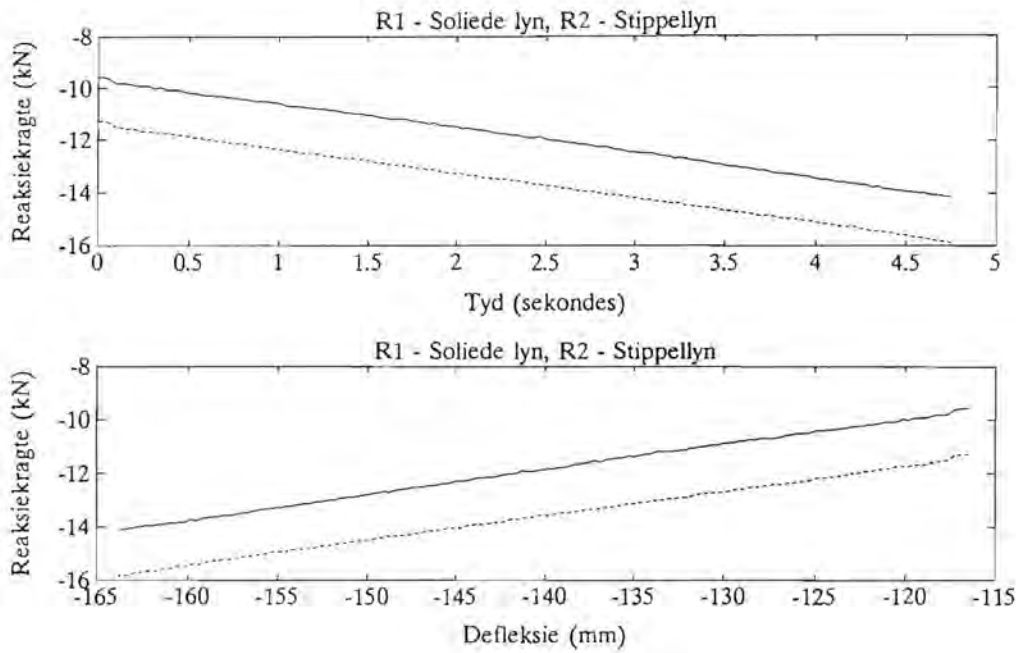


**Figuur C3** Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 03

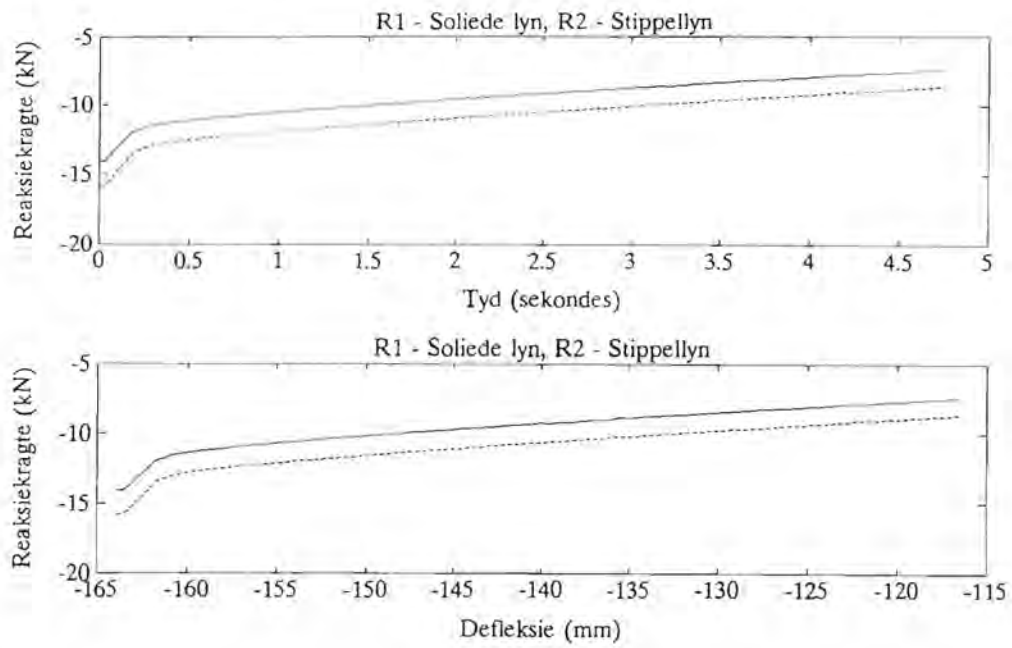


**Figuur C4** Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 04

**C.3**

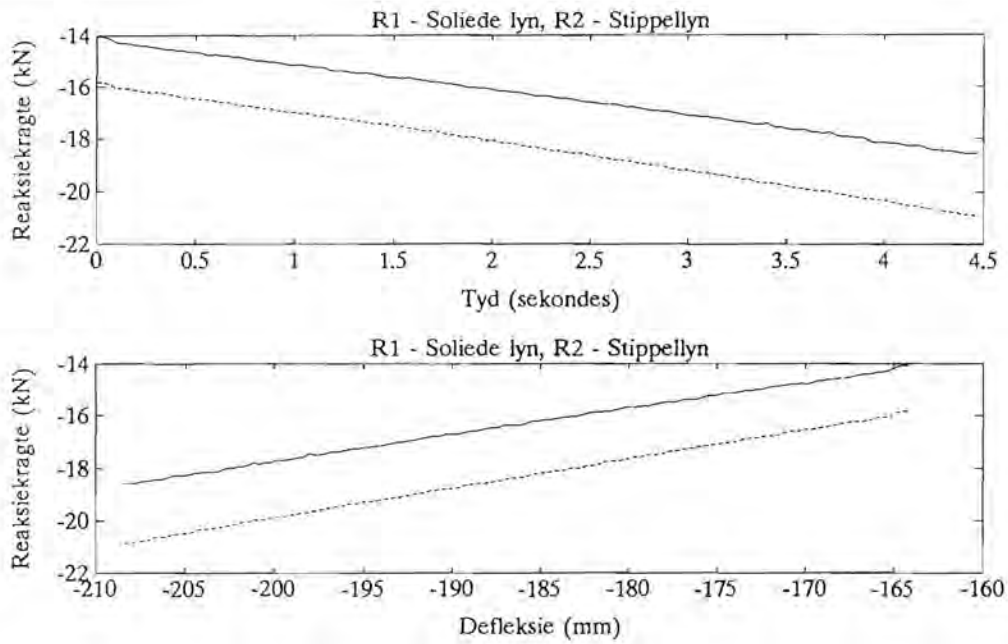


**Figuur C5** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 05



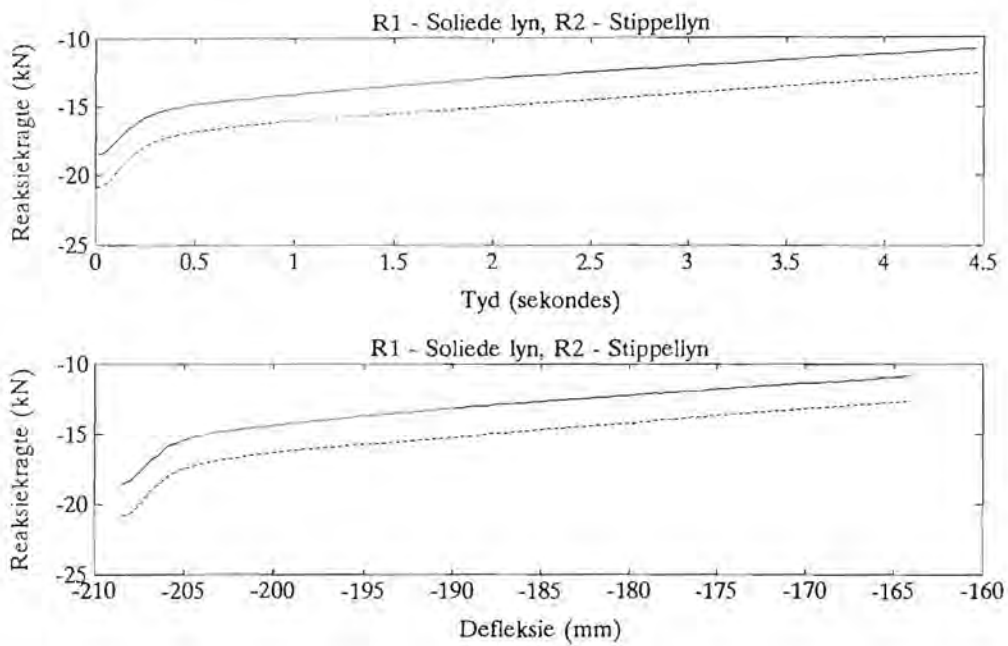
**Figuur C6** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 07

**C.4**



**Figuur C7**

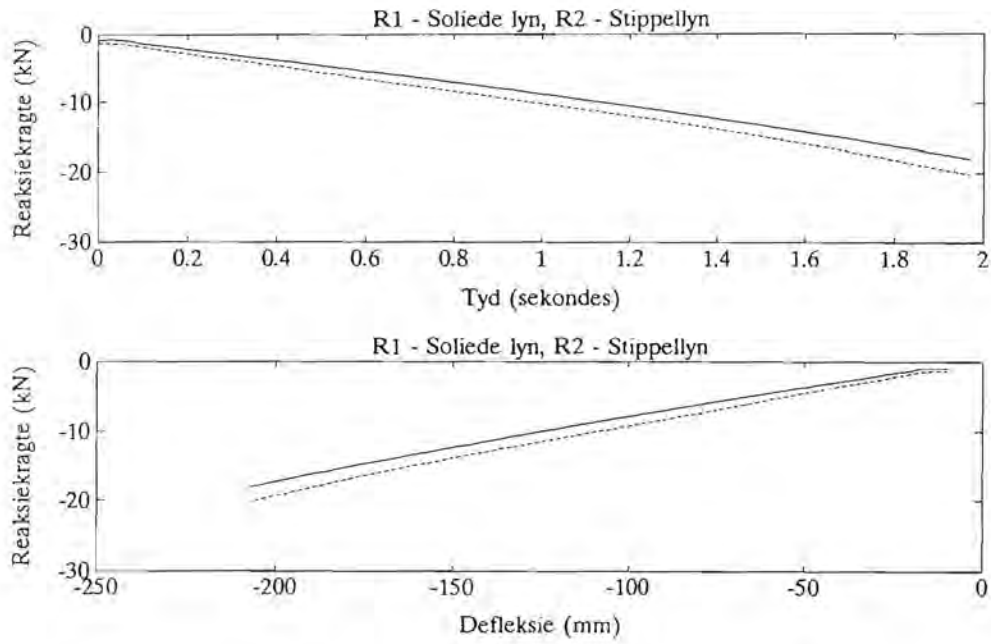
Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 08



