HOOFSTUK III.

'n ALGEMENE TOETSINGSGROOTHEID. LIMIETVERDELING ONDER 'n ALGEMENE HIPOTESE H.

3.1. INLEIDING.

Gegee $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ onderling onafhanklike variante $\underline{x}_{ij}$; $j=1,2,\ldots,n_i$; $i=1,2,\ldots,k$ waar $\underline{x}_{ij}$, vir vaste i, afkomstig is uit 'n populasie met kontinue verdelingsfunksie F_i, $i=1,2,\ldots,k$.

Die probleem wat hier beskou word, is om die nulhipotese H_o: $F_1 \equiv F_2 \equiv \ldots \equiv F_k$, naamlik dat alle verdelingsfunksies F_i, $i=1,2,\ldots,k$, identies is, te toets teen 'n alternatiewe hipotese aangedui deur H_a, naamlik dat nie alle verdelingsfunksies identies is nie.

Die N waarnemings $\underline{x}_{ij}$ [1] is spr 0 [2] almal verskillend [3] omdat F_i kontinu veronderstel word.

In hierdie hoofstuk word 'n algemene toets vir bogenoemde probleem behandel en sy asimptotiese eienskappe ondersoek.

3.2. DIE TOETSINGSGROOTHEID S_N.

Laat

(3.1) $\nu_{Ni} = n_i N^{-1}$, dan is $\sum_i \nu_{Ni} = 1$.

Laat verder

(3.2) $\nu_i = \lim_{N\to\infty} \nu_{Ni}$ en neem aan dat

---

1). Tensy anders gespesifiseer, deurloop i, i', i'', g en g' in hierdie hoofstuk die waardes $1,2,\ldots,k$; j, j' die waardes $1,2,\ldots,n_i$ en h die waardes $1,2,\ldots,N$.

2). Sien hoofstuk II voetnoot 8.

3). Op die geval van moontlike eventuele gelyke waarnemings word in hierdie hoofstuk nie ingegaan nie.

(3.3) $0<\nu_o \leq \nu_{Ni} \leq 1-\nu_o < 1$ vir alle N, vir alle $i=1,2,\ldots,k$ en vir 'n vaste getal $\nu_o \leq \frac{1}{2}$.

Dan geld ook

(3.4) $0<\nu_o \leq \nu_i \leq 1-\nu_o < 1$ vir alle i.

Stel

(3.5) $F_{in_i}(x)$ = (aantal $x_{ij} \leq x)/n_i$ vir vaste $i; j=1,2,..,n_i$.

$F_{in_i}(x)$ is dus die empiriese verdelingsfunksie van die i^{de} stel variante $x_{i1}, x_{i2},\ldots,x_{in_i}$, d.i. van die i^{de} steekproef.

Definieer

(3.6) $H_N(x) = \sum_i \nu_{Ni} F_{in_i}(x)$, d.i. die gekombineerde empiriese verdelingsfunksie.

Laat

(3.7) $H(x) = \sum_i \nu_{Ni} F_i(x)$, die gekombineerde populasie verdelingsfunksie vir die gegewe steekproefgroottes.

Beskou die grootheid

(3.8) $S_N = \sum_i c_i n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} E_{Nij}$ waar die E_{Nij} gegewe getalle is en die c_i willekeurige eindige konstantes, nie almal nul nie.

Neem die volgende vorm van die definisie, naamlik:

(3.9) $S_N = \sum_i c_i \int_{-\infty}^{\infty} J_N[H_N(x)]dF_{in_i}(x)$

waar J_N 'n willekeurige funksie is wat voldoen aan die volgende voorwaardes:

(3.10) $J(H) = \lim_{N\to\infty} J_N(H)$ bestaan vir $0<H<1$,

(3.11) $J(H)$ is nie konstant nie [4],

(3.12) $\int_{I_N} [J_N(H_N)-J(H_N)]dF_{in_i} = o_p(N^{-\frac{1}{2}})$, $i=1,2,\ldots,k$,

waar I_N die interval is waarin $0<H_N(x)<1$ en o_p gedefinieer

---

4). Sien ook voorwaarde (3.28) wat 'n verdere beperking lê, naamlik dat $J'(H)$ nie altyd = 0 kan wees oor die oorvleuelingsgebied van die verdelings nie.

is in §1.2.2,

(3.13) $J_N(1) = o(N^{\frac{1}{2}})$ en

(3.14) $|J^{(m)}(H)| = \left|\frac{d^m J}{dH^m}\right| \leq K[H(1-H)]^{-m-\frac{1}{2}+\delta}$ vir m=0,1,2 en

vir 'n $\delta>0$, K 'n eindige positiewe konstante.

Die twee vorms van S_N is identies as

(3.15) $E_{Nij} = J_N[N^{-1} \sum_{i'} \sum_{j'} L(x_{ij}-x_{i'j'})]$

waar

$$L(u) = \begin{cases} 1 & \text{as } u \geq 0 \\ 0 & \text{as } u<0 \end{cases}$$

d.i. as $E_{Nij} = J_N(r_{ij}/N)$

waar r_{ij} die rangnommer van x_{ij} in die gesamentlike rangskikking van die N waardes x_{ij} is.

Laat I die interval wees waarin 0<H<1.

3.3. LIMIETVERDELING VAN S_N ONDER H (SIEN CHERNOFF EN SAVAGE (1958)).

Laat, vir g=1,2,...,k ,

(3.16) $B_g(x) = \int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_g(x)$ en

(3.17) $\widetilde{B}_g(\underline{x}_{ij}) = B_g(\underline{x}_{ij}) - EB_g(\underline{x}_i)$

waar $\underline{x}_i$ 'n variant is met verdelingsfunksie F_i en x_o 'n konstante is, byvoorbeeld so dat $H(x_o) = \frac{1}{2}$.

Definieer verder

(3.18) $\xi_{ij} = \nu_{Ni}^{-1} \sum_g (c_i\nu_{Ng} - c_g\nu_{Ni})\widetilde{B}_g(x_{ij})$ en

(3.19) $\xi_i = \sum_j \xi_{ij}$.

Lemma 3.1. Die verwagtingswaarde van ξ_{ij} word gegee deur

(3.20) $E(\xi_{ij}|H) = 0$.

Bewys: Omdat $E\widetilde{B}_g(x_{ij}) = 0$, is

$$\begin{aligned} E(\xi_{ij}) &= E[\nu_{Ni}^{-1} \sum_g (c_i\nu_{Ng} - c_g\nu_{Ni})\widetilde{B}_g(x_{ij})] \\ &= \nu_{Ni}^{-1} \sum_g (c_i\nu_{Ng} - c_g\nu_{Ni})E\widetilde{B}_g(x_{ij}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Opmerking.

In hierdie hoofstuk werk ons deurgaans, tensy anders gespesifiseer, onder H. $E(\xi_{ij})$ beteken dus $E(\xi_{ij}|H)$.

Lemma 3.2. $\left[\{H_N(x)-H(x)\} \int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_i(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$ met waarskynlikheid een.

Bewys: $\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_i(x) = O\left(\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dH(x)\right)$

$$= O(J[H(x)])$$

$$= O([H(x)\{1-H(x)\}]^{\delta-\frac{1}{2}}) \text{ uit } (3.14).$$

$H_N(x)$ is die empiriese verdelingsfunksie van 'n steekproef uit 'n populasie met verdelingsfunksie $H(x)$. As $z_1 < z_2 < \ldots < z_N$ die gerangskikte steekproefwaardes is, dan is $H_N(x) = 0$ vir $x < z_1$

en $H_N(x) = 1$ vir $x \geq z_N$.

Indien $H(z_1-0) > 0$, geld

$$[H_N(x)-H(x)]\ O([H(x)\{1-H(x)\}]^{\delta-\frac{1}{2}})$$
$$= O([H(x)]^{\delta+\frac{1}{2}}[1-H(x)]^{\delta-\frac{1}{2}})$$
$$\xrightarrow[-\infty]{x} 0.$$

Indien $H(z_N) < 1$, geld

$$[H_N(x)-H(x)]\ O([H(x)\{1-H(x)\}]^{\delta-\frac{1}{2}})$$
$$= O([H(x)]^{\delta-\frac{1}{2}}[1-H(x)]^{\delta+\frac{1}{2}})$$
$$\xrightarrow[+\infty]{x} 0.$$

Aangesien $H(x)$ kontinu is, geld

$H(z_1-0) > 0$ en $H(z_N) < 1$ met waarskynlikheid een vir alle eindige N.

Dus: $\left[\{H_N(x)-H(x)\} \int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_i(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$ met waarskynlikheid een.

Lemma 3.3. Die variansie van $N^{-\frac{1}{2}}\sum_i \xi_i$ word gegee deur:

(3.21) $\mathrm{var}(N^{-\frac{1}{2}}\sum_i \xi_i) = \sum_i \nu_{Ni}^{-1}\sum_{gg'}\sum (c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})\sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$

waar

(3.22) $\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = \int\int_{-\infty<x<y<\infty} F_i(x)[1-F_i(y)]J'[H(x)]J'[H(y)]\cdot$
$\cdot[dF_g(x)dF_{g'}(y) + dF_{g'}(x)dF_g(y)]$.

Bewys: Omdat

(3.20) $E(\xi_{ij}) = 0$, is

(3.23) $\mathrm{var}(\xi_{ij}) = E(\xi_{ij}^2)$

$= E[\nu_{Ni}^{-1}\sum_g(c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})\widetilde{B}_g(x_{ij})\nu_{Ni}^{-1}\sum_{g'}(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij})]$

$= \nu_{Ni}^{-2}\sum_g\sum_{g'}(c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})E\widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij})$.

Verder is

(3.24) $\mathrm{var}(N^{-\frac{1}{2}}\xi_i) = N^{-1}\mathrm{var}(\xi_i)$

$= N^{-1}\mathrm{var}(\sum_j \xi_{ij})$

$= N^{-1}\sum_j \mathrm{var}(\xi_{ij})$ omdat ξ_{ij} en $\xi_{ij'}$ vir $j' \neq j$ onderling onafhanklik is (want x_{ij} en $x_{ij'}$ is onafhanklik)

$= \frac{1}{N}\sum_j \nu_{Ni}^{-2}\sum_g\sum_{g'}(c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})E\widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij})$

$= \nu_{Ni}^{-1}\sum_g\sum_{g'}(c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})E\widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij})$.

Die variante $N^{-\frac{1}{2}}\xi_i$ en $N^{-\frac{1}{2}}\xi_{i'}$ is onderling onafhanklik indien $i' \neq i$. Gevolglik is

(3.25) $\mathrm{var}(\sum_i N^{-\frac{1}{2}}\xi_i) = \sum_i \mathrm{var}(N^{-\frac{1}{2}}\xi_i)$

$= \sum_i \nu_{Ni}^{-1}\sum_g\sum_{g'}(c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})E\widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij})$.

Nou moet $E\widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij})$ nog bereken word.

(3.26) $B_g(x_{ij})-EB_g(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} B_g(x)dF_{i1}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} B_g(x)dF_i(x)$
vir $j=1,2,\ldots,n_i$

$= \int_{-\infty}^{\infty} B_g(x)d[F_{i1}(x)-F_i(x)]$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_g(x)\right\}d[F_{i1}(x)-F_i(x)]$

$$= [\{\int_{x_o}^{x} J'[H(x)]dF_g(x)\}\{F_{i1}(x) - F_i(x)\}]_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} [F_{i1}(x) - F_i(x)]J'[H(x)]dF_g(x)$$ deur parsiële integrasie. M.b.v. lemma 3.2 [5)] volg verder

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} [F_{i1}(x)-F_i(x)]J'[H(x)]dF_g(x)$$ met waarskynlikheid één, sodat

$$(3.27)\quad E\tilde{B}_g(x_{ij})\tilde{B}_{g'}(x_{ij})=E\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[F_{i1}(x)-F_i(x)][F_{i1}(y)-F_i(y)]\cdot \cdot J'[H(x)]J'[H(y)]dF_g(x)dF_{g'}(y)\Big\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[F_{i1}(x)-F_i(x)][F_{i1}(y)-F_i(y)]J'[H(x)]\cdot \cdot J'[H(y)]dF_g(x)dF_{g'}(y)$$

$$= \iint_{-\infty<x<y<\infty} F_i(x)[1-F_i(y)]J'[H(x)]J'[H(y)]dF_g(x)dF_{g'}(y) +$$

$$+ \iint_{-\infty<y<x<\infty} F_i(y)[1-F_i(x)]J'[H(x)]J'[H(y)]dF_g(x)dF_{g'}(y)$$

$$= \sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$$ uit (3.22), want:

Neem byvoorbeeld $x<y$:

As $\underline{x}_i\leq x$, is $F_{i1}(x) = 1$ en $F_{i1}(y) = 1$.

As $x<\underline{x}_i\leq y$, is $F_{i1}(x) = 0$ en $F_{i1}(y) = 1$.

As $\underline{x}_i>y$, is $F_{i1}(x) = 0$ en $F_{i1}(y) = 0$.

$$E[F_{i1}(x)-F_i(x)][F_{i1}(y)-F_i(y)]$$

$$= [1-F_i(x)][1-F_i(y)]P[\underline{x}_i\leq x] - F_i(x)[1-F_i(y)]P[x<\underline{x}_i\leq y] + + F_i(x)F_i(y)P[\underline{x}_i>y]$$

$$= [1-F_i(x)][1-F_i(y)]F_i(x) - F_i(x)[1-F_i(y)][F_i(y)-F_i(x)] + + F_i(x)F_i(y)[1-F_i(y)]$$

$$= [1-F_i(y)]F_i(x).$$

'n Soortgelyke resultaat volg vir $y<x$.

Hiermee is die lemma bewys.

Opmerking.

Met behulp van (3.27) herlei (3.23) tot:

$$(3.23a)\quad var(\xi_{ij})=\nu_{Ni}^{-2}\sum_g\sum_{g'}(c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} .$$

5). Sien vergelykings (3.3), (3.50) en (3.51).

Gevolglik besit t_i en t_i'/n_i asimptoties dieselfde verdeling onder H. Alle resultate ten opsigte van t_i geld dus ook asimptoties vir t_i'/n_i en ons kry uit §3.4 opmerking 3 en (3.59), (3.60), (3.62) en (3.63):

$$E(t_i'/n_i|H) = \int_{-\infty}^{\infty} J[H(x)]dF_i(x) + o(N^{-\frac{1}{2}}).$$

Opmerkings.

1). Onder H_o: $F_1 \equiv F_2 \equiv \ldots \equiv F_k \equiv F$ geld

(3.95) $$E(t_i'/n_i|H_o) = \int_{-\infty}^{\infty} J[F(x)]dF(x) + o(N^{-\frac{1}{2}}).$$

2). Vergelyk

(2.42) $\underset{h}{\text{maks}}(\Psi_{Nh}-\overline{\Psi}_N)^2 = o(N)$, d.w.s. $\underset{h}{\text{maks}}|\Psi_{Nh}| = o(N^{\frac{1}{2}})$,

wat soortgelyk is aan (3.92).

3). Onder voorwaarde (3.93) sal, vir $0<H<1$,

(3.96) $$\lim_{N\to\infty} \Psi_N[NH/(N+1)] = \lim_{N\to\infty} J_N(H)$$
$$= J(H) \quad \text{uit (3.10).}$$

4). Voorwaarde (3.93) lê die verband tussen die toetsingsgroothede van hoofstukke II en III. Ons kon, as alternatiewe prosedure, ook geneem het

$$J_N[H_N(x)] = \Psi_N[NH_N(x)/(N+1)].$$

3.6.2. Toetse vir Verskuiwing.

3.6.2.1. 'n Algemene uitdrukking vir die asimptotiese relatiewe doeltreffendheid van een toets met betrekking tot 'n tweede toets.

Beskou die alternatiewe hipotese

(3.97) H_a: $F_i(x) = F(x+d_iN^{-\frac{1}{2}})$ vir $i=1,2,\ldots,k$

waar die d_i 's willekeurige eindige reële getalle is.

Neem aan dat $f(x) = F'(x)$ oral bestaan, kontinu en gelykmatig begrens is.

STELLING 3.7.

Indien

(3.92) $\Psi_N[N/(N+1)] = o(N^{\frac{1}{2}})$,

(3.93) $\int_{I_N} |J_N[H_N(x)] - \Psi_N[NH_N(x)/(N+1)]| dF_{in_i}(x) = o_p(N^{-\frac{1}{2}})$

vir $i=1,2,\ldots,k$ en

(3.98) $|f(x+\delta_i N^{-\frac{1}{2}}) J'[\sum_{i'} \nu_{Ni'} F(x+\delta_{i'} N^{-\frac{1}{2}})]| < M(x)$ vir N voldoende groot en $\int_{-\infty}^{\infty} M(x)dF(x) < \infty$, waar die δ_i 's willekeurige eindige reële getalle is, dan geld

(3.99) $\lim_{N\to\infty} N^{\frac{1}{2}}[E(t_i'/n_i|H_a) - E(t_i'/n_i|H_o)] =$

$$= (d. - d_i) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x) \quad \text{waar}$$

(3.100) $d. = \sum_{i'} \nu_{i'} d_{i'}$.