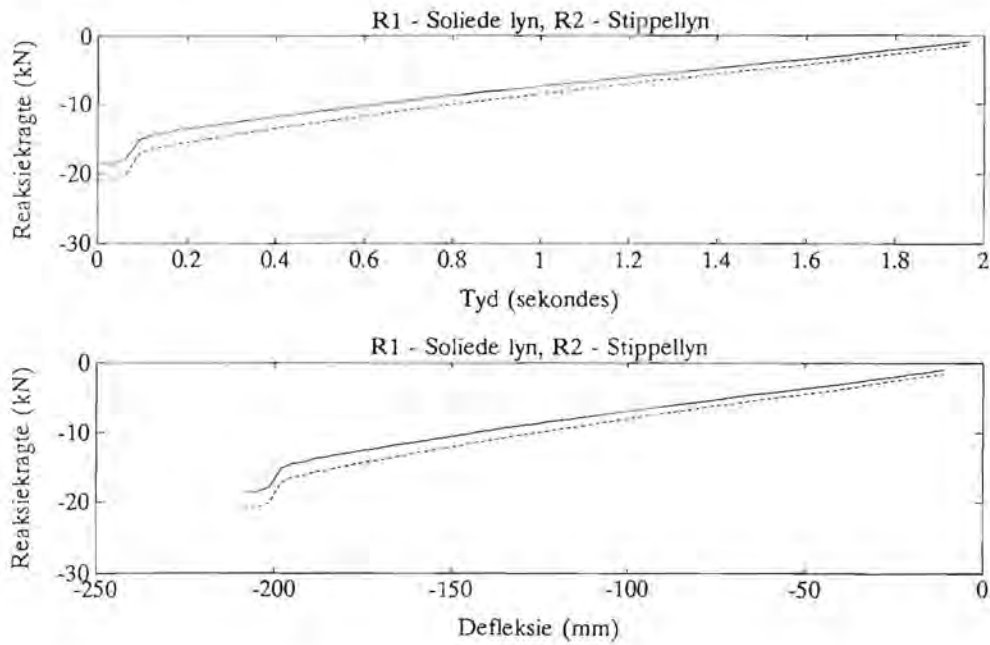
**Figuur C8**

Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 09

**C.5**



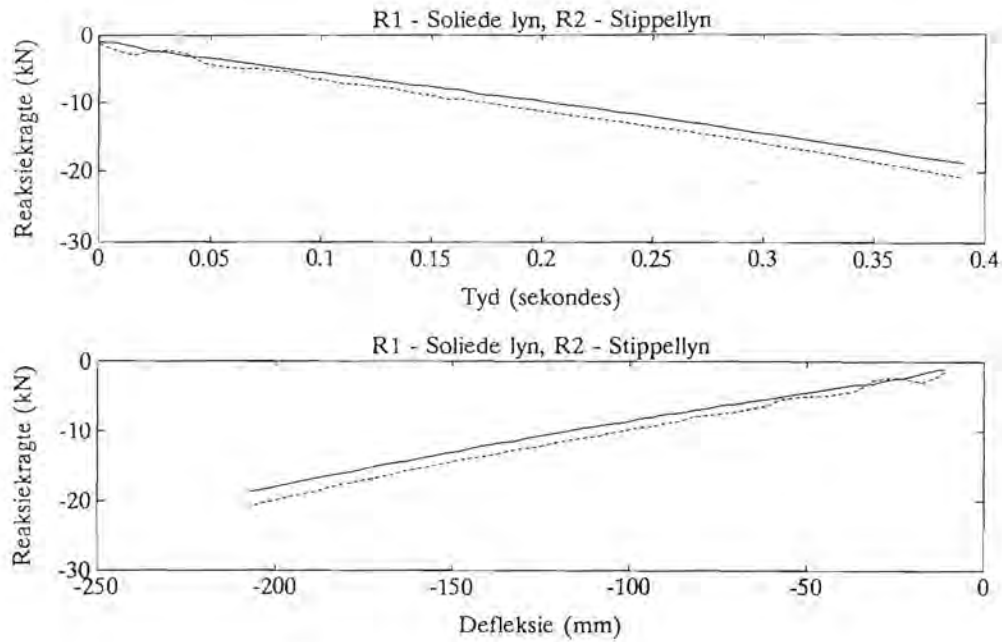
**Figuur C9** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 11



**Figuur C10** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 12

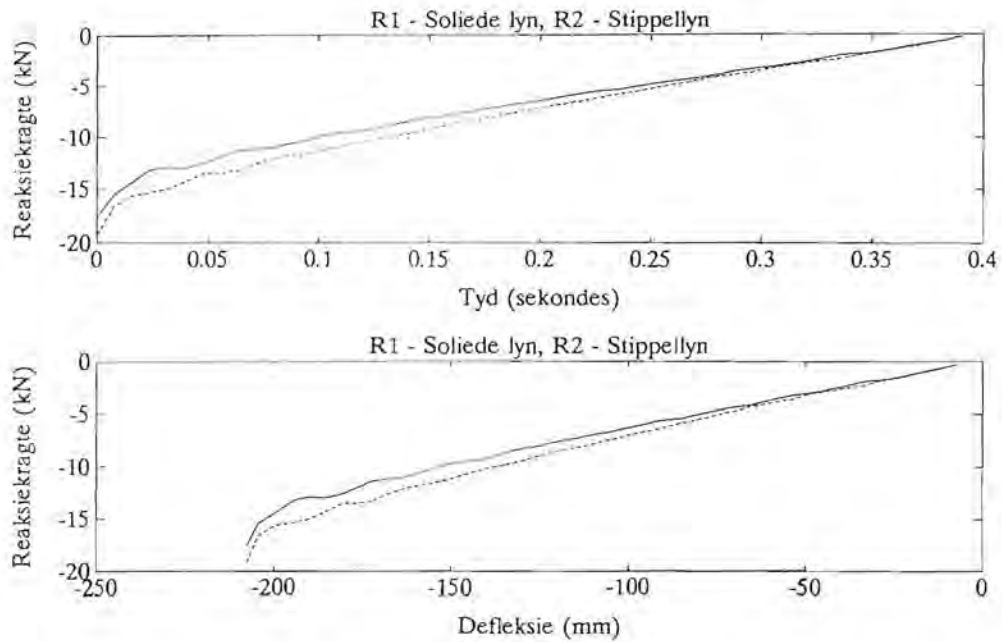


**C.6**



**Figuur C11**

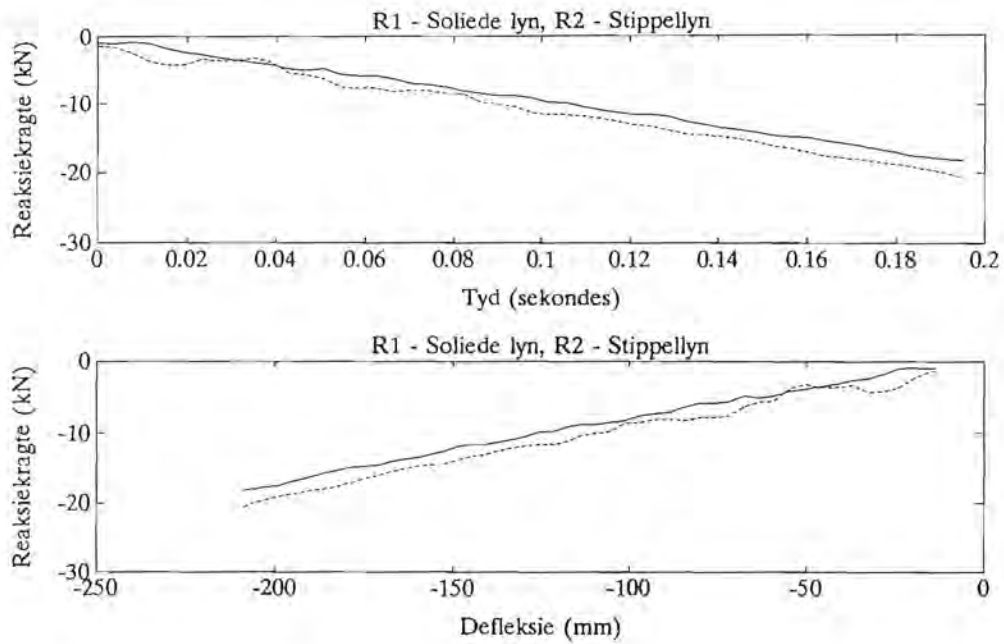
Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 13