Bewys: Onder H_a is

(3.101) $F_{i'}(x) = F(x+d_{i'} N^{-\frac{1}{2}})$

$$= F[x+d_i N^{-\frac{1}{2}} + (d_{i'} - d_i)N^{-\frac{1}{2}}]$$

$$= F_i[x+(d_{i'}-d_i)N^{-\frac{1}{2}}] \text{ vir alle } i'$$

$$= F_i(x+\theta_{i'} N^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{waar}$$

(3.102) $\theta_{i'} = d_{i'} - d_i$, $i' = 1,2,\ldots,k$, sodat

(3.103) $H(x) = \sum_{i'} \nu_{Ni'} F_i(x+\theta_{i'} N^{-\frac{1}{2}})$ uit (3.7).

Uit die eerste middelwaardestelling in k veranderlikes geld vir die funksie $G(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$:

(3.104) $G(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k) = G(0,0,\ldots,0) + \sum_{i'} \theta_{i'} \left.\frac{\partial G(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)}{\partial \theta_{i'}}\right|_{\vec{\theta}=\hat{\vec{\theta}}}$

waar $\vec{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ en $|\hat{\theta}_{i'}| < |\theta_{i'}|$ vir alle i' (sien STEWART, C. A. (1940) „Advanced Calculus").

Stel nou

(3.105) $G(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k) = N^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} J[H(x)]dF_i(x)$

$$= N^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} J[\sum_{i'} \nu_{Ni'} F_i(x+\theta_{i'} N^{-\frac{1}{2}})]dF_i(x) \text{ uit (3.103),}$$

dan is:

(3.106) $G(0,0,..,0) = N^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} J[F(x)]dF(x)$

en met behulp van (3.104) volg dan

(3.107) $G(\theta_1,\theta_2,..,\theta_k) - G(0,0,..,0) =$

$$= \sum_{i'} \nu_{Ni'}\, \theta_{i'} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x+\hat{\theta}_{i'}\, N^{-\frac{1}{2}})J'[\sum_{i''}\nu_{Ni''}\, F_i(x+\hat{\theta}_{i''}\, N^{-\frac{1}{2}})]dF_i(x)$$

sodat m.b.v. (3.94), (3.105) en (3.106) volg

$$\lim_{N\to\infty} N^{\frac{1}{2}}[E(t_i'/n_i\,|H_a)-E(t_i'/n_i\,|H_o)]=\sum_{i'}\nu_{i'}\,\theta_{i'} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)$$

$$= (d_{\cdot}-d_i) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x).$$

Die differensiasie m.b.t. die $\theta_{i'}$ onder die integraalteken en die neem van die limiet vir $N\to\infty$ onder die integraalteken, is toelaatbaar onder voorwaarde (3.98) (sien CRAMéR (1946) pp. 66-67, GIBSON (1954) p. 441 stelling III) aangesien $J'[F(x)]$ en $f(x)$ kontinu veronderstel word.

Hiermee is die stelling bewys.

Opmerkings.

1). Voorwaarde (3.98) kan in die volgende vorm omskrywe word, naamlik:

(3.108) $|f(x+cN^{-\frac{1}{2}})J'[\lambda_o F(x+cN^{-\frac{1}{2}})+(1-\lambda_o)F(x+c''N^{-\frac{1}{2}})]| < M(x)$

vir N voldoende groot met $\int_{-\infty}^{\infty} M(x)dF(x) < \infty$ waar $\lambda_o>0$ en die c 's eindige reële getalle is.

2). 'n Voldoende voorwaarde vir die geldigheid van (3.98), is

(3.109) $|f(x+cN^{-\frac{1}{2}})J'[F(x+c'\,N^{-\frac{1}{2}})]| \leq M < \infty$ gelykmatig in x vir N voldoende groot waar c en c' willekeurige eindige reële getalle is.

STELLING 3.8.

Onder die voorwaardes (3.10)-(3.14), (3.92), (3.93) en (3.98) besit

(3.110) $T_k' = \sum_i (N-n_i)[t_i'-E(t_i'\,|H_o)]^2[N\ \mathrm{var}(t_i'\,|H_o)]^{-1}$

onder H_a asimptoties, vir $N\to\infty$, 'n nie-sentrale χ^2-verdeling met (k-1) grade van vryheid en nie-sentraliteitsparameter

$$(3.111)\quad \lambda_k^2 = [\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sum_i \nu_i (d.-d_i)^2 \cdot$$
$$\cdot [\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2]^{-1}.$$

Bewys: Definieer, soos in vergelyking (2.4),

$$(3.112)\quad \hat{t}_i' = (N-n_i)^{\frac{1}{2}}[t_i'-E(t_i'|H_o)][N\ \mathrm{var}(t_i'|H_o)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Beskou ook

$$(3.56)\quad \hat{t}_i = (N-n_i)^{\frac{1}{2}}[t_i-E(t_i|H_a)][N\ \mathrm{var}(t_i|H_a)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Uit stelling 3.6 volg dat die momentematriks van die $\hat{t}_i$'s onder H_a asimptoties gegee word deur $\Lambda = I-\vec{\nu}\vec{\nu}'$ met karakteristieke wortels $1,1,\ldots,1$ en 0 as $N\to\infty$ [9].

Nou is:

$$(3.113)\quad \hat{t}_i' = (N-n_i)^{\frac{1}{2}}[t_i'/n_i-E(t_i'/n_i|H_o)][N\mathrm{var}(t_i'/n_i|H_o)]^{-\frac{1}{2}}$$

uit (3.112)

$$= (N-n_i)^{\frac{1}{2}}[t_i'/n_i-E(t_i'/n_i|H_a)][N\mathrm{var}(t_i'/n_i|H_o)]^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+(N-n_i)^{\frac{1}{2}}[E(t_i'/n_i|H_a)-E(t_i'/n_i|H_o)][N\mathrm{var}(t_i'/n_i|H_o)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \hat{t}_i'' V_{Ni} + E_{Ni}$$ waar

$$(3.114)\quad E_{Ni} = (N-n_i)^{\frac{1}{2}}[E(t_i'/n_i|H_a)-E(t_i'/n_i|H_o)]\cdot$$
$$\cdot[N\mathrm{var}(t_i'/n_i|H_o)]^{-\frac{1}{2}},$$

$$(3.115)\quad \hat{t}_i'' = (N-n_i)^{\frac{1}{2}}[t_i'/n_i-E(t_i'/n_i|H_a)][N\mathrm{var}(t_i'/n_i|H_a)]^{-\frac{1}{2}}$$ en

$$(3.116)\quad V_{Ni} = [\mathrm{var}(t_i'/n_i|H_a)]^{\frac{1}{2}}[\mathrm{var}(t_i'/n_i|H_o)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Hier is

$$(3.117)\quad \lim_{N\to\infty} E_{Ni} = \lim_{N\to\infty}(N-n_i)^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}[E(t_i'/n_i|H_a)-E(t_i'/n_i|H_o)]\cdot$$
$$\cdot[N^2\mathrm{var}(t_i'/n_i|H_o)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \nu_i^{\frac{1}{2}}(d.-d_i)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)\cdot\lim_{N\to\infty}[N^{-1}\sum_h(\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

uit (2.20), (2.21) en (3.99)

$= \text{konstant} < \infty$ m.b.v. (3.98) en (2.41) omdat $F(x)$ kontinu is.

---

9). Onder voorwaarde (3.97) word daar voldoen aan voorwaarde (3.72) vir N voldoende groot.

Nou volg dat (vergelyk onder andere lemma 3.23)

$$\lim_{N\to\infty} P\left[\left\{\frac{N-n_i}{N}\right\}^{\frac{1}{2}}\left|\frac{t_i'/n_i-E(t_i'/n_i\,|H_a)}{[\mathrm{var}(t_i'/n_i\,|H_a)]^{\frac{1}{2}}}-\frac{t_i-E(t_i\,|H_a)}{[\mathrm{var}(t_i\,|H_a)]^{\frac{1}{2}}}\right| > \varepsilon\,|H_a\right] = 0$$

waar $\varepsilon > 0$.

Gevolglik besit $\hat{t}_i$ en $\hat{t}_i''$ asimptoties dieselfde verdeling onder H_a en volg met behulp van (3.113) dat

$$(3.118)\quad \lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\hat{t}_i'\,|H_a) = \lim_{N\to\infty} V_{Ni}^2\ \mathrm{var}(\hat{t}_i\,|H_a).$$

Maar

$$(3.119)\quad \lim_{N\to\infty} V_{Ni}^2 = \lim_{N\to\infty} [\mathrm{var}(t_i'/n_i\,|H_a)][\mathrm{var}(t_i'/n_i\,|H_o)]^{-1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} [\mathrm{var}(t_i\,|H_a)][\mathrm{var}(t_i\,|H_o)]^{-1} \text{ met behulp van lemma 3.23}$$

$$= 1 \text{ uit lemma 3.22 .}$$

Dus

$$(3.120)\quad \lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\hat{t}_i'\,|H_a) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\hat{t}_i\,|H_a)$$

waarby $0 < \lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\hat{t}_i\,|H_a) < \infty$ uit (3.77).

Soortgelyk is

$$(3.121)\quad \lim_{N\to\infty} \mathrm{kov}(\hat{t}_i', \hat{t}_{i'}'\,|H_a) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{kov}(\hat{t}_i, \hat{t}_{i'}\,|H_a).$$

Die momentematriks van die $\hat{t}_i'$'s onder H_a is dus ook asimptoties gelyk aan $\Lambda = I-\vec{\nu}\vec{\nu}'$ met karakteristieke wortels 1,1,...,1 en 0 (lemma 1.2).

Uit (3.113) volg:

$$\sum_i \nu_i^{\frac{1}{2}} E(\hat{t}_i'\,|H_a) = \sum_i \nu_i^{\frac{1}{2}}(N-n_i)^{\frac{1}{2}}[E(t_i'/n_i\,|H_a)-E(t_i'/n_i\,|H_o)]\cdot$$
$$\cdot[N\ \mathrm{var}(t_i'/n_i\,|H_o)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_i \nu_i^{\frac{1}{2}}\ E_{Ni} \quad \text{uit (3.114), sodat}$$

$$(3.122)\quad \lim_{N\to\infty} \sum_i \nu_i^{\frac{1}{2}}\ E(\hat{t}_i'\,|H_a) = \sum_i \nu_i^{\frac{1}{2}} \lim_{N\to\infty} E_{Ni}$$

$$= \sum_i \nu_i(d.-d_i) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x) \lim_{N\to\infty} [N^{-1}\sum_h(\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$= 0$ met behulp van (3.100), sodat aan (1.27) voldoen word.

Op analoë wyse as in lemma 3.21 volg dat die $\hat{t}_i'$'s se gesamentlike verdeling onder H_a asimptoties normaal is (vergelyk ook lemma 3.23 met sy bewys).

Uit stelling 1.1 opmerking 1 volg dat $T_k' = \sum_i \hat{t}_i'^2$ asimptoties, vir $N \to \infty$, 'n nie-sentrale χ^2-verdeling besit met (k-1) g.v.v. en nie-sentraliteitsparameter

$$(3.123)\quad \lambda_k^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{k} [E(\hat{t}_i'|H_a)]^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_i \left[\frac{(N-n_i)^{\frac{1}{2}}[E(t_i'|H_a)-E(t_i'|H_o)]}{[N\mathrm{var}(t_i'|H_o)]^{\frac{1}{2}}}\right]^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_i \left[\frac{(N-n_i)[E(t_i'/n_i|H_a)-E(t_i'/n_i|H_o)]^2}{N\mathrm{var}(t_i'/n_i|H_o)}\right]$$

$$= \frac{[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2}{\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2} \text{ uit } (3.117).$$

Opmerkings.

1). Voorwaarde (3.93) lê die verband tussen J_N en Ψ_N.

2). λ_k^2 kan ook in 'n ander vorm geskryf word.

Onder voorwaarde (3.93) kan, soos in lemma 3.23, aangetoon word dat

$$(3.124)\quad \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_N[H_N(x)]dH_N(x) = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h \Psi_N(\delta_h).$$

Indien verder ook geld

$$(3.125)\quad \int_{-\infty}^{\infty} |J_N^2[H_N(x)]-\Psi_N^2[NH_N(x)/(N+1)]|dH_N(x) = o_p(1),$$

dan volg op 'n analoë wyse as in die vorige geval dat

$$(3.126)\quad \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}[J_N[H_N(x)] - \int_{-\infty}^{\infty}J_N[H_N(x)]dH_N(x)]^2 dH_N(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2$$

mits die uitdrukkings almal bestaan en eindig is.

Die nie-sentraliteitsparameter word dan

$$(3.127)\quad \lambda_k^2 = \frac{[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2}{\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\{J_N[H_N(x)]-\int_{-\infty}^{\infty}J_N[H_N(x)]dH_N(x)\}^2 dH_N(x)}$$

STELLING 3.9.

Onder voorwaardes (3.10) - (3.14), (3.92), (3.93) en (3.98) is die asimptotiese relatiewe doeltreffendheid van T_k' met betrekking tot die variansieverhoudingstoets F:

$$(3.128)\quad E_{T_k',F} = [\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sigma_F^2 \lim_{N\to\infty} [\frac{1}{N}\sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2]^{-1}$$

waar

$$(3.129)\quad \sigma_F^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) - [\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)]^2.$$

Bewys: Indien σ_F^2 bestaan en eindig is, besit die F-toets onder H_a ook asimptoties, vir $N\to\infty$, 'n nie-sentrale χ^2-verdeling met (k-1) g.v.v. en nie-sentraliteitsparameter

$$(3.130)\quad \lambda_F^2 = \sigma_F^{-2} \sum_i \nu_i (d.-d_i)^2$$ - sien byvoorbeeld TANG(1938) pp. 136-139.

Die a.r.d. van T_k' m.b.t. F is dan (sien §1.4):

$$(3.131)\quad E_{T_k',F} = \lambda_k^2/\lambda_F^2$$

$$= [\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sigma_F^2 \lim_{N\to\infty} [\frac{1}{N}\sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2]^{-1}$$

$$= \frac{[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sigma_F^2}{\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{J_N[H_N(x)] - \int_{-\infty}^{\infty} J_N[H_N(x)]dH_N(x)\}^2 dH_N(x)} \quad *$$

indien aan voorwaarde (3.125) ook nog voldoen word.

Opmerkings.

1). As aan (3.98) voldoen word behalwe in 'n versameling punte van maat nul m.b.t. F, geld alle voorgaande resultate ook. Dit impliseer dat f(x) nie gelykmatig begrens hoef te wees en J'[F(x)] nie aan voorwaarde (3.14) hoef te voldoen in 'n versameling punte x van maat nul nie. (Vergelyk byvoorbeeld die opmerking hieroor in ANSARI en BRADLEY (1960) p. 1183).

2). Indien J'[F(x)] begrens is vir alle x, word voorwaarde (3.98) onmiddellik bevredig.

---

* Hierdie uitdrukking is onafhanklik van k sodat dieselfde resultaat vir die a.r.d. verkry word as in die geval van twee steekproewe. Sien ook die voetnoot op bladsy 92.

Vervolgens bespreek ons enkele spesiale gevalle van T_k'. In ons verwysings na toetsingsgroothede van hoofstuk II, hou ons in gedagte dat alle $g_\alpha = 1$ met waarskynlikheid een omdat die verdelingsfunksies F_i hier kontinu veronderstel word.

3.6.2.2. $\Psi_N(\delta_{ij}) \equiv \delta_{ij}$ (sien §2.5.2.1).

Hiervoor is

(2.59) $t_i' = \sum_j r_{ij}/(N+1)$ met toetsingsgrootheid

(2.65) $T_W = 12(N+1)N^{-1} \sum_i t_i^2/n_i - 3(N+1)$ indien alle $g_\alpha=1$.

Stel

(3.132) $$J_N(F) = \Psi_N[NF/(N+1)] \text{ vir } 0<F<1$$
$$= NF/(N+1),$$

dan is $J(F) = F$ vir $0<F<1$.

Aan voorwaardes (3.10) - (3.14), (3.92) en (3.93) word voldoen (sien ook CAPON(1961) §5 (F)).

Nou is $$f(x)J'[F(x)] = f(x)\,\frac{dJ[F(x)]}{d\,F(x)}$$
$$= f(x)\,\frac{dF(x)}{dF(x)}$$
$$= f(x).$$

$f(x)$ is 'n funksie waarvoor ons aangeneem het $f(x)\underline{<}K<\infty$ (sien §3.6.2.1). Daar word dus voldoen aan voorwaarde (3.98) - sien stelling 3.7 opmerking 2.

Verder is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx \quad \text{en}$$

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_h(\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{N-1}{12(N+1)} \quad \text{m.b.v. (2.61)}$$
$$= \frac{1}{12}\;.$$

Die nie-sentraliteitsparameter van (3.123) herlei na:

(3.133) $\lambda_W^2 = 12[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2.$

Die a.r.d. van T_W m.b.t. F is dus

(3.134) $E_{T_W,F} = 12\sigma_F^2[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx]^2$ m.b.v. (3.130) en (3.131).

Opmerkings.

1). $E_{T_W,F}$ is dieselfde as die a.r.d. van WILCOXON(1945) se toetsingsgrootheid m.b.t. die t-toets in die twee-steekproef geval - sien HODGES en LEHMANN(1956).

2). Vir die normaalverdeling is $E_{T_W,F} = 3/\pi$.

Vir die homogene verdeling is $E_{T_W,F} = 1$.

HODGES en LEHMANN(1956) het bewys dat $E_{T_W,F}$ sy minimum-waarde van 0.864 bereik vir die verdeling met

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{5}(5-x^2)/20 & \text{vir } x^2 \leq 5 \\ 0 & \text{vir } x^2 > 5 \text{ .} \end{cases}$$

3). CHACKO(1963) het vir die k-steekproef geval die uitdrukking in (3.134) gevind vir die meer beperkende geval dat alle $n_i = n$.

3.6.2.3. $\Psi_N(\delta_{ij}) \equiv \Xi_{r_{ij}} \equiv E(\xi_{r_{ij}})$ - sien §2.5.2.2.

In hierdie geval is

(2.68) $t_i' = \sum_j \Xi_{r_{ij}}$ met toetsingsgrootheid T_T gegee in (2.71) waarby alle $g_\alpha=1$ (sien die slot van §3.6.2.1 m.b.t. die kontinuïteit van die F_i en die feit dat alle $g_\alpha=1$).

Volgens CHERNOFF en SAVAGE(1958) §5 is J gelyk aan J_0, die inverse funksie van die normaal (0,1) verdelingsfunksie Φ. Vergelyk ook CAPON(1961) §5 (B). Gevolglik geld: $u = \Phi[J(u)]$ sodat

$1 = \phi[J(u)]J'(u)$ deur differensiasie na u

waarby $\phi(u)$ die frekwensiefunksie van die normaal (0,1) - verdeling is.

Dus

(3.135) $J'(u) = 1/\emptyset[J(u)]$.

Uit lemma 3.12 volg dat voorwaardes (3.10) - (3.13) bevredig word indien (3.14) geld. Volgens CAPON(1961) §5 word ook aan (3.14) voldoen. Ook voorwaardes (3.92) en (3.93) word bevredig (m.b.v. C+S(1958) §4 en §6 en vergelyking (3.12)).

Omdat daar met waarskynlikheid een geen knope voorkom nie, volg m.b.v. STOKER(1955) p. 55 dat

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2 &= \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h \Xi_h^2 \\ &= E(\xi^2) \\ &= \text{var}(\xi) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Vir enige willekeurige verdelingsfunksie F (waarvoor aan (3.98) voldoen word) geld nou uit (3.123) dat

$$(3.136)\quad \lambda_T^2 = [\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\emptyset[J\{F(x)\}]} dF(x)\right]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2.$$

Die a.r.d. van TERRY(1952) se toets m.b.t. die F-toets word gegee deur

$$(3.137)\quad E_{T_T,F} = \sigma_F^2[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)J'[F(x)]dx]^2$$

$$= \sigma_F^2\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x)}{\emptyset[J\{F(x)\}]} dx\right]^2.$$

Hierdie resultaat is presies dieselfde as dié verkry deur C+S(1958) vir die a.r.d. van die Terrytoets m.b.t. die t-toets in die twee-steekproef geval [10]. *

CHERNOFF en SAVAGE(1958) het bewys dat genoemde uitdrukking groter of gelyk aan een is met gelykheid in

---

10). Let op dat daar 'n drukfout in hulle uitdrukking (5.5) is. Die σ^2 moet in die teller staan en nie in die noemer nie.

geval van die normaalverdeling, sodat ons ook direk kan beweer dat $E_{T_T,F} \geq 1$.

Opmerkings.

1). Die gelykheid $E_{T_T,F} = 1$ in die geval van die normaalverdeling kan maklik aangetoon word, want indien $F(x)$ die normaal (μ,σ^2) - verdelingsfunksie is, volg:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \text{eksp}[-\tfrac{1}{2}(y-\mu)^2/\sigma^2]\, dy$$

$$= \Phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma}) \text{ en frekwensiefunksie}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{eksp}[-\tfrac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2]$$

$$= \tfrac{1}{\sigma}\phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma}) \quad \text{sodat}$$

$$J[F(x)] = \Phi^{-1}[\Phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma})]$$

$$= \tfrac{x-\mu}{\sigma} \text{ en}$$

$$\phi[J\{F(x)\}] = \phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma})$$

$$= \sigma\, f(x) \quad \text{met } \sigma = \sigma_F\, .$$

Ten slotte is:

$$(3.138)\quad \lambda_T^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\sigma_F f(x)}\, dF(x)\right]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2 \text{ uit } (3.136)$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)\right]^2 \sigma_F^{-2} \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2$$

$$= \sigma_F^{-2} \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2$$

$$= \lambda_F^2 \quad \text{sodat}$$

$$(3.139)\quad E_{T_T,F} = 1.$$

2). Met betrekking tot voorwaarde (3.109) ondersoek ons twee gevalle.

a). $F(x) = \Phi(x)$, die normaal (0,1) verdelingsfunksie.

Ons het bewys $J'[F(x)] = 1/\phi[J\{F(x)\}]$ sodat vir z_N, die grootste van die x_{ij}-waardes, geld:

$$f(z_N+cN^{-\frac{1}{2}})J'[F(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})] = \emptyset(z_N+cN^{-\frac{1}{2}})/[\emptyset(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})]$$

omdat $f(x) = \emptyset(x)$

$$= \text{eksp}[-\tfrac{1}{2}(z_N+cN^{-\frac{1}{2}})^2+\tfrac{1}{2}(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})^2]$$

$$= \text{eksp}[O(z_N.N^{-\frac{1}{2}})].$$

Vir die normaalverdeling is $z_N = O[(2\log_e N)^{\frac{1}{2}}]$ volgens CRAMéR(1946) p. 374.

Dus $f(z_N+cN^{-\frac{1}{2}})J'[F(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})] \xrightarrow[\infty]{N} e^0 = 1$ waarmee aangetoon is dat aan (3.109) voldoen word, en dus ook aan (3.98) - sien stelling 3.7 opmerking 2.

b). Neem F(x) die Laplace (dubbel eksponensiaal) verdelingsfunksie met frekwensiefunksie

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\lambda^{-1}\text{eksp}(-|x|/\lambda)\ .$$

Volgens CRAMéR(1946) p. 373 is $z_N = O(\lambda\log_e\tfrac{1}{2}N)$.

Laat $u = \Phi^{-1}[F(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})],\ z_N>0.$

$$\Phi(u) = F(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})$$

$$1-\Phi(u) = 1-F(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})\ .$$

Neem die linkerkant en regterkant afsonderlik.

$$\text{L.K.} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty \text{eksp}(-\tfrac{1}{2}t^2)\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,u^{-1}[\text{eksp}(-\tfrac{1}{2}u^2)][1 + O(u^{-2})].$$

$$\text{R.K.} = \frac{1}{2\lambda}\int_{z_N+c'N^{-\frac{1}{2}}}^\infty \text{eksp}(-t/\lambda)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\lambda}[-\lambda\text{eksp}(-t/\lambda)]_{z_N+c'N^{-\frac{1}{2}}}^\infty$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{eksp}[(-z_N-c'N^{-\frac{1}{2}})/\lambda].$$

Dus $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,u^{-1}[\text{eksp}(-\tfrac{1}{2}u^2)][1 + O(u^{-2})] = \tfrac{1}{2}\text{eksp}[(-z_N-c'N^{-\frac{1}{2}})/\lambda].$

Vir N groot kry ons benaderd

$$u^{-1}\text{eksp}(-\tfrac{1}{2}u^2) = (\pi/2)^{\frac{1}{2}}\text{eksp}(-z_N/\lambda)$$

$$\ln u + \tfrac{1}{2}u^2 = z_N/\lambda - \ln(\pi/2)^{\frac{1}{2}}$$ waar $\ln u \equiv \log_e u$

$$\tfrac{1}{2}u^2\left(1+\frac{\ln u}{\tfrac{1}{2}u^2}\right) = z_N/\lambda - \ln(\pi/2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u\left(1 + \frac{\ln u}{u^2} +\ldots\right)= (2z_N/\lambda - \ln\tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}.$$

As eerste benadering is $u = O(\sqrt{z_N})$. Hiervan maak ons gebruik om te skryf

$$u \doteqdot (2z_N/\lambda - \ln \tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} - \frac{\ln u}{u}$$

$$\doteqdot (2z_N/\lambda - \ln \tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} - O\left(\frac{\ln z_N}{\sqrt{z_N}}\right)$$

$$f(z_N+cN^{-\frac{1}{2}})J'[F(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})] = f(z_N+cN^{-\frac{1}{2}}) / \phi[J\{F(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})\}]$$

uit (3.135)

$$= f(z_N+cN^{-\frac{1}{2}}) / \phi[\Phi^{-1}\{F(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})\}]$$

$$= f(z_N+cN^{-\frac{1}{2}}) / \phi(u)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\lambda^{-1}\text{eksp}[-(z_N+cN^{-\frac{1}{2}})/\lambda]}{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\text{eksp}[-\frac{1}{2}\{(2z_N/\lambda - \ln \frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} - O(z_N^{-\frac{1}{2}} \ln z_N)\}^2]}$$

$$= (\tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}\lambda^{-1}\text{eksp}[-\lambda^{-1}(z_N+cN^{-\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{2}\{(2z_N/\lambda - \ln \tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} - O(z_N^{-\frac{1}{2}}\ln z_N)\}^2]$$

$$= (\tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}\lambda^{-1}\text{eksp}[-\lambda^{-1}(z_N+cN^{-\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{2}\{2z_N/\lambda - \ln \tfrac{\pi}{2} + O(z_N^{-\frac{1}{2}}\ln z_N)^2 - O(\ln z_N)\}]$$

$$= (\tfrac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}\lambda^{-1}\text{eksp}[-z_N/\lambda - cN^{-\frac{1}{2}} + z_N/\lambda - \tfrac{1}{2}\ln \tfrac{\pi}{2} + O(z_N^{-\frac{1}{2}}\ln z_N)^2] \cdot \text{eksp}[-O(\ln z_N)]$$

$$\xrightarrow[\infty]{N} 0$$

waarmee aangetoon is dat (3.109), en dus ook (3.98), bevredig word.

3.6.2.4. $\Psi_N(\delta_{ij}) \equiv Q(\delta_{ij})$ - sien §2.5.2.3.

Hier is

(2.73) $t_i' = \sum_j Q[r_{ij}/(N+1)]$ met toetsingsgrootheid T_Q gegee in (2.76). Stel nou

(3.140) $J_N(H) = \Psi[NH/(N+1)]$ vir $0<H<1$, dan is

$$J(H) = \lim_{N\to\infty} \Psi[NH/(N+1)]$$

$$= \Phi^{-1}(H)$$ waar Φ die normaal (0,1) - verdelingsfunksie is, sodat

(3.135) $J'(u) = 1/\phi[J(u)]$ soos in TERRY(1952) se geval.

Aan alle voorwaardes van stelling 3.9 word voldoen - sien onder andere C+S(1958) §6 B voorbeeld 2.

Uit STOKER(1955) p. 57 volg nou dat

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2 = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h Q^2(\delta_h) = 1 .$$

Vir enige willekeurige toelaatbare verdelingsfunksie F geld nou uit (3.123) dat

$$(3.141)\quad \lambda_Q^2 = [\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\phi[J\{F(x)\}]}\, dF(x)\right]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2$$

wat dieselfde is as λ_T^2 .

Opmerkings.

1). T_T en T_Q is albei, onder dieselfde voorwaardes, asimptoties χ^2 verdeel met (k-1) g.v.v. as $N\to\infty$ en nie-se~~n~~traliteitsparameter

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\phi[J\{F(x)\}]}\, dF(x)\right]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2.$$

Die a.r.d.-eienskappe van T_Q is dus dieselfde as dié van T_T, soos in die twee-steekproef geval - sien C+S(1958) §6 B voorbeeld 2.

2). Die resultate van §3.6.2.3 opmerking 2 geld ook vir hierdie geval.

3). Gestel dat ons met 'n gewysigde Van der Waerden toetsingsgrootheid werk, en wel waar $J = F^{-1}$ 11).

Dan is $u = F[J(u)]$

$$1 = f[J(u)]J'(u)$$

$$J'(u) = 1/f[J(u)] .$$

$$f(x+cN^{-\frac{1}{2}})J'[F(x+c'N^{-\frac{1}{2}})] = f(x+cN^{-\frac{1}{2}})/\, f[F^{-1}\{F(x+c'N^{-\frac{1}{2}})\}]$$
$$= f(x+cN^{-\frac{1}{2}})/\, f(x+c'N^{-\frac{1}{2}}) .$$

Neem F die Laplace-verdelingsfunksie, dan is volgens CRAMéR(1946) p. 373 $z_N = O(\lambda \log_e \frac{N}{2})$ sodat

$$f(z_N+cN^{-\frac{1}{2}})J'[F(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})] = K\ \mathrm{eksp}[-(z_N+cN^{-\frac{1}{2}})/\lambda+(z_N+c'N^{-\frac{1}{2}})/\lambda]$$
$$= K\ \mathrm{eksp}[O(N^{-\frac{1}{2}})]$$
$$\xrightarrow[\infty]{N} K < \infty.$$

---

11). Hierdie F moet voldoen aan (3.10) - (3.14) en (3.93).

Ook in hierdie geval word aan voorwaarde (3.109), en dus ook aan (3.98), voldoen.

4). HODGES en LEHMANN(1961) het vir die twee-steekproef geval die a.r.d. van Wilcoxon se toets m.b.t. Van der Waerden se toets [$E_{W,Q}(F)$] bereken vir verskillende verdelingsfunksies F. Hulle het bevind dat

$$E_{W,Q}(F) \leq 6/\pi \ .$$

3.6.3. Toetse vir Verskil in Verspreiding.

3.6.3.1. 'n Algemene uitdrukking vir die asimptotiese relatiewe doeltreffendheid van een toets m.b.t. 'n tweede toets.

Beskou die alternatiewe hipotese

(3.142) H_a: $F_i(x) = F[x(1+d_i N^{-\frac{1}{2}})]$ met

$\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_i(x) = 0, \ i=1,2,\ldots,k$ 12) waar die d_i 's willekeurige eindige reële getalle is.

Om slegs verspreidingseffekte te toets (en nie ook verskuiwingseffekte nie), moet alle verdelings gelyke mediane of gemiddeldes besit, of alle waarnemings moet om 'n lokaliteitsparameter gereduseer word. Die probleem in hierdie geval is egter dat die populasie-parameters meestal onbekend is - sien byvoorbeeld §5.3.1, SUKHATME(1958), ANSARI en BRADLEY(1960) §9 en CROUSE(1960) §4.12 .

Neem aan dat $f(x) = F'(x)$ orals bestaan en kontinu is en dat f(x) gelykmatig begrens is.

---

12). CROUSE(1960) werk met die alternatiewe hipotese

$$F_i(x) = F[(x-\mu)(1+d_i N^{-\frac{1}{2}})]$$

waar $\mu = \int x \, dF_i(x)$, $i=1,2,\ldots,k$.

STELLING 3.10.