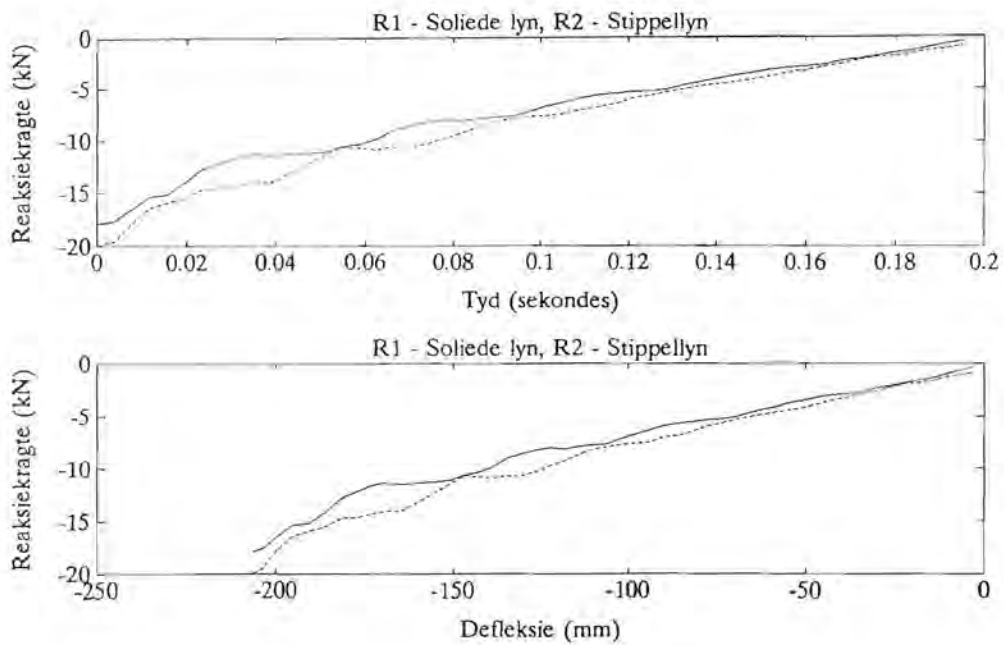
**Figuur C12**

Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 14

**C.7**

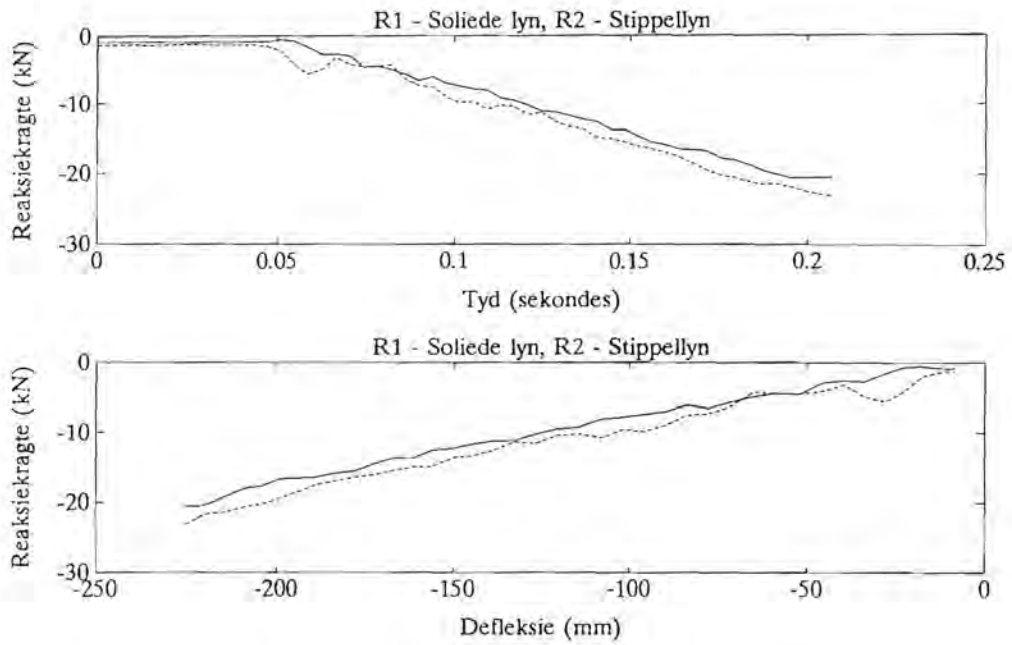


**Figuur C13** Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 15

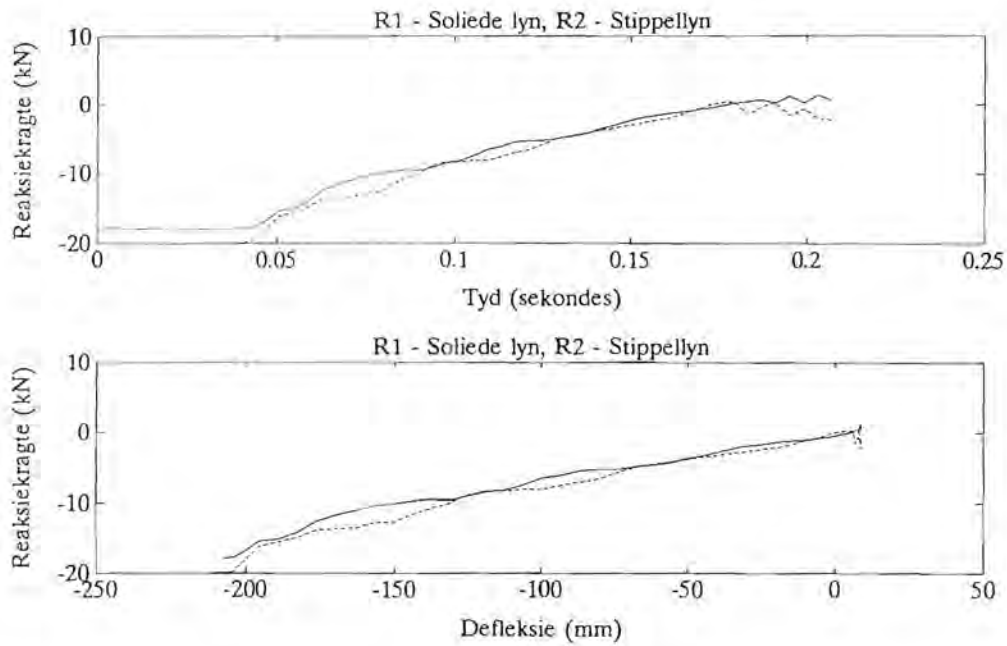


**Figuur C14** Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 16

C.8

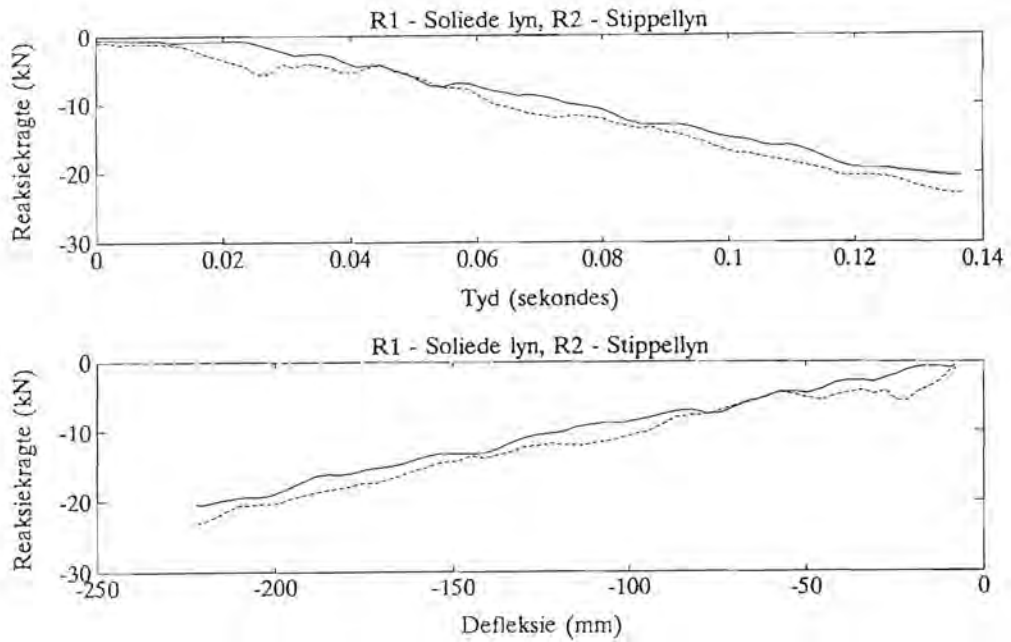


**Figuur C15** Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 17



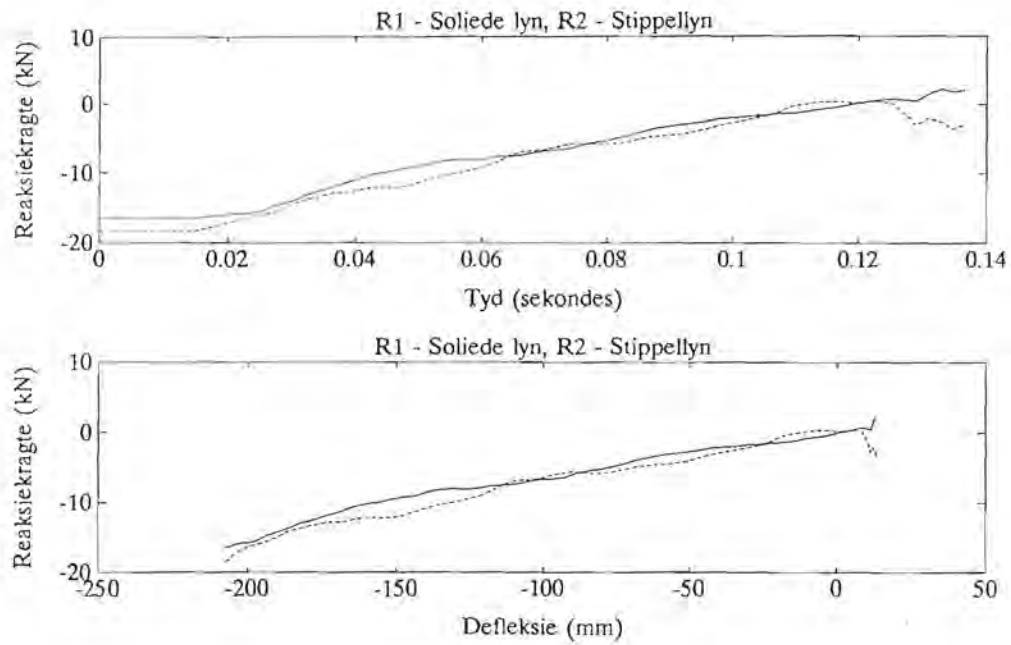
**Figuur C16** Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 18

**C.9**



**Figuur C17**

Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 19

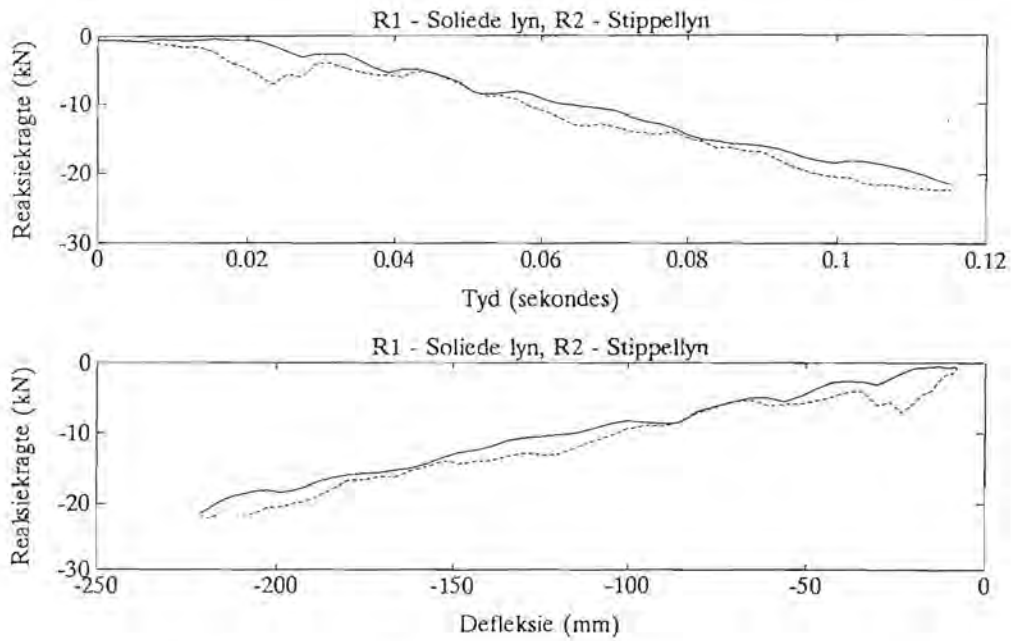


**Figuur C18**

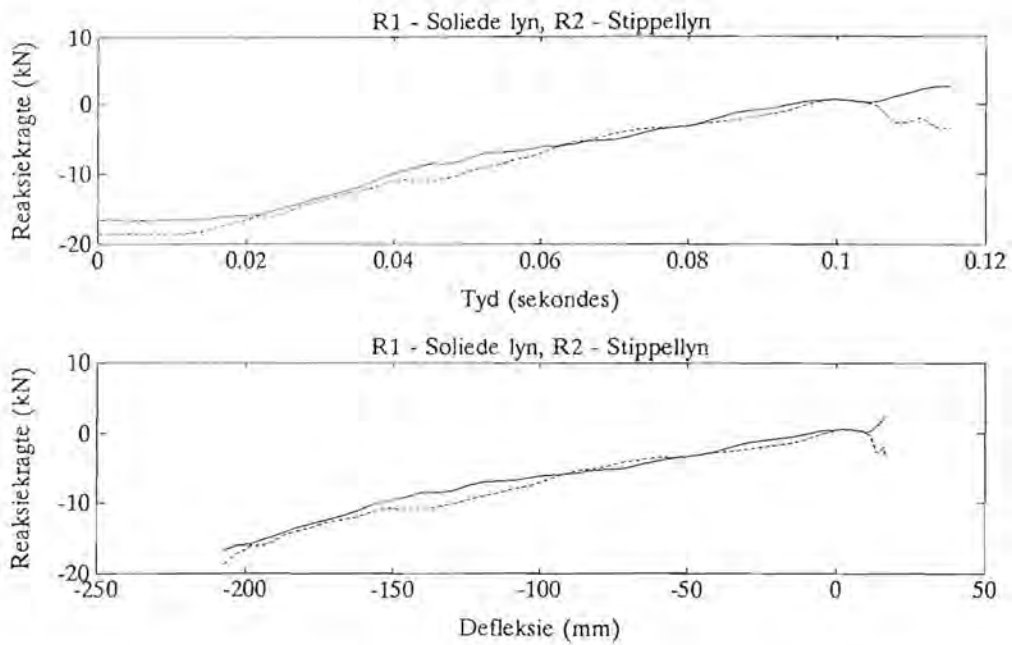
Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 20