Indien

(3.92) $\Psi_N[N/(N+1)] = o(N^{\frac{1}{2}})$,

(3.93) $\int_{I_N} |J_N[H_N(x)]-\Psi_N[NH_N(x)/(N+1)]|dF_{in_i}(x) = o_p(N^{-\frac{1}{2}})$,

$i=1,2,\ldots,k$ en

(3.143) $|f(x+\delta_i xN^{-\frac{1}{2}})J'[\sum_{i'}\nu_{Ni'} F(x+\delta_{i'} xN^{-\frac{1}{2}})]| < M(x)$ vir

N voldoende groot en $\int_{-\infty}^{\infty} x\, M(x)\, dF(x) < \infty$ waar die δ_i 's

willekeurige eindige reële getalle is,

dan geld

(3.144) $$\lim_{N\to\infty} N^{\frac{1}{2}}[E(t_i'/n_i|H_a) - E(t_i'/n_i|H_o)] =$$

$$= (d.-d_i) \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x).$$

Bewys: Onder H_a is

(3.145) $$F_{i'}(x) = F(x+d_{i'} xN^{-\frac{1}{2}})$$

$$= F[x+d_i xN^{-\frac{1}{2}}+(d_{i'}-d_i)xN^{-\frac{1}{2}}]$$

$$= F_i(x+\theta_{i'} xN^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{waar}$$

(3.102) $\theta_{i'} = d_{i'}-d_i$, $i' =1,2,\ldots,k$, sodat

(3.146) $H(x) = \sum_{i'}\nu_{Ni'} F_i(x+\theta_{i'} xN^{-\frac{1}{2}})$ uit (3.7).

Stel nou

(3.147) $$G(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k) = N^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} J[H(x)]dF_i(x)$$

$$= N^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} J[\sum_{i'}\nu_{Ni'} F_i(x+\theta_{i'} xN^{-\frac{1}{2}})]dF_i(x) \text{ uit } (3.146),$$

dan is

(3.148) $$G(0,0,\ldots,0) = N^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} J[F(x)]dF(x).$$

Op soortgelyke wyse as in stelling 3.7 volg met behulp van (3.94), (3.104), (3.147) en (3.148) dat

$$\lim_{N\to\infty} N^{\frac{1}{2}}[E(t_i'/n_i|H_a)-E(t_i'/n_i|H_o)] =$$

$$= (d.-d_i) \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x).$$

STELLING 3.1.

Indien voorwaardes (3.10) tot (3.14) geld en

(3.28) $\operatorname{var}(\xi_{ij}) > 0$ vir alle i en j,

dan geld onder H vir vaste F_i en ν_{Ni} $(i=1,2,\ldots,k)$ dat

$$\lim_{N\to\infty} P\left[\frac{S_N - ES_N}{\sigma_{S_N}} \le t\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

waar

(3.29) $\lim_{N\to\infty} ES_N = \sum_i c_i \int_I J(H)dF_i$ en

(3.30) $\lim_{N\to\infty} N\sigma^2_{S_N} = \lim_{N\to\infty} \sum_i \nu_{Ni}^{-1} \sum_g \sum_{g'} (c_i\nu_{Ng} - c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'} - c_{g'}\nu_{Ni}) \cdot \sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$.

Bewys: Die bewys gaan aan die hand van 'n aantal hulp-teoremas.

Opmerkings.

1). Stelling 3.1 is 'n uitbreiding van stelling 1 van CHERNOFF en SAVAGE (1958) van twee na k steekproewe. Die bewys geskied op 'n analoë wyse en verskeie resultate van bogenoemde stelling word hier gebruik.

2). Voorwaardes (3.10) tot (3.14) ten opsigte van J is fundamenteel en word deurgaans in hierdie hoofstuk aanvaar (by alle lemmas en stellings).

3). In lemma 3.9 opmerking 1 word aangetoon dat

(3.31) $\lim_{N\to\infty} N\sigma^2_{S_N} > 0$ onder (3.3) en (3.28).

4). Voorwaarde (3.28) vereis dat $\operatorname{var}(\xi_{ij})>0$ vir alle i, waarby

(3.23a) $\operatorname{var}(\xi_{ij}) = \nu_{Ni}^{-2} \sum_g \sum_{g'} (c_i\nu_{Ng} - c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'} - c_{g'}\nu_{Ni})\sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$

en

(3.22) $\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = \iint_{-\infty<x<y<\infty} F_i(x)[1-F_i(y)]J'[H(x)]J'[H(y)] \cdot [dF_g(x)dF_{g'}(y) + dF_{g'}(x)dF_g(y)]$.

Dui nou die frekwensiefunksie van die verdeling met verdelingsfunksie F_g aan deur f_g, aannemende die afgeleides van die F_i $(i=1,2,\ldots,k)$ bestaan. Indien die variasiegebiede van die verdelings met verdelingsfunksies F_g en $F_{g'}$ 'n gemeenskaplike gebied bevat van maat (ten opsigte van beide verdelings) > 0 (m.a.w. nie disjunk is nie), sê ons die frekwensiefunksies f_g en $f_{g'}$ oorvleuel mekaar.

Indien f_i geeneen van f_g of $f_{g'}$ oorvleuel nie, is $\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = 0$.* Indien f_i slegs f_g oorvleuel (en nie ook $f_{g'}$ nie), is $\sigma^2_{B_{gi}} \equiv \sigma_{B_{gi}B_{gi}} > 0$ en $\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = 0$ (selfs indien f_g en $f_{g'}$ mekaar oorvleuel).

Alleen indien f_i sowel f_g as $f_{g'}$ oorvleuel, is $\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} > 0$, $g' \neq g$.

$\mathrm{var}(\xi_{ij}) > 0$ impliseer dus dat daar tenminste een waarde van $g \neq i$ bestaan (L.W. as $g=i$ is die koëffisiënt van $\sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$ in (3.23a) gelyk aan nul en ook as $g'=i$) waarvoor $\sigma^2_{B_{gi}} > 0$. Dit beteken dus dat die frekwensiefunksies f_i en f_g mekaar oorvleuel. Elke frekwensiefunksie f_i moet deur tenminste één ander frekwensiefunksie oorvleuel word ($\mathrm{var}(\xi_{ij})>0$ vir alle $i=1,2,\ldots,k$). Daar kan dus onder voorwaarde (3.28) geen frekwensiefunksies wees wat alleen lê nie.

Sien ook die opmerking na die bewys van stelling 3.3.

Lemma 3.4. S_N kan soos volg opgesplits word:

$$(3.32)\quad S_N = A + B_{1N} + B_{2N} + \sum_{m=1}^{5} C_{mN}$$

waar

$$(3.33)\quad A = \sum_i c_i \int_I J(H)\,dF_i$$

$$(3.34)\quad B_{1N} = \sum_i c_i \int_I J(H)\,d(F_{in_i} - F_i)$$

$$(3.35)\quad B_{2N} = \sum_i c_i \int_I (H_N - H)J'(H)\,dF_i$$

$$(3.36)\quad C_{1N} = \sum_i c_i \int_I (H_N - H)J'(H)\,d(F_{in_i} - F_i)$$

$$(3.37)\quad C_{2N} = \sum_i c_i \int_{I_N} \tfrac{1}{2}(H_N - H)^2 J''[\phi H_N + (1-\phi)H]\,dF_{in_i}, \quad 0<\phi<1$$

---

* Die geval waar die variasiegebied van een verdeling bevat word in die variasiegebied van 'n tweede verdeling sonder dat hulle mekaar oorvleuel, word uitgesluit.

$$(3.38)\quad C_{3N} = -\sum_i c_i \int_{H_N=1} [J(H)+(H_N-H)J'(H)]dF_{in_i}$$

$$(3.39)\quad C_{4N} = \sum_i c_i \int_{I_N} [J_N(H_N)-J(H_N)]dF_{in_i}$$

$$(3.40)\quad C_{5N} = \sum_i c_i \int_{H_N=1} J_N(H_N)dF_{in_i} .$$

Bewys: $S_N = \sum_i c_i \int_{-\infty}^{\infty} J_N[H_N(x)]dF_{in_i}(x)$

$$= \sum_i c_i \int_{I_N} [J_N(H_N)-J(H_N)]dF_{in_i} + \sum_i c_i \int_{I_N} J(H_N)dF_{in_i} + \sum_i c_i \int_{H_N=1} J_N(H_N)dF_{in_i}$$

$$= C_{4N} + \sum_i c_i \int_{I_N} \left\{J(H)+(H_N-H)J'(H)+\tfrac{1}{2}(H_N-H)^2J''[\emptyset H_N+(1-\emptyset)H]\right\}dF_{in_i} + C_{5N} \quad \text{met } 0<\emptyset<1$$

$$= C_{4N} + \sum_i c_i \int_{0<H<1} [J(H)+(H_N-H)J'(H)]d(F_{in_i}-F_i+F_i) -$$

$$-\sum_i c_i \int_{H_N=1} [J(H)+(H_N-H)J'(H)]dF_{in_i} +$$

$$+\sum_i c_i \int_{I_N} \tfrac{1}{2}(H_N-H)^2J''[\emptyset H_N+(1-\emptyset)H]dF_{in_i} + C_{5N}$$

$$= C_{4N} + \sum_i c_i \int_{0<H<1} J(H)dF_i + \underline{\sum_i c_i \int_{0<H<1} J(H)d(F_{in_i}-F_i)} +$$

$$+\underline{\sum_i c_i \int_{0<H<1}} (H_N-H)J'(H)dF_i + \sum_i c_i \int_{0<H<1} (H_N-H)J'(H)d(F_{in_i}-F_i) +$$

$$+ C_{3N} + C_{2N} + C_{5N}$$

$$= C_{4N}+A+B_{1N}+B_{2N}+C_{1N}+C_{3N}+C_{2N}+C_{5N} .$$

Opmerking.

Die A-, B- en C-terme stel die „konstante", „eerste orde stogastiese" en „tweede orde stogastiese" terme van S_N voor.

Lemma 3.5. Die term A is eindig.

Bewys: $A = \sum_i c_i \int_I J(H)dF_i$ uit (3.33).

Uit (3.7) volg dat $F_i(x) \leq \nu_{Ni}^{-1}H(x)$ – sien vergelyking (3.50) – sodat:

$$(3.41)\quad \left|\int_{-\infty}^{\infty} J[H(x)]dF_i(x)\right| \leq K \int_0^1 [H(1-H)]^{\delta-\frac{1}{2}} dH \text{ uit } (3.3) \text{ en } (3.14)$$

$$= K\, B(\delta+\tfrac{1}{2}, \delta+\tfrac{1}{2}) \quad ^{6)}$$

$$= K' < \infty.$$

Omdat die c_i's eindig is en die sommasie oor 'n eindige aantal terme gaan, volg uit bostaande dat A bestaan en eindig is.

Lemma 3.6. Vir I: $0<H<1$ geld

$$(3.42)\quad \int_I \left[\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dH(x)\right] d[F_{in_i}(x)-F_i(x)]$$

$$= \int_I J[H(x)]d[F_{in_i}(x)-F_i(x)].$$

Bewys: $\int_I \left[\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dH(x)\right] d[F_{in_i}(x) - F_i(x)]$

$$= \int_I J[H(x)]d[F_{in_i}(x) - F_i(x)]$$

$$-J[H(x_0)]\int_I d[F_{in_i}(x) - F_i(x)]$$

$$= \int_I J(H)d(F_{in_i} - F_i).$$

Lemma 3.7. Vir $\xi_{ij} = \nu_{Ni}^{-1} \sum_g (c_i\nu_{Ng} - c_g\nu_{Ni})\widetilde{B}_g(x_{ij})$ geld onder voorwaarde (3.28):

$$(3.43)\quad 0 < \operatorname{var}(\xi_{ij}) < \infty.$$

Bewys: Uit (3.22) volg

$$\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = \iint_{-\infty<x<y<\infty} F_i(x)[1-F_i(y)]J'[H(x)]J'[H(y)] \cdot [dF_g(x)dF_{g'}(y) + dF_{g'}(x)dF_g(y)]$$

$$\leq 2K \iint_{-\infty<x<y<\infty} H(x)[1-H(y)]J'[H(x)]J'[H(y)]dH(x)dH(y)$$

(sien (3.52) en (3.53)), sodat m.b.v. (3.14) volg:

$\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} < \infty$ vir alle g, g' en i (vergelyk CHERNOFF en SAVAGE(1958) p. 989).

---

6). B dui die gewone betafunksie aan en die K 's konstante getalle.

Uit (3.3) en (3.23a) volg dus dat

(3.44) $\mathrm{var}(\xi_{ij}) < \infty$.

Die resultaat volg m.b.v. (3.28).

STELLING 3.2.

Indien

(3.28) $\mathrm{var}(\xi_{ij}) > 0$ vir alle i en j,

dan is $\sqrt{N}(B_{1N} + B_{2N})$ onder H asimptoties ormaal verdeel indien $N \to \infty$.

Bewys: Uit (3.34) en (3.35) volg

(3.45) $B_{1N}+B_{2N} = \sum_i c_i \int_I J(H)d(F_{in_i} - F_i) + \sum_i c_i \int_I (H_N - H)J'(H)dF_i$

$$= \sum_i c_i \int_I [\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dH(x)]d[F_{in_i}(x) - F_i(x)] +$$

$$+ \sum_i c_i [\{H_N(x) - H(x)\} \int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_i(x)]_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- \sum_i c_i \int_I [\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_i(x)]d[H_N(x) - H(x)]$$ deur parsiële integrasie en m.b.v. lemma 3.6. Uit lemma 3.2 en vergelykings (3.6) en (3.7) volg verder met waarskynlikheid een

$$= \sum_i c_i \int_I [\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]d\sum_g \nu_{Ng} F_g(x)]d[F_{in_i}(x) - F_i(x)] -$$

$$- \sum_i c_i \int_I [\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_i(x)]d[\sum_g \nu_{Ng} F_{gn_g}(x) - \sum_g \nu_{Ng} F_g(x)]$$

$$= \sum_i c_i \sum_g \nu_{Ng} \int_I [\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_g(x)]d[F_{in_i}(x) - F_i(x)] -$$

$$- \sum_i c_i \int_I [\int_{x_0}^{x} J'[H(x)]dF_i(x)] \sum_g \nu_{Ng} d[F_{gn_g}(x) - F_g(x)]$$

want $d(\sum_g \nu_{Ng} F_g) = \sum_g \nu_{Ng} dF_g$

$$= \sum_i c_i \sum_g \nu_{Ng} \int_I B_g(x)d[F_{in_i}(x) - F_i(x)] -$$

$$- \sum_i c_i \sum_g \nu_{Ng} \int_I B_i(x)d[F_{gn_g}(x) - F_g(x)]$$ uit (3.16)

$$= \sum_i c_i \sum_g \nu_{Ng} [\int_I B_g dF_{in_i} - \int_I B_g dF_i - \int_I B_i dF_{gn_g} + \int_I B_i dF_g]$$

$$= \sum_i c_i \sum_g \nu_{Ng}[n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \{B_g(x_{ij})-EB_g(x_i)\}-n_g^{-1} \sum_{j=1}^{n_g} \{B_i(x_{gj})-EB_i(x_g)\}]$$

$$= \sum_i c_i \sum_g \nu_{Ng} n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{B}_g(x_{ij}) - \sum_i c_i \sum_g \nu_{Ng} n_g^{-1} \sum_{j=1}^{n_g} \tilde{B}_i(x_{gj}) \quad \text{uit (3.17)}$$

$$= \sum_i c_i \sum_g \nu_{Ng} n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{B}_g(x_{ij}) - \sum_g c_g \sum_i \nu_{Ni} n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{B}_g(x_{ij}) \ .$$

Omdat die sommasies in die vorige reël onafhanklik vanmekaar is, kan die indekse in die tweede uitdrukking verwissel word. Verder kan eindige sommasies verwissel word, sodat bostaande

$$= \sum_i \sum_g c_i \nu_{Ng} n_i^{-1} \sum_j \tilde{B}_g(x_{ij}) - \sum_i \sum_g c_g \nu_{Ni} n_i^{-1} \sum_j \tilde{B}_g(x_{ij})$$

$$= \sum_i [n_i^{-1} \sum_j \sum_g (c_i \nu_{Ng} - c_g \nu_{Ni}) \tilde{B}_g(x_{ij})]$$

$$= N^{-1} \sum_i \sum_j \xi_{ij} \quad \text{m.b.v. (3.18)}$$

$$= N^{-1} \sum_i \xi_i \quad \text{sodat}$$

(3.46) $\sqrt{N}(B_{1N} + B_{2N}) = N^{-\frac{1}{2}} \sum_i \xi_i$ met waarskynlikheid een.

Vir vaste i is daar n_i onderling onafhanklike, identies verdeelde variante ξ_{ij}, $j=1,2,\ldots,n_i$, elk met eindige positiewe variansie (sien lemma 3.7) soos gegee in (3.23a).

Volgens die sentrale limietstelling (CRAMéR(1946) p. 215) is die som $N^{-\frac{1}{2}}\xi_i = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n_i} \xi_{ij}$ asimptoties normaal verdeel as $n_i \to \infty$ $(0<\nu_0 \leq n_i/N \leq 1-\nu_0<1)$.