**C.10**

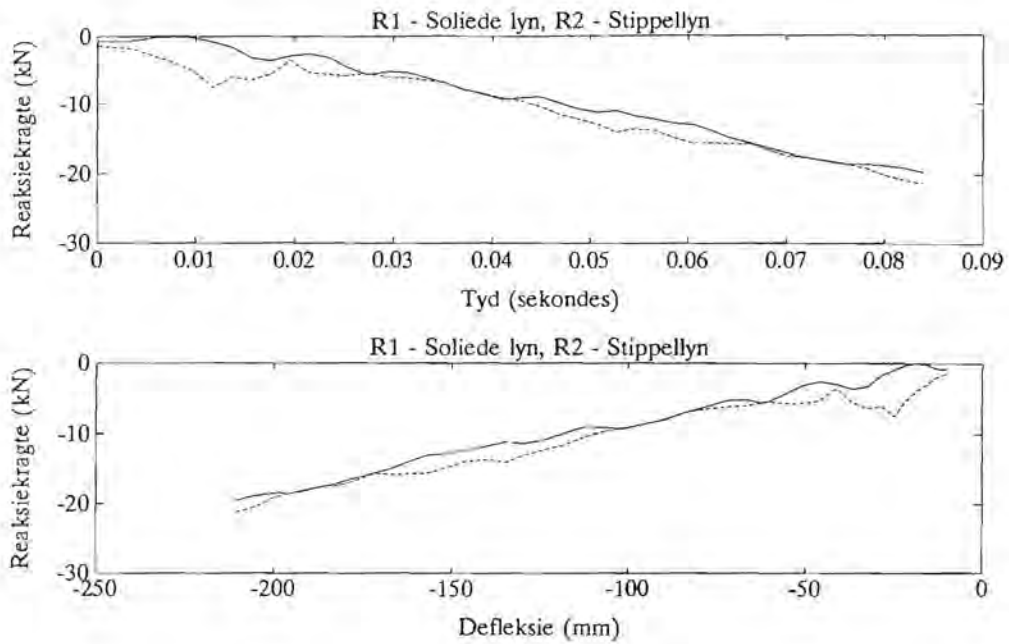


**Figuur C19** Gemete reaksiekrigte teen tyd en defleksie vir toets 21



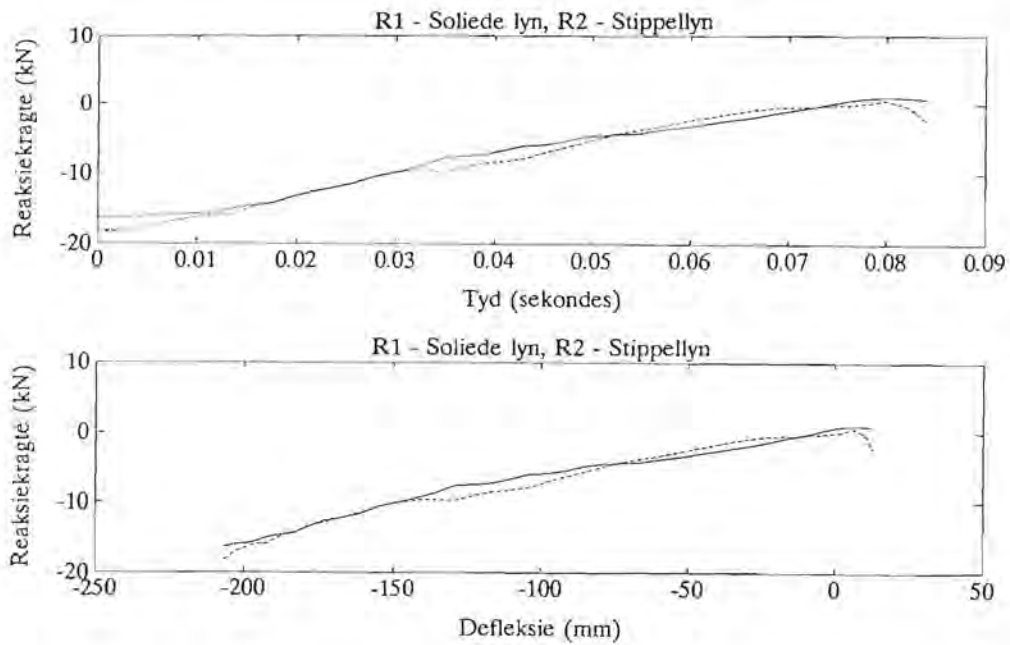
**Figuur C20** Gemete reaksiekrigte teen tyd en defleksie vir toets 22

**C.11**



**Figuur C21**

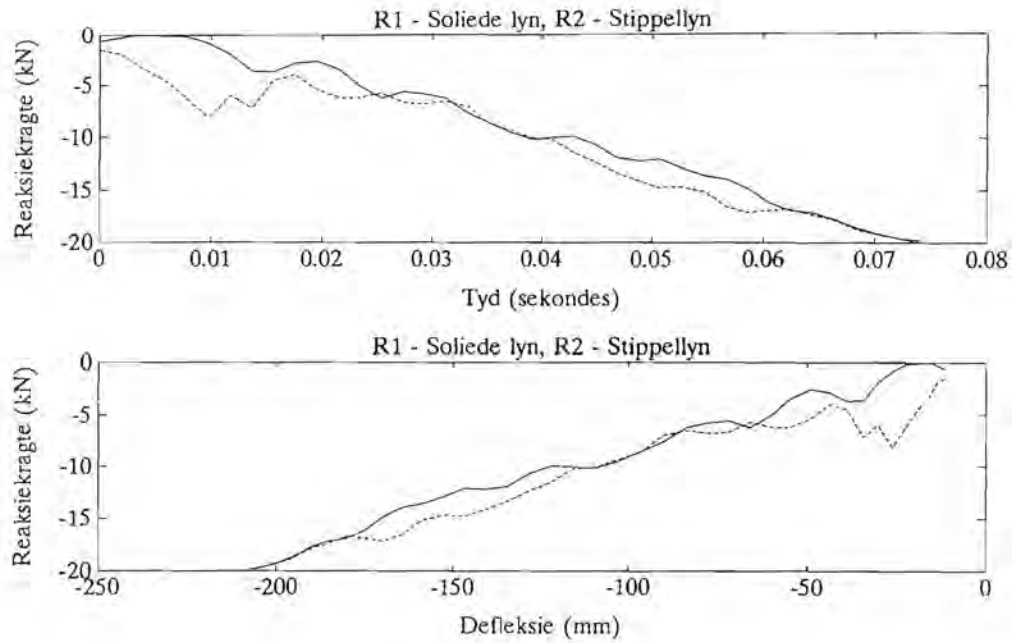
Gemete reaksiekrigte teen tyd en defleksie vir toets 23



**Figuur C22**

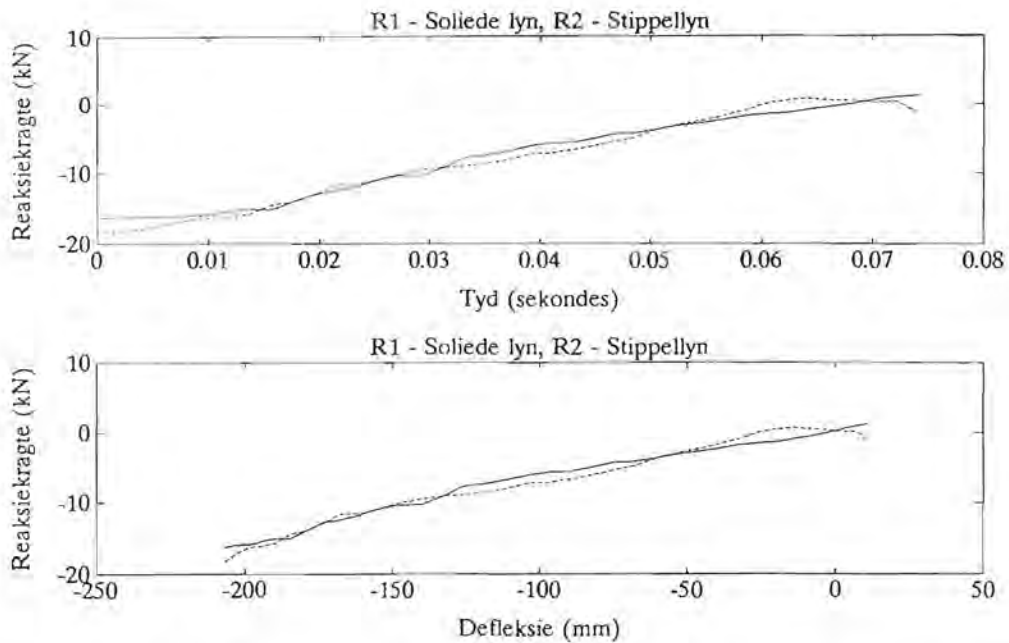
Gemete reaksiekrigte teen tyd en defleksie vir toets 24

C.12



**Figuur C23**

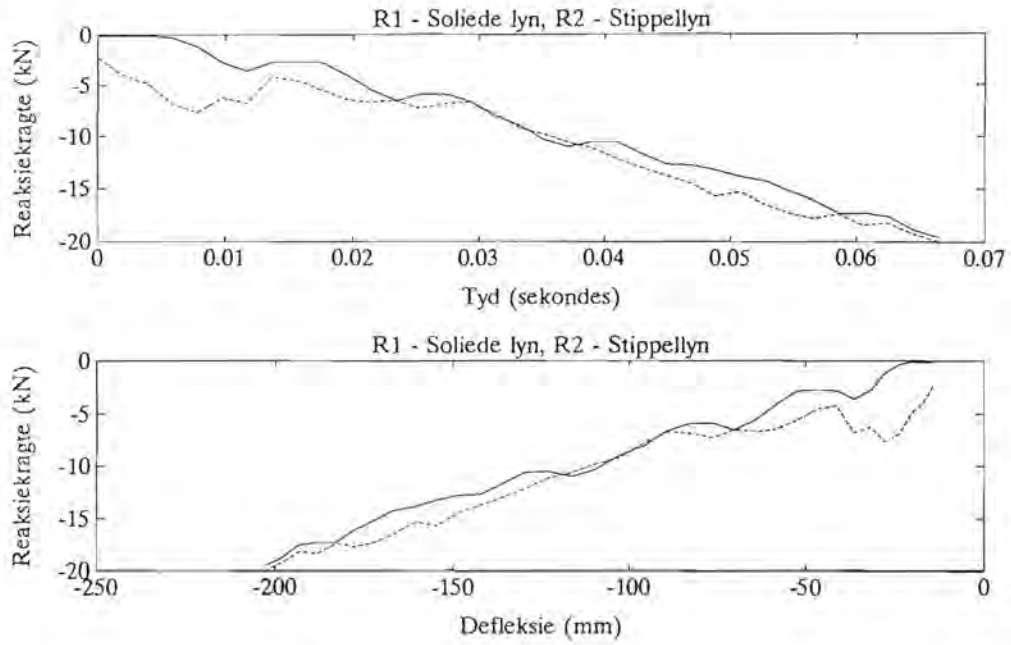
Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 25