Die variante $N^{-\frac{1}{2}}\xi_i$ en $N^{-\frac{1}{2}}\xi_{i'}$ is onderling onafhanklik indien $i' \neq i$. Omdat elk van die k variante $N^{-\frac{1}{2}}\xi_i$ asimptoties normaal verdeel is, besit die som $\sqrt{N}(B_{1N}+B_{2N})=N^{-\frac{1}{2}}\sum_i \xi_i$ asimptoties 'n normaalverdeling as $N \to \infty$ [7].

---

7). Voorwaarde (3.3) impliseer dat alle $n_i \to \infty$ as $N \to \infty$.

Lemma 3.8. Die asimptotiese verwagtingswaarde van S_N word gegee deur

$$(3.29)\quad \lim_{N\to\infty} E(S_N) = \sum_i c_i \int_I J(H)dF_i \,.$$

Bewys: $E(B_{1N}+B_{2N}) = E(N^{-1} \sum_i \sum_j \xi_{ij})$ uit (3.45)

$$= N^{-1} \sum_i \sum_j E(\xi_{ij})$$

$= 0$ uit (3.20).

Elk van die C-terme $= o_p(N^{-\frac{1}{2}})$ - sien lemma 3.10 .

Gevolglik is $\lim_{N\to\infty} E(S_N) = A$ uit (3.32)

$= \sum_i c_i \int_I J(H)dF_i$ uit (3.33).

Opmerking.

$\lim_{N\to\infty} E(S_N) = A$ is eindig - sien lemma 3.5.

Lemma 3.9. Die asimptotiese waarde van die variansie van $N^{\frac{1}{2}}\underline{S}_N$ word gegee deur:

$$(3.30)\quad \lim_{N\to\infty} N\sigma^2_{S_N} = \lim_{N\to\infty} \sum_i \nu_{Ni}^{-1} \sum_g \sum_{g'} (c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})\cdot \sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$$

waar

$$(3.22)\quad \sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = \iint_{-\infty<x<y<\infty} F_i(x)[1-F_i(y)]J'[H(x)]J'[H(y)]\cdot [dF_g(x)dF_{g'}(y) + dF_{g'}(x)dF_g(y)] \,.$$

Bewys: $\operatorname{var}[\sqrt{N}(B_{1N}+B_{2N})] = \operatorname{var}(N^{-\frac{1}{2}}\sum_i \xi_i)$ uit (3.46)

$= \sum_i \nu_{Ni}^{-1} \sum_g \sum_{g'} (c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})\sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$ uit (3.25) en (3.27).

Omdat A konstant en $N^{\frac{1}{2}}$ x die C-terme asimptoties in waarskynlikheid gelyk is aan nul (sien lemma 3.10), geld:

$$(3.47)\quad \lim_{N\to\infty} N\sigma^2_{S_N} = \lim_{N\to\infty} N\operatorname{var}(B_{1N}+B_{2N})$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_i \nu_{Ni}^{-1} \sum_g \sum_{g'} (c_i\nu_{Ng}-c_g\nu_{Ni})(c_i\nu_{Ng'}-c_{g'}\nu_{Ni})\sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$$

waar $\sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$ gegee is in (3.22).

Opmerkings.

1). Met behulp van (3.23a) volg uit (3.47):

$$(3.48)\quad \lim_{N\to\infty} N\sigma^2_{S_N} = \lim_{N\to\infty} \sum_i \nu_{Ni}\operatorname{var}(\xi_{ij}).$$

Deurdat $0<\nu_o\leq\nu_{Ni}\leq 1-\nu_o<1$ vir alle i, en die sommasie oor 'n eindige aantal terme gaan, volg m.b.v. (3.43) dat

$$(3.49)\quad 0 < \lim_{N\to\infty} N\sigma^2_{S_N} < \infty.$$

2). Stel $k=2$, $c_1=1$, $c_2=0$, $\nu_1=\lambda$, $\nu_2=1-\lambda$, $F_1=F$ en $F_2=G$, dan reduseer $\lim_{N\to\infty} N\sigma^2_{S_N}$ tot:

$$\lim_{N\to\infty} N\sigma^2_{S_N} = (1-\lambda)\sigma^2_{B_{12}} + \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}\sigma^2_{B_{21}} \quad \text{waar}$$

$$\sigma^2_{B_{12}} = 2 \iint_{-\infty<x<y<\infty} G(x)[1-G(y)]J'[H(x)]J'[H(y)]dF(x)dF(y) \quad \text{en}$$

$$\sigma^2_{B_{21}} = 2 \iint_{-\infty<x<y<\infty} F(x)[1-F(y)]J'[H(x)]J'[H(y)]dG(x)dG(y)$$

wat presies dieselfde is as $\lim_{N\to\infty} N\sigma^2_{T_N}$ van CHERNOFF en SAVAGE(1958) [8].

Lemma 3.10. Die C-terme is almal asimptoties in waarskynlikheid van kleiner orde as $N^{-\frac{1}{2}}$.

Bewys: Die volgende resultate word gebruik, naamlik (sien C+S(1958)):

Vir alle waardes van i geld:

$$(3.50)\quad H \geq \nu_{Ni}F_i \geq \nu_o F_i,$$

$$(3.51)\quad 1-F_i \leq (1-H)/\nu_{Ni} \leq (1-H)/\nu_o,$$

$$(3.52)\quad F_i(1-F_i) \leq H(1-H)\nu_{Ni}^{-2} \leq H(1-H)\nu_o^{-2} \quad \text{en}$$

$$(3.53)\quad dH \geq \nu_{Ni}dF_i \geq \nu_o dF_i.$$

Laat (a_N, b_N) die interval $S_{N\varepsilon}$ wees waar

$$(3.54)\quad S_{N\varepsilon} = \left\{x\colon H(1-H) > \eta_\varepsilon\nu_o/N\right\}.$$

η_ε kan, onafhanklik van F_i en ν_{Ni}, so gekies word dat $P[\underline{x}_{ij} \in S_{N\varepsilon},\ j=1,2,\ldots,n_i;\ i=1,2,\ldots,k] \geq 1-\varepsilon$.

Uit vergelykings (3.36) tot (3.40) volg agtereenvolgens:

---

8). Voortaan skryf ons kortweg C+S(1958) in plaas van CHERNOFF en SAVAGE(1958).

$$C_{1N} = \sum_i c_i \int_I (H_N-H)J'(H)d(F_{in_i}-F_i)$$

$$= \sum_i c_i \int_I (\sum_g \nu_{Ng}F_{gn_g} - \sum_g \nu_{Ng}F_g)J'(H)d(F_{in_i}-F_i) \quad \text{m.b.v. (3.6) en (3.7)}$$

$$= \sum_i c_i \int_I \sum_g \nu_{Ng}(F_{gn_g}-F_g)J'(H)d(F_{in_i}-F_i)$$

$$= \sum_i \sum_g c_i \nu_{Ng} \int_I (F_{gn_g}-F_g)J'(H)d(F_{in_i}-F_i)$$

$$= \sum_i c_i \nu_{Ni} \int_I (F_{in_i}-F_i)J'(H)d(F_{in_i}-F_i)$$
$$+ \sum_{i\neq g}\sum c_i \nu_{Ng} \int_I (F_{gn_g}-F_g)J'(H)d(F_{in_i}-F_i)$$

$= o_p(N^{-\frac{1}{2}})$ op analoë wyse as by C+S(1958) se C_{1N}- en C_{2N}-terme.

$$C_{2N} = \sum_i c_i \int_{I_N} \tfrac{1}{2}(H_N-H)^2 J''[\emptyset H_N+(1-\emptyset)H]dF_{in_i}\ , \quad 0<\emptyset<1$$

$= o_p(N^{-\frac{1}{2}})$ netsoos C+S(1958) se C_{3N}-term.

$$-C_{3N} = \sum_i c_i \int_{H_N=1} [J(H)+(H_N-H)J'(H)]dF_{in_i}$$

$= o_p(N^{-\frac{1}{2}})$ soos C+S(1958) se C_{4N}-term.

$$C_{4N} = \sum_i c_i \int_{I_N} [J_N(H_N)-J(H_N)]dF_{in_i}$$

$= o_p(N^{-\frac{1}{2}})$ uit (3.12).

$$C_{5N} = \sum_i c_i \int_{H_N=1} J_N(H_N)dF_{in_i}$$

$= o(N^{\frac{1}{2}})O(N^{-1})$ uit (3.13)

$= o(N^{-\frac{1}{2}})$.

Bewys van stelling 3.1.

Volgens stelling 3.2 is $\sqrt{N}(B_{1N}+B_{2N})$ asimptoties normaal verdeel as $N\to\infty$, en wel met positiewe eindige variansie (lemma 3.9 opmerking 1).

Omdat A eindig is (lemma 3.5) en die C-terme asimptoties in waarskynlikheid van kleiner orde as $N^{-\frac{1}{2}}$ is (lemma 3.10), is $N^{\frac{1}{2}}S_N$ ook asimptoties normaal verdeel met asimptotiese verwagtingswaarde en variansie soos gegee in lemmas 3.8 en 3.9, want $E(B_{1N}+B_{2N}) = 0$.

$[N^{\frac{1}{2}}\underline{S}_N - E(N^{\frac{1}{2}}\underline{S}_N)][\mathrm{var}(N^{\frac{1}{2}}\underline{S}_N)]^{-\frac{1}{2}}$ is dus asimptoties normaal (0,1) verdeel. Gevolglik is

$[S_N - E(S_N)][\mathrm{var}(S_N)]^{-\frac{1}{2}}$ asimptoties normaal (0,1) verdeel as $N \to \infty$.

Hiermee is stelling 3.1 bewys.

Opmerking.

Die bewys kan uitgebrei word na die geval waar die F_i en ν_{Ni} nie vas is nie. Onder die voorwaardes van stelling 3.1 geld die asimptotiese normaliteit gelykmatig met betrekking tot die F_i en ν_{Ni}, $0<\nu_0 \leq \nu_{Ni} \leq 1-\nu_0 <1$.

Die bewys van hierdie bewering gaan analoog aan dié van „Corollary 1" van C+S(1958). Soos in C+S(1958) kan bewys word dat $E|B_i(x)|^{2+\delta} < \infty$ en met behulp van lemma 3.11 hieronder kan verder bewys word dat $E|\xi_{ij}|^{2+\delta} < \infty$.

Lemma 3.11. Indien vir 'n ry funksies $G_g(x)$, $g=1,2,\ldots,k$ geld $E|G_g(x)|^{2+\delta} = O(1)$ vir $\delta>0$ en k eindig, dan volg uit 'n stelling van Taylor (TAYLOR, A. E. (1958) „Introduction to Functional Analysis" p. 16) dat

$$E|\sum_g G_g(x)|^{2+\delta} = O(1).$$

Lemma 3.12. (C+S(1958)): As $J_N(\frac{h}{N})$ die verwagtingswaarde is van die h^{de} waarde in rang van 'n ewekansige steekproef van grootte N uit 'n populasie met verdelingsfunksie die inverse funksie van J en

$$|J^{(m)}(U)| \leq K[U(1-U)]^{-m-\frac{1}{2}+\delta} \quad \text{vir } \delta>0 \text{ en } m=0,1,2, \quad \text{dan is}$$

$$\lim_{N\to\infty} J_N(H) = J(H) \qquad 0<H<1,$$

$$J_N(1) = o(N^{\frac{1}{2}}) \qquad \text{en}$$

$$\int_{I_N} [J_N(H_N) - J(H_N)]dF_{in_i} = o_p(N^{-\frac{1}{2}}).$$

Bewys: Die lemma volg regstreeks uit C+S(1958) se teorema 2.

3.4. DIE TOETSINGSGROOTHEID T_k.

Stel

$$(3.55)\quad t_i = \int_{-\infty}^{\infty} J_N[H_N(x)]dF_{in_i}(x)$$

waarby $F_{in_i}(x)$ en $H_N(x)$ in (3.5) en (3.6) gedefinieer is en J_N 'n willekeurige funksie is wat voldoen aan voorwaardes (3.10) tot (3.14).

Laat

$$(3.56)\quad \hat{t}_i = (N-n_i)^{\frac{1}{2}}[t_i - E(t_i|H)][N\mathrm{var}(t_i|H)]^{-\frac{1}{2}} .$$

Dan definieer ons as toetsingsgrootheid:

$$(3.57)\quad T_k = \sum_{i=1}^{k} \hat{t}_i^2 .$$

Opmerkings.

1). Die groothede t_i, $\hat{t}_i$ en T_k is almal afhanklik van N.

2). Uit (3.9) volg dat $S_N = t_i$ as

$$(3.58)\quad c_{i'} = \begin{cases} 1 \text{ indien } i' = i \\ 0 \text{ indien } i' \neq i \end{cases} .$$

3). t_i kan geskryf word in die vorm

$$(3.59)\quad t_i = A^{(i)} + B_{1N}^{(i)} + B_{2N}^{(i)} + C^{(i)}$$

netsoos S_N. Omdat die $A^{(i)}$-terme in hierdie geval ook konstant en $N^{\frac{1}{2}}$ x die $C^{(i)}$-terme asimptoties in waarskynlikheid gelyk aan nul is (sien byvoorbeeld lemma 3.10), is alleen die $B^{(i)}$-terme van belang by die bepaling van die asimptotiese variansies en kovariansies van die t_i 's.

Uit (3.45) volg m.b.v. (3.58) dat

$$(3.60)\quad B_{1N}^{(i)} + B_{2N}^{(i)} = \sum_g \nu_{Ng}[n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{B}_g(x_{ij}) - n_g^{-1} \sum_{j=1}^{n_g} \tilde{B}_i(x_{gj})]$$

$$= t_i'' \text{, sê.}$$

4). Met behulp van (3.58) volg uit (3.33) dat

$$(3.61)\quad A^{(i)} = \int_I J(H)dF_i .$$

3.5. LIMIETVERDELING VAN T_k ONDER H.

Lemma 3.13. Die verwagtingswaarde van t_i'' word gegee deur

(3.62) $E(t_i'') = 0.$

Bewys: Uit (3.60) volg

$$E(t_i'') = 0 \text{ omdat } E\tilde{B}_g(x_{ij}) = 0 \text{ vir alle } i,\ g \text{ en } j.$$

Lemma 3.14. Die asimptotiese waarde van die verwagtingswaarde van t_i word gegee deur

(3.63) $\lim\limits_{N\to\infty} E(t_i) = \int_I J(H)dF_i < \infty.$

Bewys: Met behulp van (3.58) volg uit (3.29) dat

$$\lim_{N\to\infty} E(t_i) = \int_I J(H)dF_i \quad \text{(sien §3.4 opmerking 1)}$$

$$= K < \infty \text{ soos in lemma 3.5.}$$

Lemma 3.15. Die variansie van t_i'' word gegee deur

(3.64) $N\text{var}(t_i'') = \nu_{Ni}^{-1} \sum\limits_g \sum\limits_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} - 2\sum\limits_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi}B_{ii}} + \sum\limits_g \nu_{Ng}\sigma^2_{B_{ig}}$

en die kovariansie tussen t_i'' en $t_{i'}''$ vir $i' \neq i$ deur

(3.65) $N\text{kov}(t_i'', t_{i'}'') = \sum\limits_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{ig}B_{i'g}} - \sum\limits_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi}B_{i'i}} - \sum\limits_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi'}B_{ii'}}$

waar $\sigma_{B_{gi}B_{g'i}}$ gegee is in (3.22) en $\sigma^2_{B_{ig}} \equiv \sigma_{B_{ig}B_{ig}}$.

Bewys: $N\text{kov}(t_i'', t_{i'}'') = NE(t_i'', t_{i'}'')$ vir $i, i' = 1, 2, \ldots, k$

$$= N\,E\Big\{\Big[\sum_g \nu_{Ng} n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{B}_g(x_{ij}) - \sum_g \nu_{Ng} n_g^{-1} \sum_{j=1}^{n_g} \tilde{B}_i(x_{gj})\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big[\sum_{g'} \nu_{Ng'} n_{i'}^{-1} \sum_{j'=1}^{n_{i'}} \tilde{B}_{g'}(x_{i'j'}) - \sum_{g'} \nu_{Ng'} n_{g'}^{-1} \sum_{j'=1}^{n_{g'}} \tilde{B}_{i'}(x_{g'j'})\Big]\Big\}$$

$$= E\Big[\sum_g \nu_{Ng} n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{B}_g(x_{ij})\, \nu_{Ni'}^{-1} \sum_{g'} \nu_{Ng'} \sum_{j'=1}^{n_{i'}} \tilde{B}_{g'}(x_{i'j'})\Big] \qquad (=A' \text{ sê})$$

$$-E\Big[\sum_g \nu_{Ng} n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{B}_g(x_{ij}) \sum_{g'} \sum_{j'=1}^{n_{g'}} \tilde{B}_{i'}(x_{g'j'})\Big] \qquad (=B' \text{ sê})$$

$$-E\Big[\sum_g \sum_{j=1}^{n_g} \tilde{B}_i(x_{gj}) n_{i'}^{-1} \sum_{g'} \nu_{Ng'} \sum_{j'=1}^{n_{i'}} \tilde{B}_{g'}(x_{i'j'})\Big] \qquad (=C' \text{ sê})$$

$$+E\Big[\sum_g \nu_{Ng} n_g^{-1} \sum_{j=1}^{n_g} \tilde{B}_i(x_{gj}) \sum_{g'} \sum_{j'=1}^{n_{g'}} \tilde{B}_{i'}(x_{g'j'})\Big]\ . \qquad (=D' \text{ sê})$$

Neem die terme afsonderlik.

$$A' = E[\sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\, n_i^{-1}\nu_{Ni'}^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{j'=1}^{n_{i'}} \widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{i'j'})]$$

$= 0$ indien $i' \neq i$ want dan is $\widetilde{B}_g(x_{ij})$ en $\widetilde{B}_{g'}(x_{i'j'})$ onafhanklik vanmekaar en $E\widetilde{B}_g(x_{ij}) = 0$.

Indien $i' = i$, is

$$A' = n_i^{-1}\nu_{Ni}^{-1} \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\, E[\sum_j \widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij}) + \sum_{j \neq j'}\sum \widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij'})]$$

$$= n_i^{-1}\nu_{Ni}^{-1} \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}[\sum_j E\widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij}) + \sum_{j \neq j'}\sum E\widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{g'}(x_{ij'})]$$

$= n_i^{-1}\nu_{Ni}^{-1} \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\, n_i \sigma_{B_{gi}B_{g'i}} + 0$ omdat x_{ij} en $x_{ij'}$ onafhanklik is en met behulp van (3.27)

$$= \nu_{Ni}^{-1} \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\, \sigma_{B_{gi}B_{g'i}} .$$

$B' = - \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng} n_i^{-1}\, E[\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{j'=1}^{n_{g'}} \widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{i'}(x_{g'j'})]$ wat nul is behalwe as $g' = i$ <u>en</u> $j' = j$, in welke geval

$$B' = - \sum_g \nu_{Ng} n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} E\widetilde{B}_g(x_{ij})\widetilde{B}_{i'}(x_{ij})$$

$$= - \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi}B_{i'i}} .$$

Netsoos B', is

$$C' = - \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi'}B_{ii'}} .$$

$D' = \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng} n_g^{-1}\, E[\sum_{j=1}^{n_g} \sum_{j'=1}^{n_{g'}} \widetilde{B}_i(x_{gj})\widetilde{B}_{i'}(x_{g'j'})]$ wat nul is behalwe as $g' = g$ <u>en</u> $j' = j$

$$= \sum_g \nu_{Ng} n_g^{-1} \sum_{j=1}^{n_g} E\widetilde{B}_i(x_{gj})\widetilde{B}_{i'}(x_{gj})$$

$$= \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{ig}B_{i'g}} .$$

Indien $i' = i$, volg dat

$$N\,\mathrm{var}(t_i'') = \nu_{Ni}^{-1} \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\,\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} - 2\sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi}B_{ii}} + \sum_g \nu_{Ng}\sigma^2_{B_{ig}} .$$

Indien $i' \neq i$, volg dat

$$N.\text{kov}(t_i'', t_{i'}'') = \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{ig}B_{i'g}} - \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi}B_{i'i}} - \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi'}B_{ii'}}$$

Hiermee is lemma 3.15 bewys.

Opmerkings.

1). Omdat $A^{(i)}$ konstant en die $C^{(i)}$-terme asimptoties in waarskynlikheid van kleiner orde as $N^{-\frac{1}{2}}$ is, volg:

(3.66) $\lim\limits_{N\to\infty} N \text{ var}(t_i) = \lim\limits_{N\to\infty} N \text{ var}(t_i'')$ en

(3.67) $\lim\limits_{N\to\infty} N \text{ kov}(t_i, t_{i'}) = \lim\limits_{N\to\infty} N \text{ kov}(t_i'', t_{i'}'')$, $i' \neq i$.

2). Substitusie van (3.58) in (3.30) lewer dieselfde uitdrukking vir $\lim\limits_{N\to\infty} N \text{ var}(t_i)$ as dié in (3.64).

3). Met behulp van (3.58) volg uit (3.49) dat

(3.68) $0 < \lim\limits_{N\to\infty} N \text{ var}(t_i) < \infty$. (Sien ook (3.23a) en lemma 3.7).

Lemma 3.16. Die verwagtingswaarde van T_k onder H word gegee deur $E(T_k) = (k-1)$.

Bewys: $E(T_k) = E\left\{\sum\limits_i (N-n_i)[t_i - E(t_i)]^2 [N \text{ var}(t_i)]^{-1}\right\}$

$= \sum\limits_i (1-n_i/N)\ E[t_i - E(t_i)]^2/\text{var}(t_i)$

$= (k-1)$.

Lemma 3.17. Laat

(3.69) $e_i = Nc_i(N-n_i)^{-\frac{1}{2}}[\text{var}(t_i)]^{\frac{1}{2}}$ vir $i=1,2,\ldots,k$,

dan besit

(3.70) $\hat{\underline{S}} = \sum\limits_i e_i \hat{t}_i$

asimptoties 'n normaalverdeling as $N\to\infty$.

Bewys: $[S_N - E(S_N)]/\sigma_{S_N}$ is asimptoties normaal (0,1) verdeel as $N\to\infty$ (stelling 3.1). Gevolglik is $N^{\frac{1}{2}}(S_N - ES_N)$ asimptoties normaal verdeel as $N\to\infty$ omdat

(3.49) $0 < \lim\limits_{N\to\infty} N\sigma^2_{S_N} < \infty$.

Maar uit (3.9) en (3.55) volg

$$(3.71)\quad N^{\frac{1}{2}}(S_N-ES_N) = N^{\frac{1}{2}} \sum_i c_i[t_i-E(t_i)]$$

$$= N^{\frac{1}{2}} \sum_i (N-n_i)^{\frac{1}{2}} N^{-1}[\mathrm{var}(t_i)]^{-\frac{1}{2}} e_i[t_i-E(t_i)]$$

(sien lemma 3.15 opmerking 3)

$$= \sum_i e_i(N-n_i)^{\frac{1}{2}}[t_i-E(t_i)][N\ \mathrm{var}(t_i)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_i e_i \hat{t}_i \quad \text{uit (3.56)}$$

$$= \hat{S}, \quad \text{waarmee die lemma bewys is.}$$

Opmerking.

Deurdat die c_i 's willekeurige eindige getalle is, kan die e_i 's ook beskou word as willekeurige eindige getalle (uit (3.69) en lemma 3.15 opmerking 3).

STELLING 3.3.

Indien

(3.72) Enige twee frekwensiefunksies wat mekaar nie reeds oorvleuel nie, albei deur 'n gemeenskaplike derde frekwensiefunksie oorvleuel word (oorvleuelingsgebiede van maat, m.b.t. elk van die oorvleuelende verdelings, > 0),

dan is die momentematriks M_3 van die variante $N^{\frac{1}{2}}t_i$ onder H asimptoties van rang $(k-1)$ as $N\to\infty$.

Bewys: Die bewys gaan aan die hand van enkele hulpteoremas.

Opmerking.

Onder (3.58) impliseer voorwaarde (3.72) die geldigheid van (3.28).

Lemma 3.18. Stelling 3.3 geld onder H_o .

Bewys: Onder H_o is $\sigma_{B_{gi}B_{g'i'}}$ = konstant, sê $= \sigma^2$, vir alle i, i', g en g'.

Vergelyking (3.64) word dan:

$$N\ \mathrm{var}(t_i'') = \sigma^2(\nu_{Ni}^{-1} - 2 + 1) \text{ omdat } \sum_g \nu_{Ng} = 1$$

$$= \sigma^2(\nu_{Ni}^{-1} - 1)$$

$$= (1-\nu_{Ni})\nu_{Ni}^{-1}\ \sigma^2.$$

Vergelyking (3.65) word:

$N\ \text{kov}(t_i'', t_{i'}'') = \sigma^2(1-1-1) = -\sigma^2.$

Dus:

$$\begin{aligned}\sum_i \nu_{Ni}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') &= \nu_{Ni'}\text{var}(N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') + \sum_{i(\neq i')} \nu_{Ni}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'')\\ &= (1-\nu_{Ni'})\sigma^2 + \sum_{i(\neq i')} \nu_{Ni}(-\sigma^2)\\ &= (1-\sum_i \nu_{Ni})\sigma^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

M_3 is dus hoogstens van rang (k-1).

Vir alle $\nu_{Ni} \geq \nu_0 > 0$ volg onmiddellik dat $\sum_{i(\neq r)} \nu_{Ni}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') \neq 0$ en verder bestaan daar geen getalle a_i sodanig dat

$\sum_{i(\neq r)} a_i\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') = 0$ vir alle i' nie.

Hiermee is lemma 3.18 bewys.

Lemma 3.19. Onder die hipotese H_a, naamlik dat die populasies met verdelingsfunksies F_i nie almal identies is nie, is M_3 asimptoties hoogstens van rang (k-1).

Bewys: Die lemma word bewys deur aan te toon dat die determinant van M_3 asimptoties gelyk is aan nul. Nodig en voldoende hiervoor is dat daar asimptoties 'n lineêre verband tussen die k kolomme van die matriks bestaan, naamlik:

(3.73) $\lim_{N\to\infty} \sum_i n_i\text{kov}(t_i, t_{i'}) = 0$ vir i' =1,2,...,k.

Maar

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} n_i\text{kov}(t_i, t_{i'}) &= \lim_{N\to\infty} \nu_{Ni}N\ \text{kov}(t_i, t_{i'})\\ &= \lim_{N\to\infty} \nu_{Ni}N\ \text{kov}(t_i'', t_{i'}'') \quad \text{uit (3.67)}\\ &= \lim_{N\to\infty} \nu_{Ni}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'').\end{aligned}$$

Nodig en voldoende vir die geldigheid van (3.73) is

(3.74) $\lim_{N\to\infty} \sum_i \nu_{Ni}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'')=0$ vir i' =1,2,...,k.

Met behulp van (3.64) en (3.65) kry ons:

$$\sum_i \nu_{Ni}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') = \nu_{Ni'}\text{var}(N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') + \sum_{i(\neq i')} \nu_{Ni}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'')$$

$$= \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\,\sigma_{B_{gi'}B_{g'i'}} - 2\nu_{Ni'}\sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi'}B_{i'i'}} + \nu_{Ni'}\sum_g \nu_{Ng}\sigma^2_{B_{i'g}} +$$

$$+ \sum_{i(\neq i')}\sum_g \nu_{Ni}\nu_{Ng}\sigma_{B_{ig}B_{i'g}} - \sum_{i(\neq i')}\sum_g \nu_{Ni}\nu_{Ng}\sigma_{B_{gi}B_{i'i}} -$$

$$- \sum_{i(\neq i')}\sum_g \nu_{Ni}\nu_{Ng}\sigma_{B_{gi'}B_{ii'}}$$

$$= \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\,\sigma_{B_{gi'}B_{g'i'}} + \sum_i \sum_g \nu_{Ni}\nu_{Ng}\sigma_{B_{ig}B_{i'g}} -$$

$$- \sum_i \sum_g \nu_{Ni}\nu_{Ng}\sigma_{B_{gi}B_{i'i}} - \sum_i \sum_g \nu_{Ni}\nu_{Ng}\sigma_{B_{gi'}B_{ii'}}$$

$$= \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\,\sigma_{B_{gi'}B_{g'i'}} + \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\,\sigma_{B_{g'g}B_{i'g}} -$$

$$- \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\,\sigma_{B_{gg'}B_{i'g'}} - \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng'}\nu_{Ng}\sigma_{B_{gi'}B_{g'i'}}$$

$$= \sum_g \sum_{g'} \nu_{Ng}\nu_{Ng'}\,(\sigma_{B_{g'g}B_{i'g}} - \sigma_{B_{gg'}B_{i'g'}})$$

$$= 0.$$

Dit geld vir enige waarde van i'.

Aan voorwaarde (3.73) word dus voldoen. Daar bestaan dus asimptoties 'n lineêre verband tussen die k kolomme van die matriks M_3.

Hiermee is lemma 3.19 bewys.

Bewys van stelling 3.3.

In lemma 3.18 is bewys dat M_3 van rang (k-1) is onder H_o en in lemma 3.19 dat M_3 asimptoties hoogstens van rang (k-1) is onder H_a.

Ons bewys nou dat M_3 onder H_a ook asimptoties, vir $N \to \infty$, van rang (k-1) is.

Dui die momentematriks van die variante $N^{\frac{1}{2}}t_i''$ aan deur M_4. Indien die r^{de} ry en kolom van M_4 weggelaat word, ontstaan 'n matriks aangedui deur $M_4^{(r)}$. Ons moet aantoon dat daar geen lineêre verband tussen die kolomme van $M_4^{(r)}$ bestaan nie.

Beskou die i' ^{de} ry. In lemma 3.19 is bewys dat

$$(3.74a)\quad \sum_i \nu_{Ni}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') = 0.$$

Ons wil nou bewys dat

$$(3.75)\quad \sum_{i(\neq r)} a_i\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') \neq 0$$

waar die a_i 's willekeurige koëffisiënte is (nie almal nul nie).

$$\sum_{i(\neq r)} a_i\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') = \sum_{i(\neq r)} (a_i-\nu_{Ni})\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') +$$
$$+\sum_i \nu_{Ni}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') - \nu_{Nr}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'', N^{\frac{1}{2}}t_r'')$$
$$= \sum_{i(\neq r)} (a_i-\nu_{Ni})\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_i'', N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'') - \nu_{Nr}\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'', N^{\frac{1}{2}}t_r'')$$

met behulp van (3.74a).

Uit vergelyking (3.65) volg dat

$$\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'', N^{\frac{1}{2}}t_r'') = \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{i'g}B_{rg}} - \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{i'r}B_{gr}} - \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi'}B_{ri'}} .$$

Hierin word terme soos $\sigma_{B_{i'r}B_{gr}}$, $\sigma_{B_{gi'}B_{ri'}}$ en $\sigma_{B_{i'g}B_{rg}}$ $(g=1,2,\ldots,k)$ bevat wat nie almal in $\sum_{i(\neq r)} (a_i-\nu_{Ni})\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'', N^{\frac{1}{2}}t_i'')$ voorkom nie, waaronder byvoorbeeld $\sigma_{B_{i'r}B_{rr}}$ $(r\neq i')$ en $\sigma^2_{B_{ri'}}$. Aangesien die a_i 's nie funksies van die F_i 's is nie en omdat die indekse in B_{ig} en $B_{i'g}$ van $\sigma_{B_{ig}B_{i'g}}$ (sien vergelykings (3.16), (3.17) en (3.27)) nie verwissel kan word nie, behalwe onder H_0 in welke geval die rang van die matriks M_3 reeds as (k-1) bewys is (lemma 3.18), volg dat

$\sum_{i(\neq r)} a_i\text{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'', N^{\frac{1}{2}}t_i'') \neq 0$ mits nie alle $\sigma_{B_{i'r}B_{gr}}$, $\sigma_{B_{gi'}B_{ri'}}$ en $\sigma_{B_{i'g}B_{rg}}$ vir vaste i' en r nul is nie. Voldoende hiervoor is dat $f_{i'}$ en f_r mekaar oorvleuel, of dat daar tenminste één f_g $(g \neq i', r)$ bestaan wat sowel $f_{i'}$ en f_r oorvleuel. Voorsiening hiervoor word deur voorwaarde (3.72) gemaak.

Daar bestaan dus in die algemeen geen lineêre verband tussen die (k-1) kolomme van $M_4^{(r)}$ nie.

Gevolglik is $|M_4^{(r)}| \neq 0$.

M_4 is dus van rang (k-1).

Omdat $\lim_{N\to\infty} N \operatorname{kov}(t_i, t_{i'}) = \lim_{N\to\infty} N \operatorname{kov}(t_i'', t_{i'}'')$ (sien (3.67)), is M_3 dus asimptoties, vir $N\to\infty$, van rang (k-1).

Hiermee is stelling 3.3 bewys.

Opmerking.