**Figuur C24**

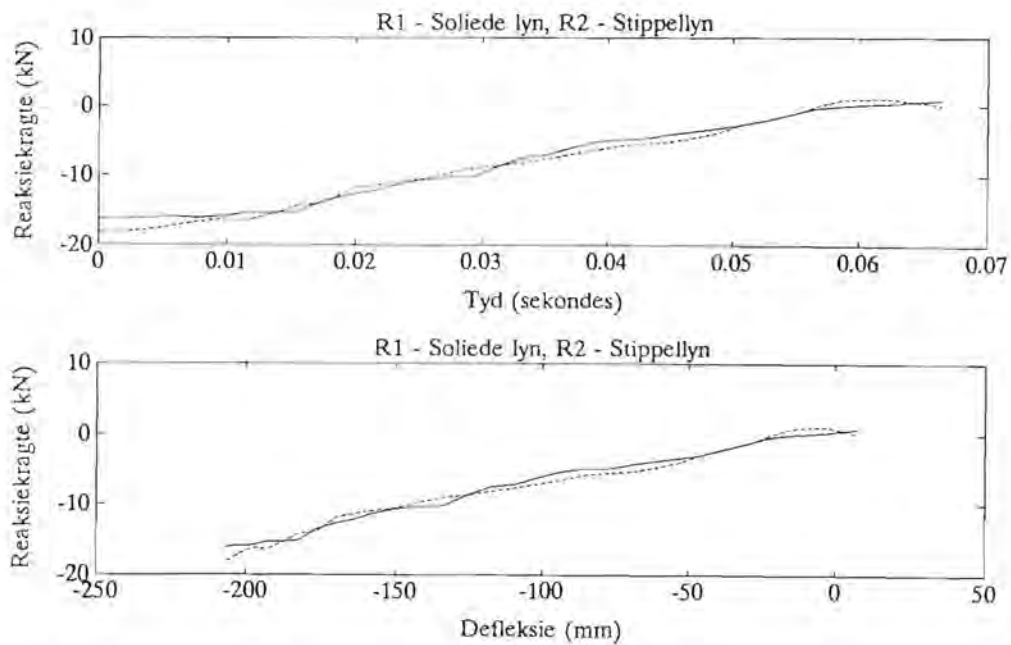
Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 26

C.13



**Figuur C25**

Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 27

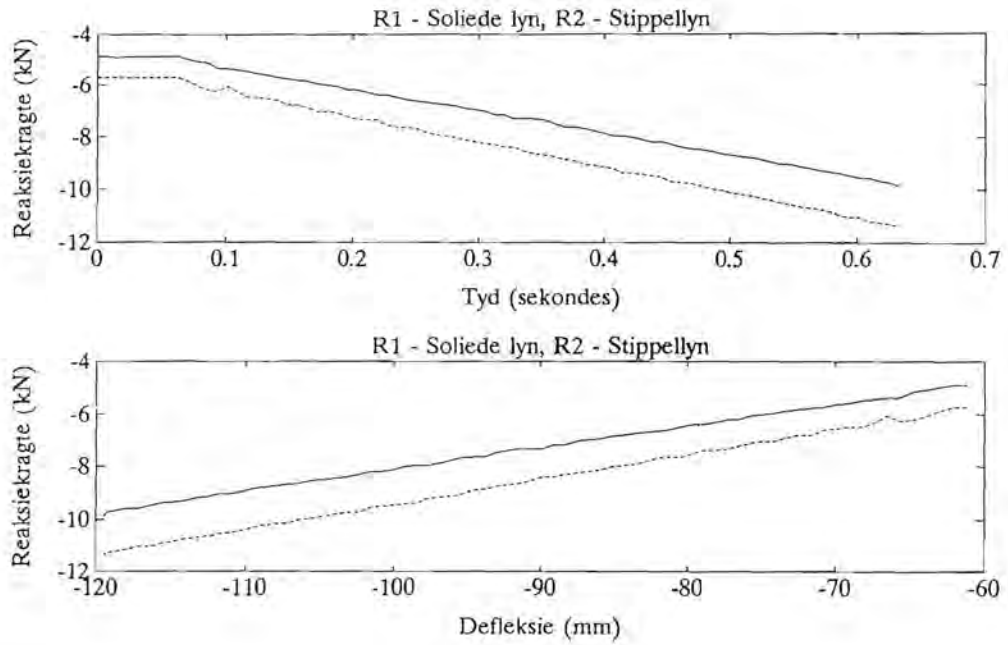


**Figuur C26**

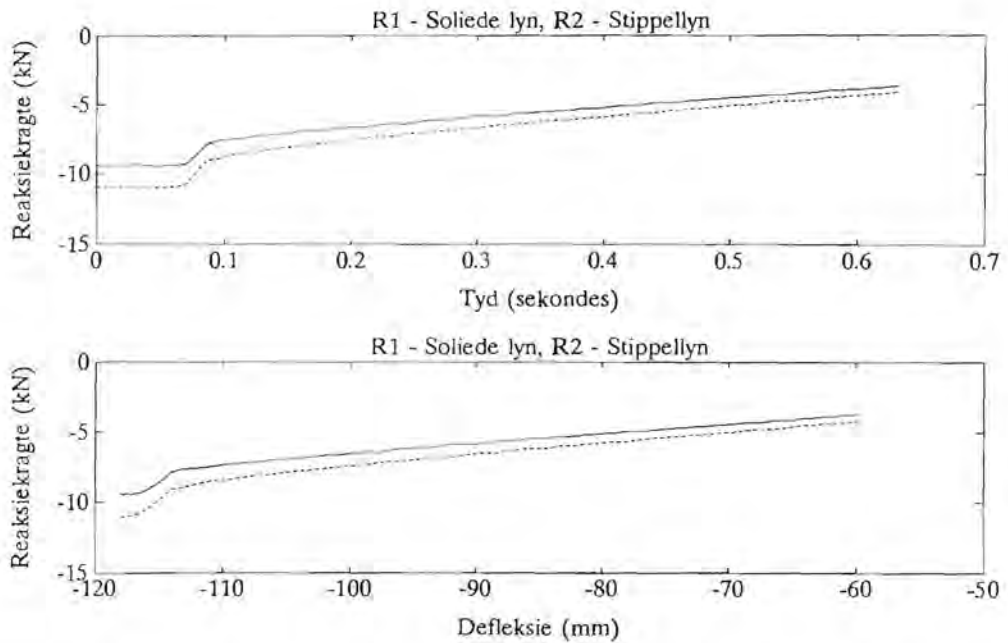
Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 28



C.14

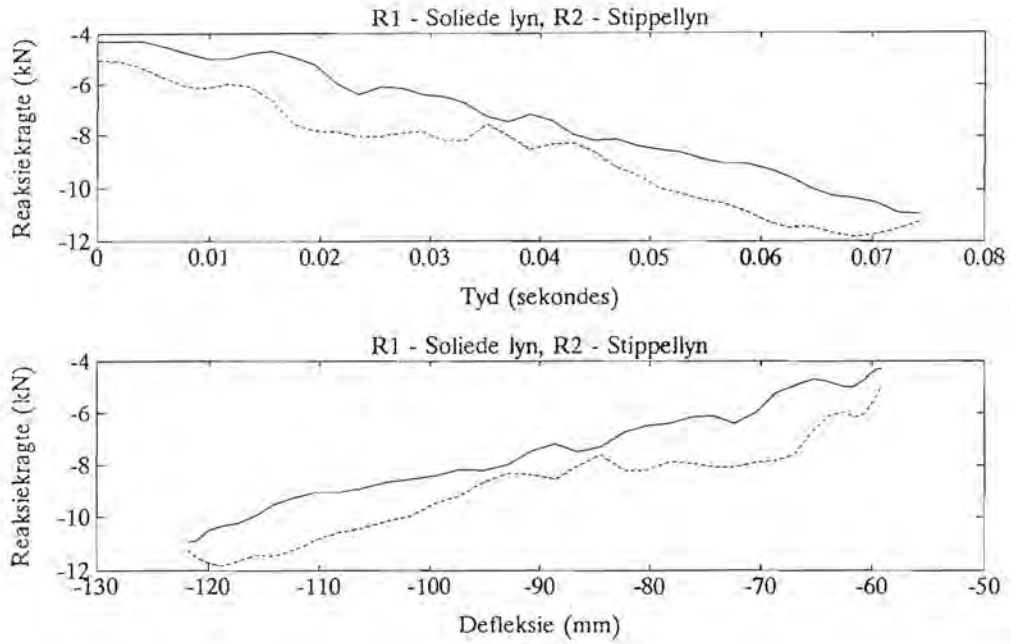


**Figuur C27** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 31



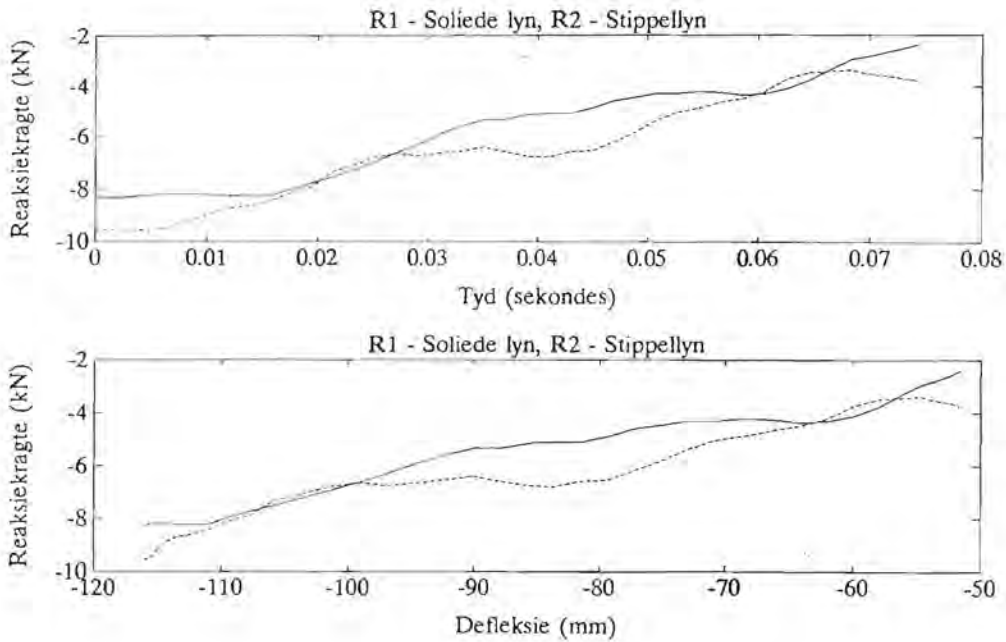
**Figuur C28** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 32