Indien aan voorwaarde (3.72) nie voldoen word nie, verminder die rang van M_3. Word $f_{i'}$ en f_r nie albei deur enige ander frekwensiefunksie f_g gesny nie, dan is alle $\sigma_{B_{i'g}B_{rg}}$, $\sigma_{B_{i'r}B_{gr}}$ en $\sigma_{B_{gi'}B_{ri'}}$ nul, sodat $\nu_{Nr}\operatorname{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'', N^{\frac{1}{2}}t_r'') = 0$. Kies ons $a_i = \nu_{Ni}$ vir alle i, dan is $\sum_{i(\neq r)} a_i \operatorname{kov}(N^{\frac{1}{2}}t_{i'}'', N^{\frac{1}{2}}t_i'') = 0$ en is die rang van M_3 hoogstens (k-2).

STELLING 3.4.

Indien

(3.72) Enige twee frekwensiefunksies wat mekaar nie reeds oorvleuel nie, albei deur 'n gemeenskaplike derde frekwensiefunksie oorvleuel word (oorvleuelingsgebiede van maat, m.b.t. elk van die oorvleuelende verdelings, >0),

dan is die momentematriks M_5 van die variante $\hat{t}_i$ onder H asimptoties van rang (k-1) as $N\to\infty$.

Bewys: Die transformasie van $N^{\frac{1}{2}}t_i$ na $\hat{t}_i$ is lineêr en nie-singulier. Gevolglik is die rang van die matriks M_5 asimptoties dieselfde as dié van matriks M_3, naamlik (k-1) (stelling 3.3).

Lemma 3.20. Onder voorwaardes (3.10) tot (3.14') en (3.28) (of (3.72)) voldoen die variante $\hat{t}_i$ aan die voorwaarde

(3.76) $\lim_{N\to\infty} E|\hat{t}_i|^{2+\delta} < \infty$ vir i=1,2,...,k en $\delta>0$.

Opmèrking.

Voorwaarde (3.14) word hier vervang deur

$$(3.14') \quad \begin{aligned} |J(H)| &\leq K[H(1-H)]^{-\frac{1}{4}+\delta} \\ |J^{(m)}(H)| &\leq K[H(1-H)]^{-m-\frac{1}{2}+\delta}, \quad m=1,2 \quad \text{en } \delta > 0. \end{aligned}$$

In alle verdere verwysings na voorwaarde (3.14) word implisiet bedoel (3.14').

Bewys: Sien bylaag B.

Lemma 3.21. Onder voorwaardes (3.10) tot (3.14) en (3.28) (of (3.72)) is die gesamentlike verdeling van $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \ldots, \hat{t}_k$ asimptoties normaal as $N \to \infty$.

Bewys: Omdat

$$(3.77) \quad \mathrm{var}(\hat{t}_i) = (N-n_i)N^{-1}\mathrm{var}\left\{[t_i - E(t_i)][\mathrm{var}(t_i)]^{-\frac{1}{2}}\right\} \quad \text{(sien (3.68))}$$

$$= 1 - n_i/N \text{ , is}$$

$$(3.78) \quad \lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\hat{t}_i) > 0 \quad \text{m.b.v. (3.4).}$$

Omdat ons verder ook bewys het dat

$$(3.76) \quad \lim_{N\to\infty} E|\hat{t}_i|^{2+\delta} < \infty \text{ vir } i=1,2,\ldots,k \text{ en } \delta>0$$

(lemma 3.20) en dat, vir willekeurige eindige konstantes e_i,

$$(3.70) \quad \hat{S} = \sum_i e_i \hat{t}_i$$

asimptoties normaal verdeel is as $N \to \infty$ (lemma 3.17), volg uit lemma 2.5 dat die gesamentlike verdeling van $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \ldots, \hat{t}_k$ asimptoties 'n normaalverdeling is as $N \to \infty$.

STELLING 3.5.

Onder die voorwaardes (3.10) - (3.14) en (3.72) besit

$$(3.79) \quad T = \sum_i \sum_{i'} \sum_g c_{ig} c_{i'g} \gamma_g \hat{t}_i \hat{t}_{i'}$$

waar die c_{ig} 's en γ_g 's deur M_5 bepaal word (sien lemma 1.1), onder H asimptoties 'n χ^2-verdeling met (k-1) grade van vryheid.

Bewys: Die variante $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \ldots, \hat{t}_k$ met $E(\hat{t}_i) = 0$ vir alle i, momentematriks Λ ($\equiv M_5$) wat asimptoties van rang (k-1) is (stelling 3.4) en karakteristieke wortels $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{k-1}$ en 0 besit asimptoties gesamentlik 'n normaalverdeling (lemma 3.21) met karakteristieke funksie

$e^{-\frac{1}{2}\vec{t}'\Lambda\vec{t}}$ waar $\vec{t}' = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ en $\vec{t}$ die ooreenkomstige kolomvektor.

Uit lemma 1.1 volg dat T asimptoties 'n χ^2-verdeling met (k-1) g.v.v. besit as $N \to \infty$.

Opmerkings.

1). Vir elke spesifieke alternatiewe hipotese is die momentematriks Λ bepaald en kan die karakteristieke wortels bepaal word - sien lemma 1.1 opmerking 3.

2). Die toetsingsgrootheid T is baie algemeen, maar die bepaling van die variansies en kovariansies en uit Λ die karakteristieke wortels $\varkappa_i$ is nie so maklik nie, indien dit wel moontlik is. Aangesien ons slegs in asimptotiese relatiewe doeltreffendheids-alternatiewe belangstel (d.i. alternatiewe hipoteses H_a waarby

(3.80) $H_a \xrightarrow[\infty]{N} H_o$),

is dit voldoende om 'n toetsingsgrootheid soortgelyk aan dié van hoofstuk II te bestudeer (sien (3.57)).

3). 'n Alternatiewe prosedure kan ook gevolg word, naamlik: Enige (k-1) $\hat{t}_i$'s besit asimptoties gesamentlik die nie-singuliere normaalverdeling (vergelyk lemma 3.17 met $c_k = 0 = e_k$ en stelling 3.4). Dui die momentematriks van $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \ldots, \hat{t}_{k-1}$ aan deur $M_{(k)}$ en laat $\vec{t}'_{(k)}$ die ryvektor $(\hat{t}_1, \hat{t}_2, \ldots, \hat{t}_{k-1})$ voorstel met $\vec{t}_{(k)}$ die ooreenkomstige kolomvektor.

Dan besit $\vec{t}'_{(k)} M^{-1}_{(k)} \vec{t}_{(k)}$ asimptoties, vir $N \to \infty$, 'n χ^2-verdeling met (k-1) g.v.v. waar $M^{-1}_{(k)}$ die inverse matriks is van $M_{(k)}$ (sien stelling 1.1 opmerking 2).

STELLING 3.6.

Onder die voorwaardes (3.10) - (3.14) en onder hipoteses H_a van die vorm

(3.81) H_a: $F_i(x) = F(\delta_{iN}x + \varepsilon_{iN})$

waar die δ 's en ε 's willekeurige eindige reële getalle is sodanig dat $\delta_{iN} \xrightarrow[\infty]{N} 1$ en $\varepsilon_{iN} \xrightarrow[\infty]{N} 0$, $i=1,2,\ldots,k$, besit

(3.82) $T_k = \sum_i (N-n_i)[t_i - E(t_i|H_a)]^2[N\ \mathrm{var}(t_i|H_a)]^{-1}$

asimptoties, vir $N\to\infty$, 'n χ^2-verdeling met (k-1) g.v.v.

Bewys: Die momentematriks van die $\hat{t}_i$'s word soos volg verkry indien $N\to\infty$:

Uit (3.64) en (3.66) volg

$$\lim_{N\to\infty} N\mathrm{var}(t_i|H_a) = \lim_{N\to\infty}[\nu_{Ni}^{-1}\sum_g\sum_{g'}\nu_{Ng}\nu_{Ng'}\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} - 2\sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi}B_{ii}} + \sum_g \nu_{Ng}\sigma^2_{B_{ig}}]$$

waar

$$(3.22)\quad \sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = \iint_{-\infty<x<y<\infty} F_i(x)[1-F_i(y)]J'[H(x)]J'[H(y)]\cdot[dF_g(x)dF_{g'}(y) + dF_{g'}(x)dF_g(y)]$$

$$= \iint F(\delta_{iN}x+\varepsilon_{iN})[1-F(\delta_{iN}y+\varepsilon_{iN})]J'[\sum_{i'}\nu_{Ni'}F(\delta_{i'N}x+\varepsilon_{i'N})]\cdot J'[\sum_{i'}\nu_{Ni'}F(\delta_{i'N}y+\varepsilon_{i'N})]\{dF(\delta_{gN}x+\varepsilon_{gN})dF(\delta_{g'N}y+\varepsilon_{g'N}) + dF(\delta_{g'N}x+\varepsilon_{g'N})dF(\delta_{gN}y+\varepsilon_{gN})\}$$ en

omdat J' en F oral kontinu is, volg (sien GIBSON (1954) p.441):

$$(3.83)\quad \lim_{N\to\infty}\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = 2\iint_{-\infty<x<y<\infty} F(x)[1-F(y)]J'[F(x)]J'[F(y)]\cdot dF(x)dF(y)$$

vir alle i, g en g'

$= \sigma^2$ (sê) ($<\infty$ uit lemma 3.7. Sien ook lemma 3.18).

Gevolglik is

$$(3.84)\quad \lim_{N\to\infty} N\ \mathrm{var}(t_i|H_a) = [\nu_i^{-1}\sum_g\sum_{g'}\nu_g\nu_{g'} - 2\sum_g\nu_g + \sum_g\nu_g]\sigma^2$$

$$= [\nu_i^{-1}-1]\sigma^2$$

$$= (1-\nu_i)\nu_i^{-1}\ \sigma^2.$$

Soortgelyk volg:

$$(3.85)\quad \lim_{N\to\infty} N\mathrm{kov}(t_i, t_{i'}) = \lim_{N\to\infty} [\sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{ig}B_{i'g}} - \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi}B_{i'i}} - \sum_g \nu_{Ng}\sigma_{B_{gi'}B_{ii'}}]$$

$$= [\sum_g \nu_g - \sum_g \nu_g - \sum_g \nu_g]\,\sigma^2$$

$$= -\sigma^2.$$

Nou is m.b.v. (3.77)

$$(3.86)\quad \lim_{N\to\infty} \mathrm{var}(\hat{t}_i) = 1-\nu_i \quad \text{en}$$

$$(3.87)\quad \lim_{N\to\infty} \mathrm{kov}(\hat{t}_i, \hat{t}_{i'}) = \lim_{N\to\infty} \frac{[(1-\nu_{Ni})(1-\nu_{Ni'})]^{\frac{1}{2}} N\mathrm{kov}(t_i, t_{i'})}{[N\ \mathrm{var}(t_i)\cdot N\ \mathrm{var}(t_{i'})]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{[(1-\nu_i)(1-\nu_{i'})]^{\frac{1}{2}}(-\sigma^2)}{[(1-\nu_i)\nu_i^{-1}\sigma^2(1-\nu_{i'})\nu_{i'}^{-1}\sigma^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\sqrt{\nu_i \nu_{i'}}\ .$$

In die limiet, as $N\to\infty$, is die momentematriks van die $\hat{t}_i$'s dus

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} 1-\nu_1 & ,-\sqrt{\nu_1\nu_2}, & \ldots, & -\sqrt{\nu_1\nu_k} \\ -\sqrt{\nu_1\nu_2}, & 1-\nu_2 & ,\ldots, & -\sqrt{\nu_2\nu_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\sqrt{\nu_1\nu_k}, & -\sqrt{\nu_2\nu_k}, & \ldots, & 1-\nu_k \end{Bmatrix}$$

$$= I - \vec{\nu}\vec{\nu}'$$

waar I die eenheidsmatriks is en $\vec{\nu}' = (\sqrt{\nu_1}, \sqrt{\nu_2}, \ldots, \sqrt{\nu_k})$.

Omdat $\sum_i \nu_i = 1$ en alle $\nu_i > 0$, volg uit die bewys van lemma 1.2 dat alle karakteristieke wortels van Λ gelyk is aan 1 behalwe één wortel wat 0 is.

Die toetsingsgrootheid T van stelling 3.5 herlei dus m.b.v. (1.13) na:

$$(3.88)\quad T = \sum_{i=1}^{k} \hat{t}_i^2$$

$$= \sum_i (N-n_i)[t_i - E(t_i)]^2 [N\ \mathrm{var}(t_i)]^{-1} \quad \text{m.b.v. (3.56)}$$

$$= T_k.$$

Hiermee is die stelling bewys.

Opmerkings.

1). Voorwaarde (3.81) impliseer die geldigheid van (3.72) vir N voldoende groot.

2). M. L. PURI het in dieselfde rigting gewerk en skynbaar soortgelyke resultate gevind - sien Ann. Math. Stat. (1961), abstract 6, p. 1350. Sover dit aan ons bekend is, is die volledige artikel nog nie gepubliseer nie.*

Lemma 3.22. Vir alternatiewe hipoteses van die vorm

(3.81) H_a: $F_i(x) = F(\delta_{iN}x + \varepsilon_{iN})$ waar $\delta_{iN} \xrightarrow[\infty]{N} 1$ en $\varepsilon_{iN} \xrightarrow[\infty]{N} 0$,

$i=1,2,\ldots,k$, volg dat

$$(3.89) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N \operatorname{var}(t_i | H_a)}{N \operatorname{var}(t_i | H_o)} = 1.$$

Bewys: Soos in stelling 3.6 volg

$$(3.84) \quad \lim_{N\to\infty} N \operatorname{var}(t_i | H_a) = (\nu_i^{-1} - 1)\sigma^2$$

waar

$$(3.83) \quad \sigma^2 = 2 \iint_{-\infty<x<y<\infty} F(x)[1-F(y)]J'[F(x)]J'[F(y)]dF(x)dF(y).$$

Uit

$$(3.22) \quad \sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = \iint_{-\infty<x<y<\infty} F_i(x)[1-F_i(y)]J'[H(x)]J'[H(y)]\cdot \cdot[dF_g(x)dF_{g'}(y) + dF_{g'}(x)dF_g(y)]$$

volg onder H_o dat

$$\sigma_{B_{gi}B_{g'i}} = \sigma^2. \quad \text{Dus}$$

$$(3.90) \quad \lim_{N\to\infty} N \operatorname{var}(t_i | H_o) = [\nu_i^{-1} \sum_g \sum_{g'} \nu_g \nu_{g'} - 2\sum_g \nu_g + \sum_g \nu_g]\sigma^2$$
$$= (\nu_i^{-1} - 1)\sigma^2$$

sodat m.b.v. (3.84) volg

$$(3.89) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N \operatorname{var}(t_i | H_a)}{N \operatorname{var}(t_i | H_o)} = 1.$$

---

* Hierdie artikel het verskyn nadat die proefskrif reeds getik was, nl. in Ann. Math. Stat. 35, Maart 1964, pp. 102-121 Puri beskou slegs verskuiwingsalternatiewe by die a.r.d.-bepaling.

3.6. ASIMPTOTIESE RELATIEWE DOELTREFFENDHEID.

3.6.1. Inleiding.

In hierdie paragraaf word die asimptotiese relatiewe doeltreffendheid (hierna genoem a.r.d.) van enkele spesiale gevalle van T_k met betrekking tot die F-toets of Bartlett se toets vir die homogeniteit van variansies bereken.

Beskou

(3.55) $t_i = \int_{-\infty}^{\infty} J_N[H_N(x)]dF_{in_i}(x)$ en

(3.91) $t_i' = \sum_{j=1}^{n_i} \Psi_N(\delta_{ij})$ soos in (2.1) gedefinieer, waar $\delta_{ij} = r_{ij}/(N+1)$ en r_{ij} die rangnommer is van x_{ij} in die gesamentlike rangskikking van die N waarnemings x_{ij}; $j=1,2,\ldots,n_i$; $i=1,2,\ldots,k$.

Lemma 3.23. Indien

(3.92) $\Psi_N[N/(N+1)] = o(N^{\frac{1}{2}})$ en

(3.93) $\int_{I_N} \left|J_N[H_N(x)]-\Psi_N\left[\frac{NH_N(x)}{N+1}\right]\right| dF_{in_i}(x)=o_p(N^{-\frac{1}{2}})$, $i=1,2,\ldots,k$,

dan is, onder 'n algemene hipotese H,

(3.94) $E(t_i'/n_i\,|H) = \int_{-\infty}^{\infty} J[H(x)]dF_i(x) + o(N^{-\frac{1}{2}})$.