**C.15**



**Figuur C29**

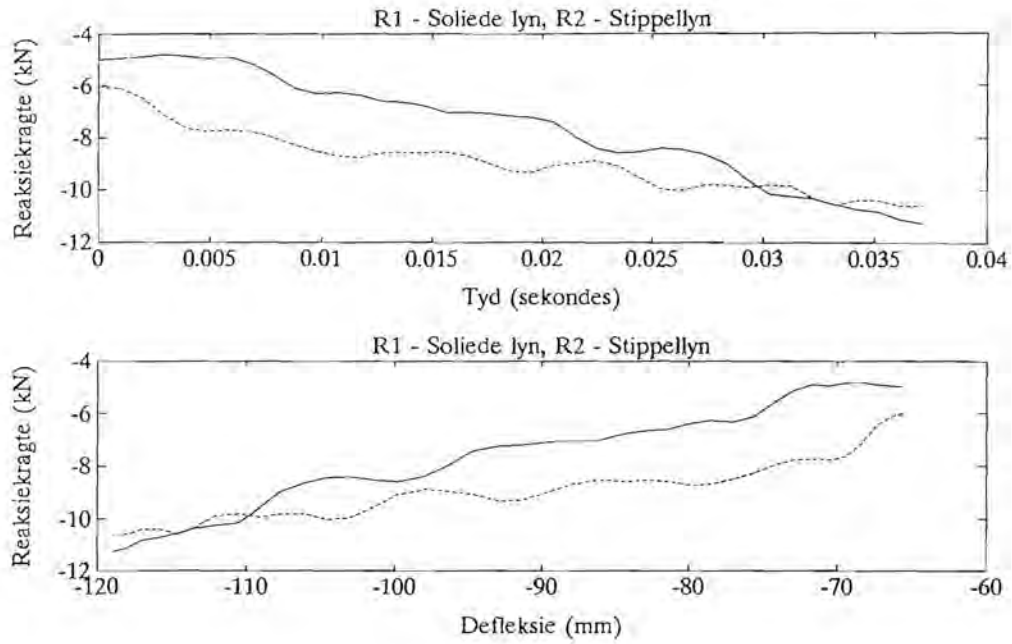
Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 33



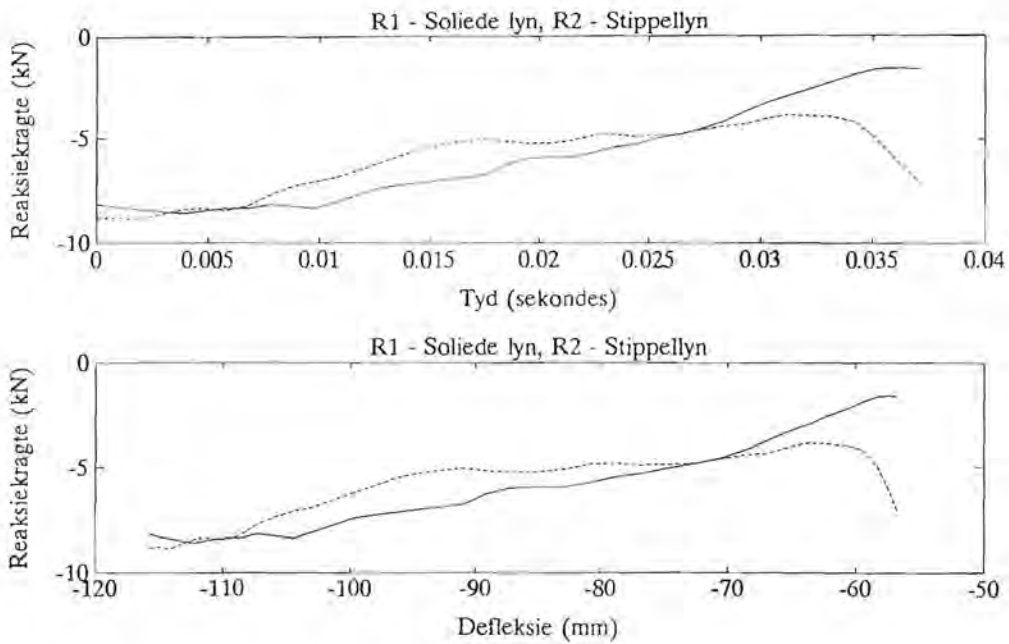
**Figuur C30**

Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 34

**C.16**

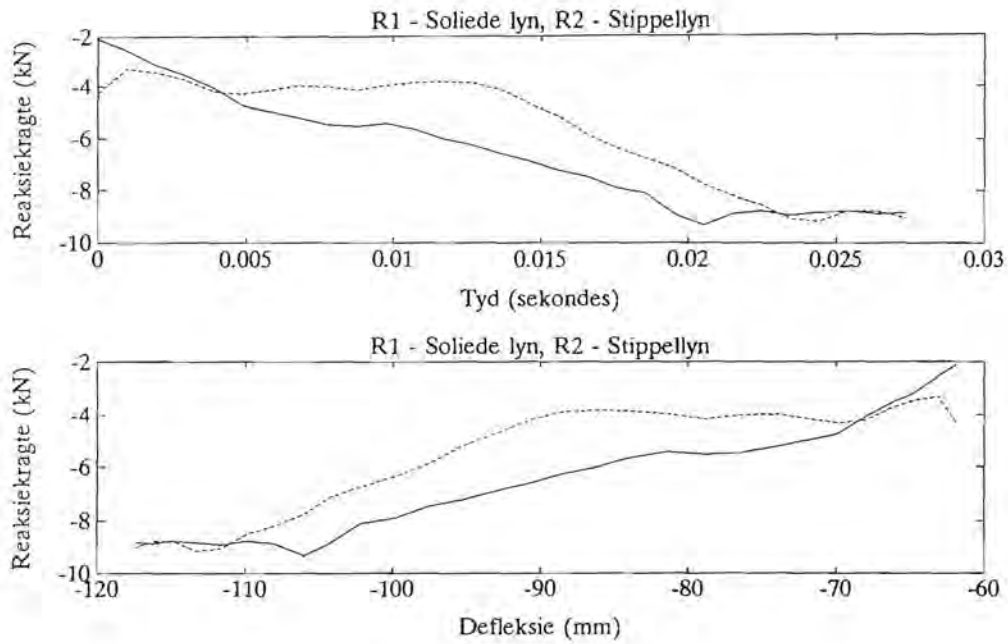


**Figuur C31** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 35



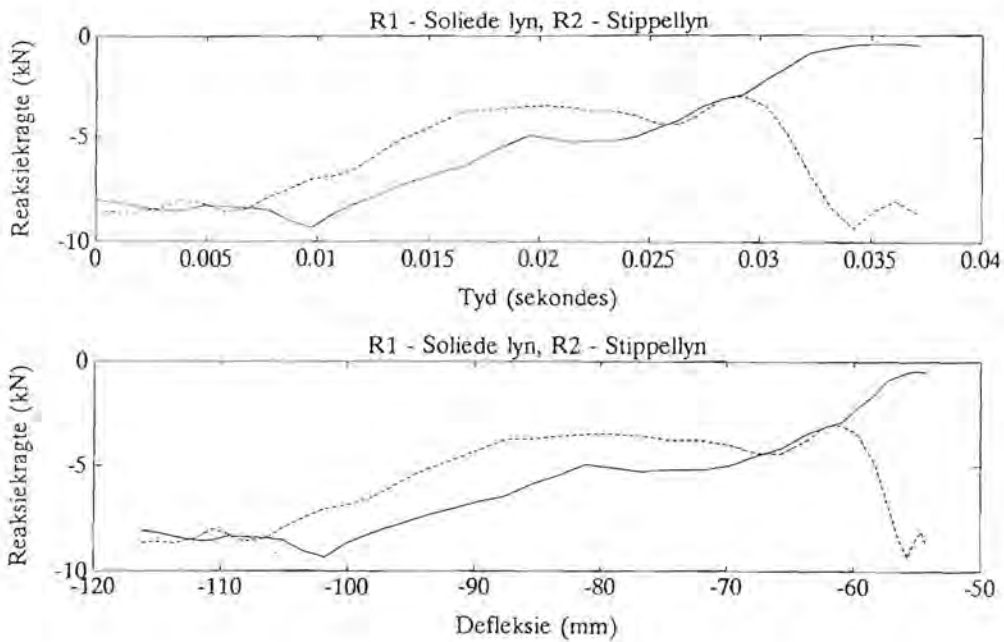
**Figuur C32** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 36

**C.17**



**Figuur C33**

Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 37

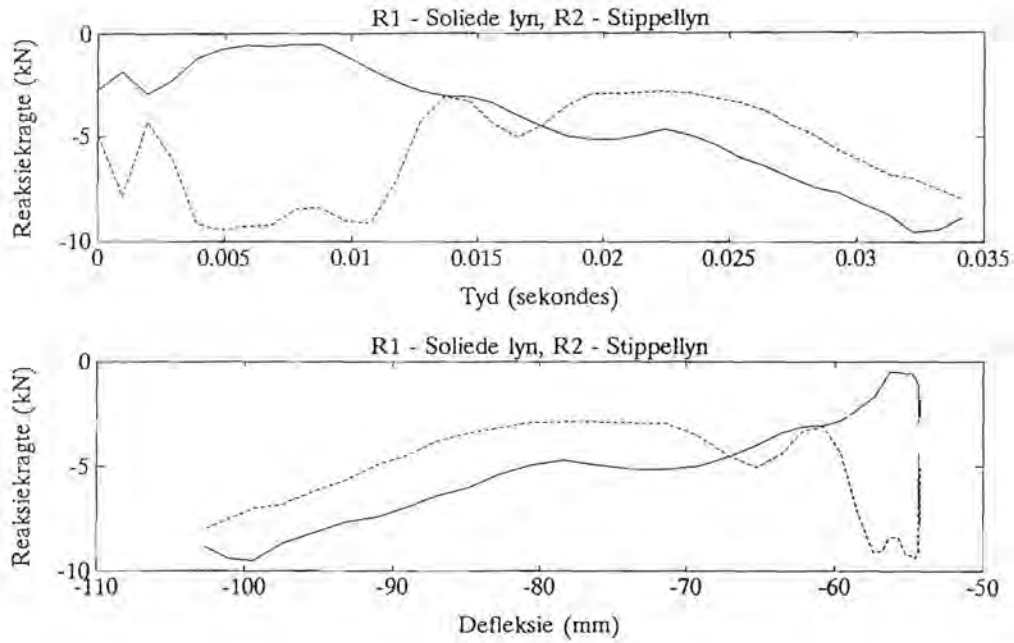


**Figuur C34**

Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 38

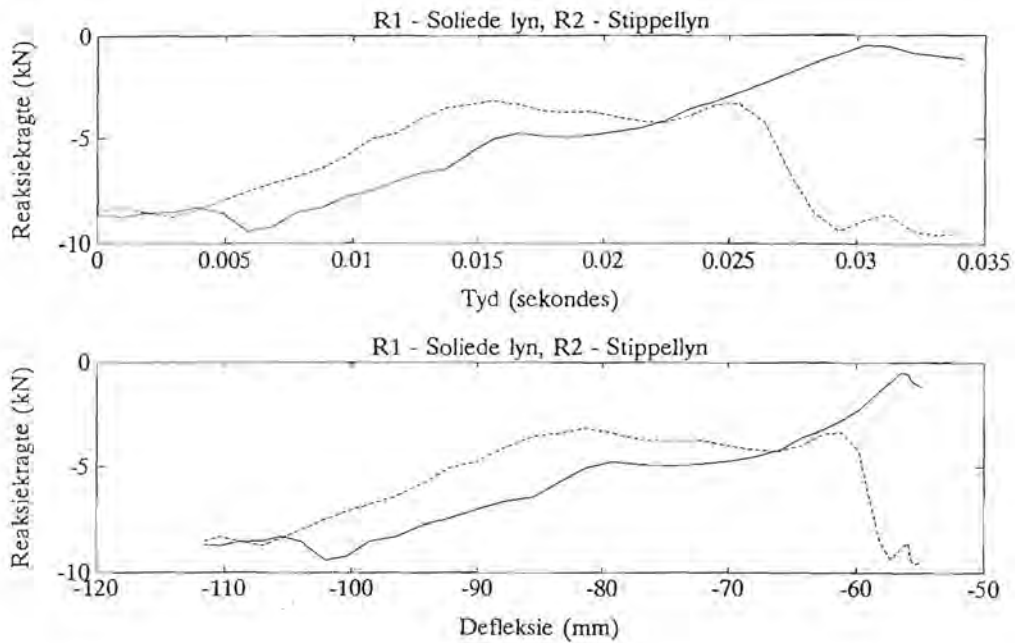


C.18



**Figuur C35**

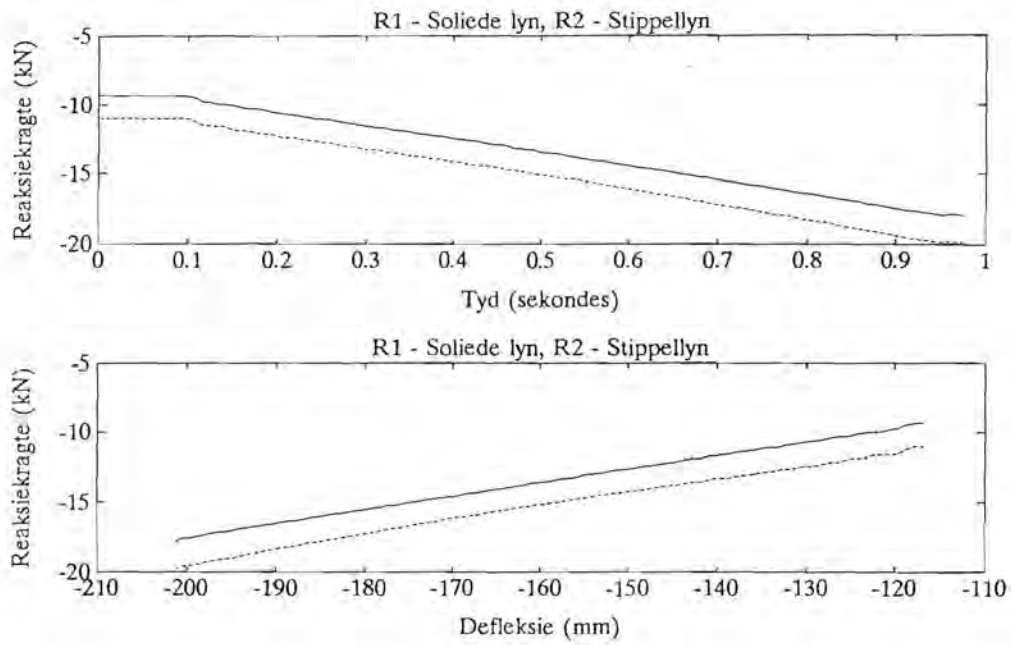
Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 39



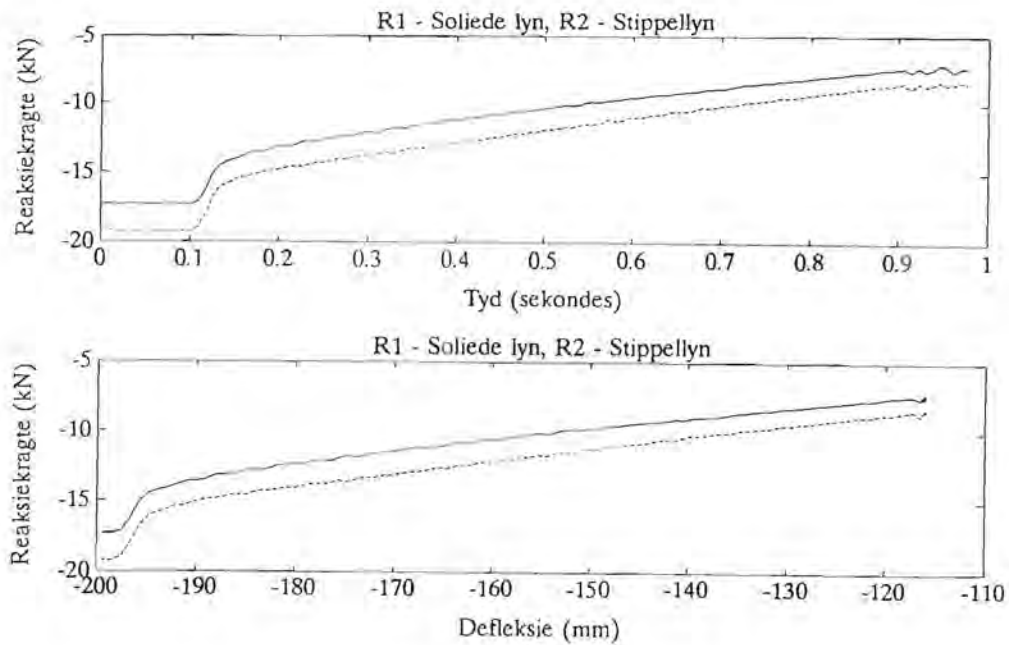
**Figuur C36**

Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 40

**C.19**

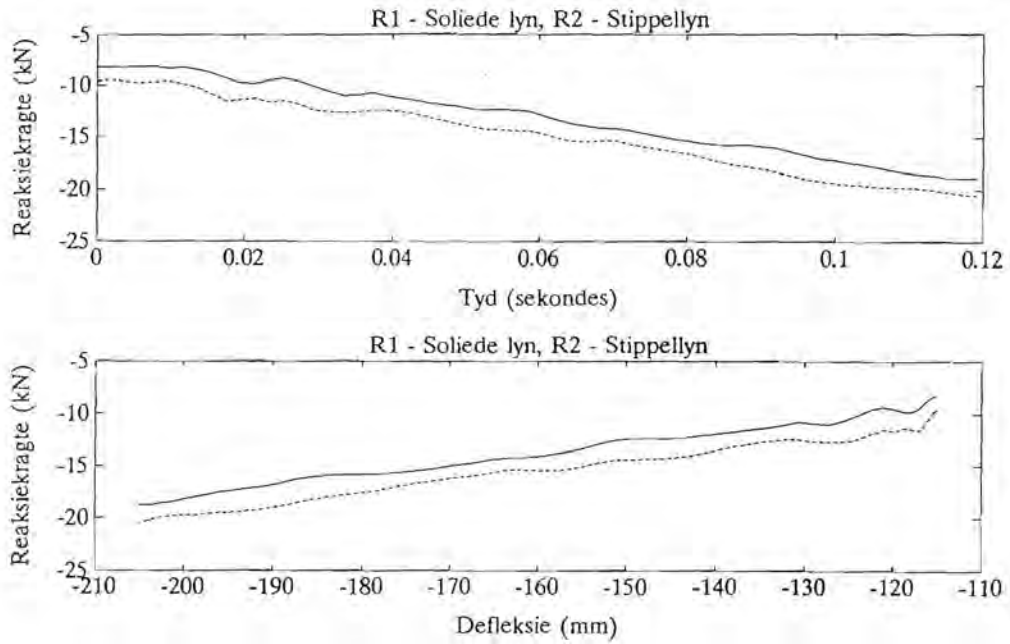


**Figuur C37** Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 41



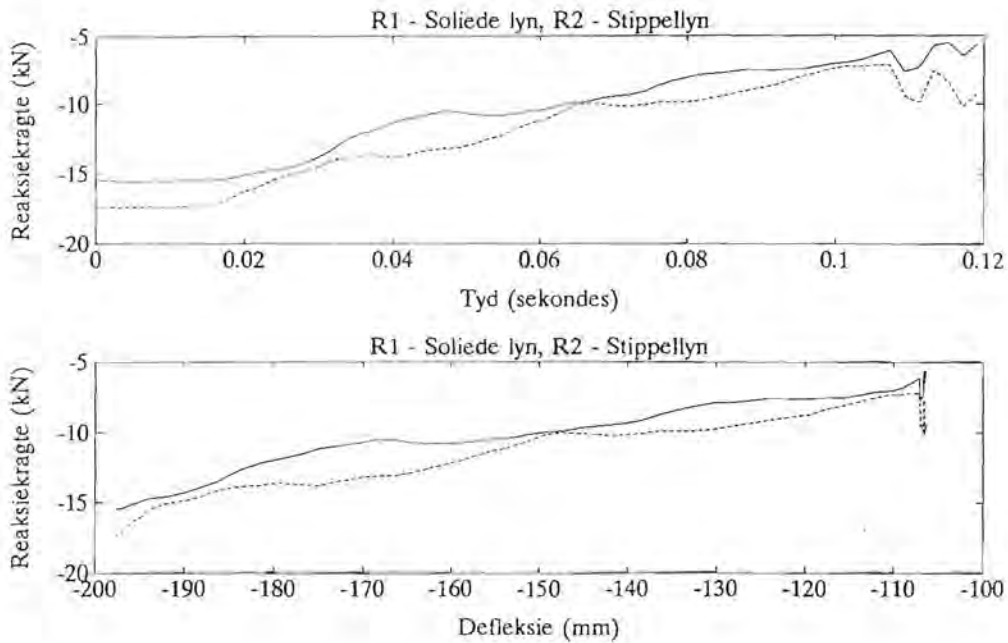
**Figuur C38** Gemete reaksiekragte teen tyd en defleksie vir toets 42

**C.20**



**Figuur C39**

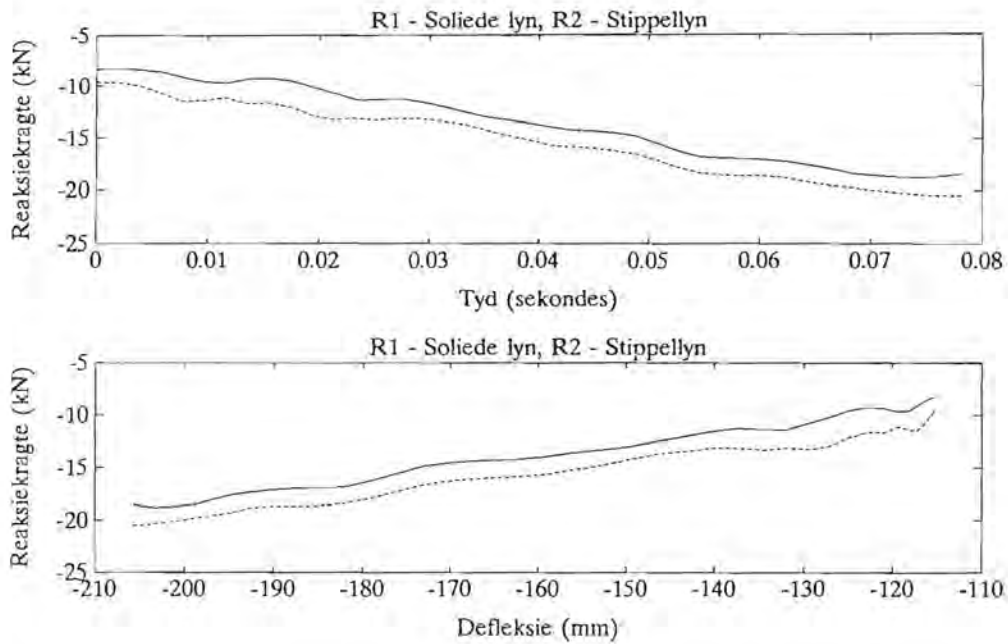
Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 43



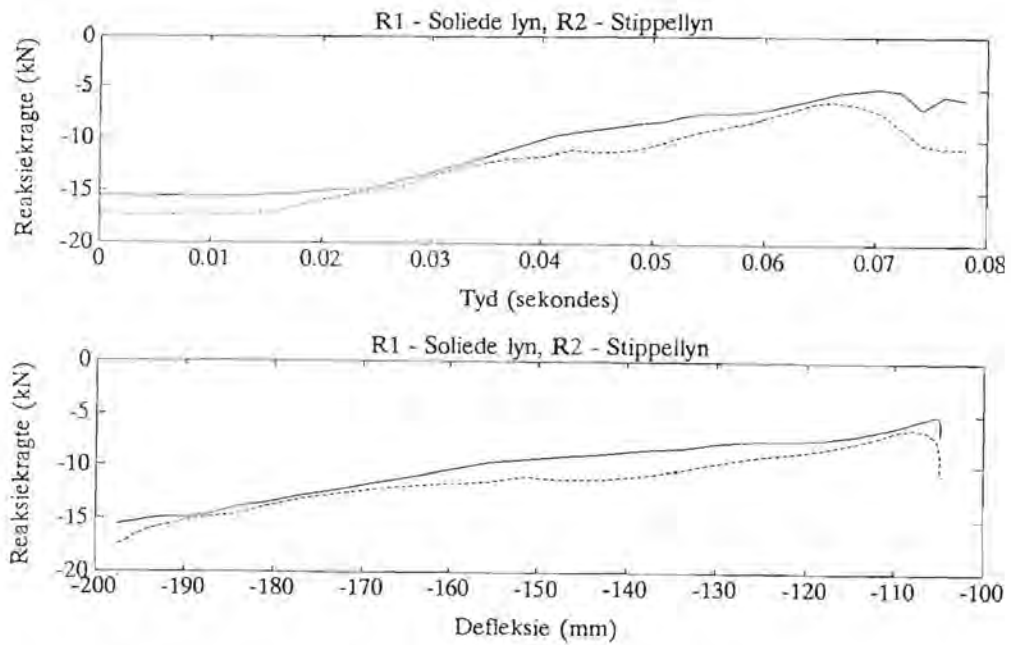
**Figuur C40**

Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 44

**C.21**



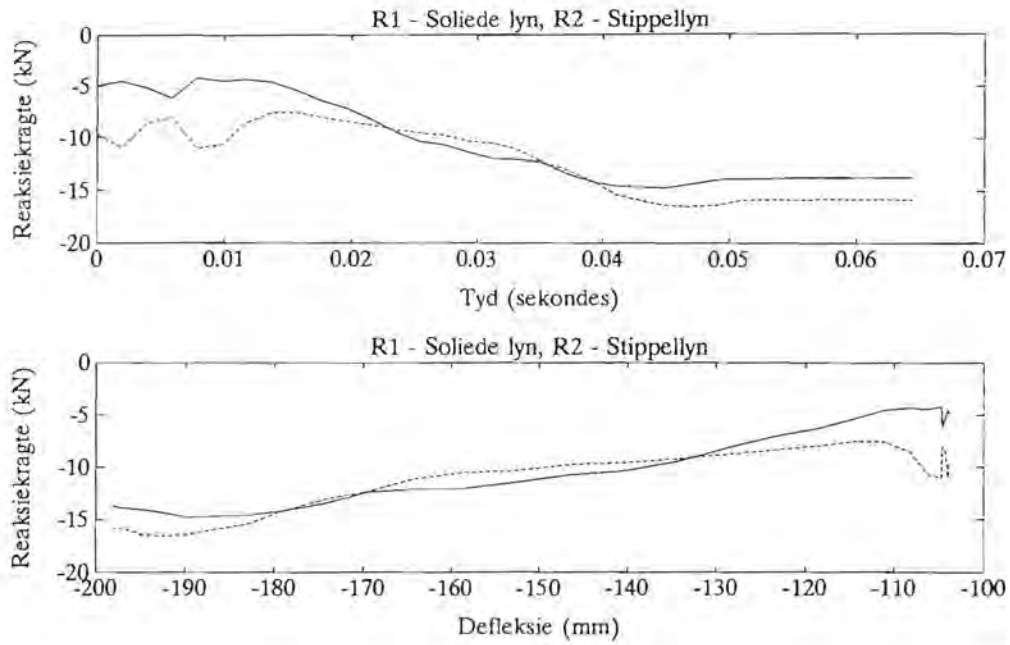
**Figuur C41** Gemete reaksiekrigte teen tyd en defleksie vir toets 45



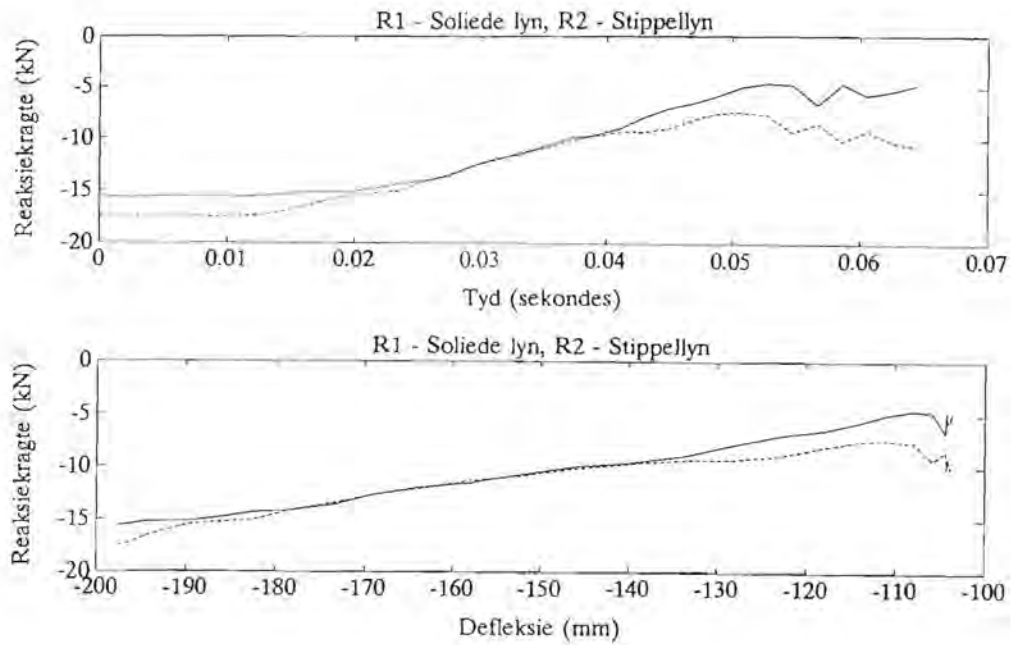
**Figuur C42** Gemete reaksiekrigte teen tyd en defleksie vir toets 46



**C.22**

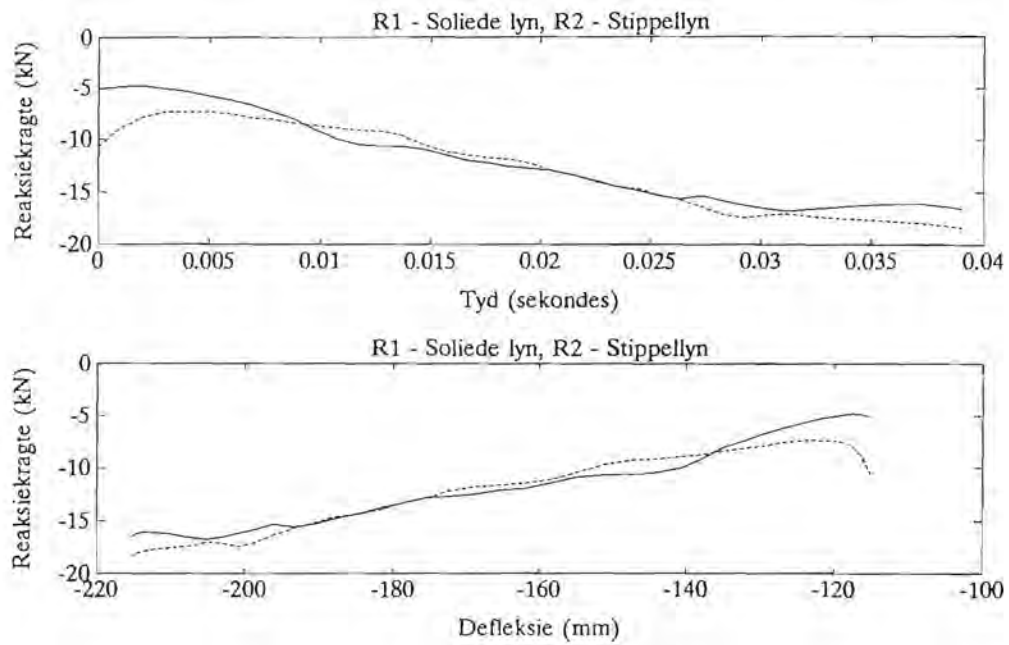


**Figuur C43** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 47

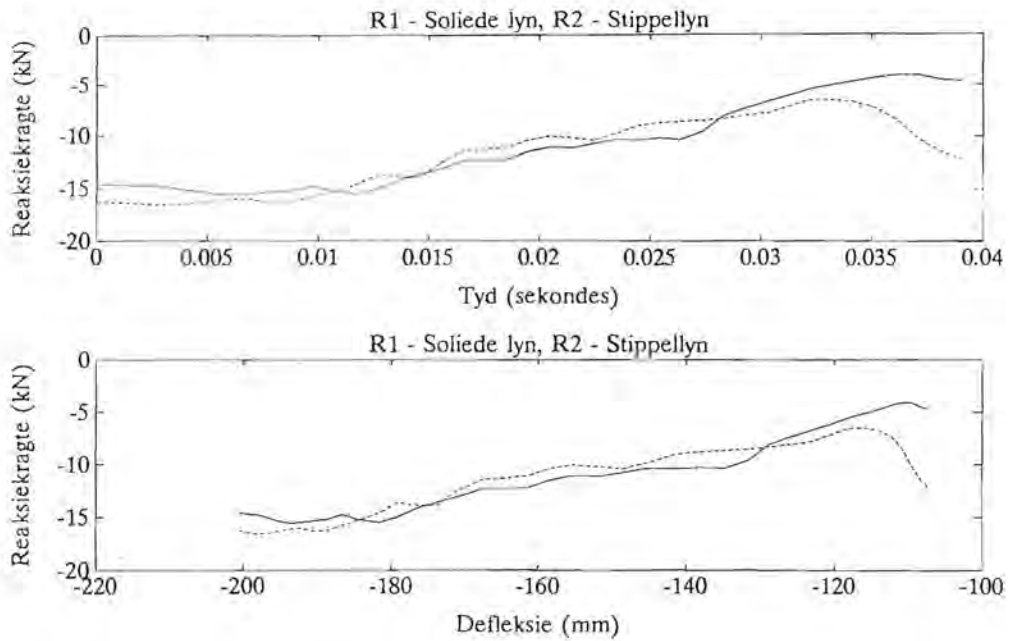


**Figuur C44** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 48

**C.23**



**Figuur C45** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 49



**Figuur C46** Gemete reaksiëkragte teen tyd en defleksie vir toets 51