Bewys: Vir $\varepsilon>0$ geld uit die stelling van Tchebycheff:

$$P[\,|N^{\frac{1}{2}}(t_i-t_i'/n_i)|\geq\varepsilon] \leq E[\,|N^{\frac{1}{2}}(t_i-t_i'/n_i)|\,]/\varepsilon$$

$$= \tfrac{1}{\varepsilon}E[N^{\frac{1}{2}}|\int_{-\infty}^{\infty}\left\{J_N[H_N(x)]-\Psi_N[NH_N(x)/(N+1)]\right\}dF_{in_i}(x)\,|]$$

$$\leq \tfrac{1}{\varepsilon}E[N^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}|J_N[H_N(x)]-\Psi_N[NH_N(x)/(N+1)]\,|dF_{in_i}(x)]$$

$$= \tfrac{1}{\varepsilon}E[N^{\frac{1}{2}}\int_{I_N}|J_N[H_N(x)]-\Psi_N[NH_N(x)/(N+1)]\,|dF_{in_i}(x)$$

$$+N^{\frac{1}{2}}\int_{H_N=1}|J_N[H_N(x)]-\Psi_N[NH_N(x)/(N+1)]\,|dF_{in_i}(x)]$$

$$= \tfrac{1}{\varepsilon}E[N^{\frac{1}{2}}o_p(N^{-\frac{1}{2}})+N^{\frac{1}{2}}o(N^{-\frac{1}{2}})]$$ m.b.v. (3.13), (3.92) en (3.93)

$$= o(1).$$

Opmerkings:

1). Voorwaarde (3.143) kan soos volg omskryf word:

(3.149) $|f(x+cxN^{-\frac{1}{2}})J'[\lambda_o F(x+cxN^{-\frac{1}{2}})+(1-\lambda_o)F(x+c''xN^{-\frac{1}{2}})]|<M(x)$

vir N voldoende groot met $\int_{-\infty}^{\infty} x\ M(x)\ dF(x) < \infty$ waar $\lambda_o>0$

en die c 's willekeurige eindige reële getalle is.

2). 'n Voldoende voorwaarde vir die geldigheid van (3.143), is

(3.150) $|f(x+cxN^{-\frac{1}{2}})J'[F(x+c'xN^{-\frac{1}{2}})]| \leq M < \infty$ gelykmatig in x vir N voldoende groot waarby $\int_{-\infty}^{\infty} x\ dF(x) < \infty$ met c en c' willekeurige eindige reële getalle.

STELLING 3.11.

Onder die voorwaardes (3.10) - (3.14), (3.92), (3.93) en (3.143) besit T_k' (sien (3.110)) onder H_a asimptoties, vir $N\to\infty$, 'n nie-sentrale χ^2-verdeling met (k-1) g.v.v. en nie-sentraliteitsparameter

$$(3.151)\quad \lambda_k^2 = [\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2 \cdot [\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2]^{-1}$$

Bewys: Soos in stelling 3.8 volg dat T_k' asimptoties, vir $N\to\infty$, 'n nie-sentrale χ^2-verdeling besit met (k-1) g.v.v. en nie-sentraliteitsparameter

$$(3.152)\quad \lambda_k^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_i \frac{(N-n_i)N[E(t_i'/n_i\,|H_a)-E(t_i'/n_i\,|H_o)]^2}{N^2 var(t_i'/n_i\,|H_o)}$$

uit (3.123)

$$= [\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \lim_{N\to\infty} \sum_i \frac{(N-n_i)(d.-d_i)^2 n_i(N-1)}{N(N-n_i)\sum_h(\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2}$$

uit (2.20), (2.21) en (3.144).

$$= [\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x)]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2 / \lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_h(\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2.$$

Opmerking.

Soos in opmerking 2 na stelling 3.8, kan λ_k^2 onder voorwaarde (3.125) ook nog in 'n ander vorm geskryf word, naamlik

$$(3.153)\quad \lambda_k^2 = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x)\right]^2 \sum_i \nu_i(d_\cdot - d_i)^2}{\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{J_N[H_N(x)] - \int_{-\infty}^{\infty} J_N[H_N(x)]dH_N(x)\right\}^2 dH_N(x)}$$

STELLING 3.12.

Die asimptotiese relatiewe doeltreffendheid van T_k' met betrekking tot Bartlett se toets B vir die homogeniteit van variansies, is

$$(3.154)\quad E_{T_k',B} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x)\right]^2(\beta_2-1)\cdot$$
$$\cdot\left[4 \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2\right]^{-1}$$

waar $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$ en μ_r die r^{de} orde sentrale moment is van die verdeling met verdelingsfunksie $F(x)$.

Bewys: Bartlett se wysiging van die Neyman-Pearson L_1 - toets word gegee deur

$$(3.155)\quad B = N \log_e(N^{-1}\sum_i n_i s_i^2) - \sum_i n_i \log_e s_i^2$$

waar s_i^2 die variansie is van die i^{de} steekproef.

Volgens CROUSE(1960) §4.11 besit B onder H_a asimptoties, vir $N\to\infty$, 'n nie-sentrale χ^2-verdeling met (k-1) g.v.v. en nie-sentraliteitsparameter

$$(3.156)\quad \lambda_B^2 = 4(\beta_2-1)^{-1} \lim_{N\to\infty} \sum_i \nu_{Ni}(d_\cdot - d_i)^2$$
$$= 4(\beta_2-1)^{-1} \sum_i \nu_i(d_\cdot - d_i)^2.$$

Die a.r.d. van T_k' m.b.t. B is dan (sien (3.131)):

$$(3.157)\quad E_{T_k',B} = \lambda_k^2/\lambda_B^2$$
$$= (\beta_2-1)\left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x)\right]^2\cdot$$
$$\cdot\left[4 \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2\right]^{-1} .$$

Definieer χ_α^2 deur $P[\chi^2 \geq \chi_\alpha^2 | H_o] = \alpha$.

Dan is T_k' asimptoties onderskeidend met betrekking tot die klas van hipoteses H waarvoor

(3.186) $\lim\limits_{N \to \infty} P[T_k' \geq \chi_\alpha^2 | H] = 1$ vir elke alternatiewe hipotese H in die klas - sien §1.3 en CROUSE(1960).

3.7.2. 'n Belangrike Stelling.

STELLING 3.13.

Onder voorwaardes (3.10)-(3.14), (3.92) en (3.93) is T_k' asimptoties onderskeidend met betrekking tot alle H waarvoor minstens een $\gamma_i = \infty$ solank net (3.72) geld.

Bewys: Neem eerstens

(3.187) $\lim\limits_{N \to \infty} (E_{ia} - E_{io})/\sigma_{io} = +\infty$ vir enige bepaalde i uit 1,2,...,k.

Dan is

(3.188) $P[T_k' < \chi_\alpha^2] = P[\sum\limits_{i'} \hat{t}_{i'}'^2 < \chi_\alpha^2]$

$\leq P[\hat{t}_i'^2 < \chi_\alpha]$

$= P[|\hat{t}_i'| < \chi_\alpha]$

$= P[|(N-n_i)^{\frac{1}{2}}(t_i'/n_i - E_{io})/(N^{\frac{1}{2}}\sigma_{io})| < \chi_\alpha]$

$= P[|t_i'/n_i - E_{io}| < \chi_\alpha \sigma_{io}(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}]$

$\leq P[\ t_i'/n_i - E_{io} \ < \chi_\alpha \sigma_{io}(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}]$

$= P[(t_i'/n_i - E_{ia})/\sigma_{ia} < \sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}\{\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}\}]$.

Omdat $\lim\limits_{N \to \infty} \chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}$ = konstant $< \infty$ (want $\lim\limits_{N \to \infty} \nu_{Ni} < 1$ uit (3.4)), volg uit (3.187) dat

$\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}$ negatief is vir voldoende groot N, sê vir $N > N_o$.

Derhalwe geld vir $N > N_o$:

(3.189) $P[(t_i'/n_i - E_{ia})/\sigma_{ia} < \sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}\{\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}\}]$

$\leq P[|(t_i'/n_i - E_{ia})/\sigma_{ia}| \geq \sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}|\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}|]$

$= P[(t_i'/n_i - E_{ia})^2/\sigma_{ia}^2 \geq \sigma_{io}^2\sigma_{ia}^{-2}\{\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}\}^2]$

Dui die rangnommer van z_h aan deur r_h $(z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_N)$.

Omdat $r_h/(N+1)$ nie strengstygend in h is nie en die verdelingsfunksie $F(x)$ wel monotoon strengstygend is in x, is 'n aanpassing in die definisie van $J_N[F(x)]$ nodig sodat aan voorwaarde (3.93) voldoen word. Stel naamlik

$$(3.158) \quad J_N[F(x)] = \begin{cases} NF(x)/(N+1) & \text{vir } F(x) < \frac{1}{2} \\ 1-NF(x)/(N+1) & \text{vir } F(x) > \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Dan is

$$J[F(x)] = \begin{cases} F(x) & \text{vir } F(x) < \frac{1}{2} \\ 1-F(x) & \text{vir } F(x) > \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Nou is

$$J'[F(x)] = \begin{cases} 1 & \text{vir } x < x_o \\ -1 & \text{vir } x > x_o \end{cases}$$

waarby $F(x_o) = \frac{1}{2}$ (sien §3.3, net na vergelyking (3.17)). D.w.s. x_o is die onbekende gemeenskaplike mediaan van die verdelings F_i .

Maar in die punt $x = x_o$ bestaan $J'[F(x)]$ nie. Aan voorwaardes (3.10) - (3.14) word voldoen (sien ANSARI en BRADLEY(1960) p. 1183), behalwe aan voorwaarde (3.14) in die punt $x = x_o$. Die bewys slaag egter nog omdat bogenoemde 'n punt van maat nul is. Voorwaardes (3.92) en (3.93) word bevredig. Verder is

$$f(x)\,|J'[F(x)]| = f(x) \leq K < \infty,$$ sodat (3.143) bevredig word (sien stelling 3.10 opmerking 1).

$$(3.159) \quad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x) = -\int_{-\infty}^{x_o} xf(x)dF(x) + \int_{x_o}^{\infty} xf(x)dF(x).$$

Uit (2.80) en (2.90) volg m.b.v. (2.20) dat

$$(3.160) \quad \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh} - \bar{\Psi}_N)^2 = \frac{1}{48} \quad .$$

Substitusie van (3.159) en (3.160) in (3.152) lewer

$$(3.161) \quad \lambda_\delta^2 = 48\Big[\int_{x_o}^{\infty} xf(x)dF(x) - \int_{-\infty}^{x_o} xf(x)dF(x)\Big]^2 \sum_i \nu_i (d.-d_i)^2$$

sodat met behulp van (3.156) en (3.157) volg

$$(3.162)\quad E_{T_\delta,B} = 12(\beta_2-1)\left[\int_{x_0}^{\infty} xf^2(x)dx - \int_{-\infty}^{x_0} xf^2(x)dx\right]^2.$$

Opmerkings.

1). Bostaande uitdrukking is dieselfde as dié verkry deur ANSARI en BRADLEY(1960) vir die twee-steekproef geval en is ook dieselfde as die a.r.d. van SUKHATME(1957) se T-toets m.b.t. die F-toets (in die twee-steekproef geval). Sien ook KLOTZ(1962) vergelyking (3.3).

2). Vir die normaal (0,1)-verdeling is

$$E_{T_\delta,B} = 6/\pi^2 = 0.61$$

Vir die homogene verdeling is $E_{T_\delta,B} = 0.60$.

Vir die Laplace-verdeling met $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ is

$E_{T_\delta,B} = 0.94$ (sien ANSARI en BRADLEY(1960)).

3.6.3.3. $\Psi_N(\delta_{ij}) = (\delta_{ij}-\frac{1}{2})^2$ (gewone toekenning van rangnommers).

Nou is

$$(2.101)\quad t_i' = \sum_j(\delta_{ij}-\tfrac{1}{2})^2$$ met toetsingsgrootheid T_M gegee in (2.109).

Stel $J_N[F(x)] = \Psi_N[NF(x)/(N+1)]$ vir $0<F(x)<1$

$= [NF(x)/(N+1) -\frac{1}{2}]^2.$

Dan is $J[F(x)] = [F(x) - \frac{1}{2}]^2$ met

$$J'[F(x)] = 2[F(x) - \tfrac{1}{2}] = 2F(x) - 1$$ en

$$f(x)J'[F(x)] = f(x)[2F(x) - 1] \leq K < \infty$$ sodat

(3.143) bevredig word. Dit volg maklik dat voorwaardes (3.10) - (3.14), (3.92) en (3.93) bevredig word.

Met behulp van (2.20) volg uit (2.103) dat

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_h(\Psi_{Nh}-\overline{\Psi}_N)^2 = \frac{1}{180} .$$

Uit (3.152) volg nou:

(3.163) $\lambda_M^2 = 180[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)[2F(x)-1]dF(x)]^2 \sum_i \nu_i (d.-d_i)^2$

sodat m.b.v. (3.156) en (3.157) volg:

(3.164) $E_{T_M,B} = 45(\beta_2-1)[2\int_{-\infty}^{\infty} xf^2(x)F(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} xf^2(x)dx]^2.$

Opmerkings.

1). Hierdie uitdrukking is dieselfde as die a.r.d. van MOOD(1954) se toets m.b.t. die F-toets (sien SUKHATME(1957)). Dit is in ooreenstemming met wat ons verwag, want T_M is 'n uitbreiding van MOOD(1954) se toetsingsgrootheid van twee na k steekproewe (sien §2.5.3.2). Sien ook KLOTZ(1962) vergelyking (3.2).

2). Vir die normaal (0,1)-verdeling is

$E_{T_M,B} = \frac{15}{2\pi^2} = 0.76$ (sien MOOD(1954) en DWASS(1956)).

Vir die homogene verdeling is $E_{T_M,B} = 1$.

Vir die verdeling met frekwensiefunksie

$f(x) = \frac{1}{2}(1-\alpha)a^{\alpha-1}|x|^{-\alpha} \qquad -a\leq x\leq a, \ \alpha<1$

is $E_{T_M,B} = 5(1-\alpha)(5-\alpha)^{-1}$ wat na 0 neig as $\alpha\to 1$ (SUKHATME(1957)).

Vir die verdeling met frekwensiefunksie

$f(x) = \frac{(1+x^2)^{-m}}{B(\frac{1}{2},m-\frac{1}{2})}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$

geld $E_{T_M,B} \to\infty$ as $m\to 2.5$ (CROUSE(1960)).

Vir die Laplace-verdeling met $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ is $E_{T_M,B} = 1.08$ (ANSARI en BRADLEY(1960)).

3.6.3.4. $\Psi_N(\delta_{ij}) = (\delta_{ij}-\frac{1}{2})^2$ (rangnommers van weerskante af toegeken).

Hierdie geval stem presies ooreen met die vorige (sien §2.5.3.3 opmerking 2) en word nie verder bespreek nie.

3.6.3.5. $\Psi_N(\delta_{ij}) = \delta_{ij}^2$ (gewone toekenning van rangnommers).

Hier is

(2.121) $t_i' = \sum_j r_{ij}^2/(N+1)^2$ met toetsingsgrootheid T_R gegee in (2.129).

Stel $J_N[F(x)] = [NF(x)/(N+1)]^2$, dan is

$J[F(x)] = F^2(x)$ met

$J'[F(x)] = 2F(x)$ en word alle voorwaardes, soos in §3.6.3.3, bevredig.

Voorwaarde (3.143) word bevredig omdat

$f(x)J'[F(x)] = 2f(x)F(x) \leq K < \infty$.

Uit (2.127) volg: $\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2 = \frac{4}{45}$ sodat

(3.165) $\lambda_R^2 = 45[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)F(x)dF(x)]^2 \sum_i \nu_i(d.-d_i)^2$ uit (3.152).

Uit (3.156) en (3.157) volg:

(3.166) $E_{T_R,B} = \frac{45}{4}(\beta_2-1)[\int_{-\infty}^{\infty} xf^2(x)F(x)dx]^2$.

Opmerkings.

1). Vir die normaal (0,1)-verdeling is

$$E_{T_R,B} = \frac{15}{32\pi^2} = 0.047$$

Vir die homogene verdeling is

$$E_{T_R,B} = \frac{1}{16} = 0.0625 \quad .$$

2). Bostaande toets word eintlik aanbeveel as toets teen verskuiwingsalternatiewe. Die a.r.d. van T_R m.b.t. die F-toets is uit (3.131):

$$E_{T_R,F} = 45[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)F(x)dx]^2\,\sigma_F^2 .$$

Vir die normaal (0,1)-verdeling is

$$E_{T_R,F} = \frac{45}{16\pi} = 0.895 \quad .$$

Vir die homogene verdeling is

$$E_{T_R,F} = \frac{15}{16} = 0.9375 \quad .$$

3.6.3.6. $\Psi_N(\delta_{ij}) = \delta_{ij}^2$ (rangnommers van weerskante af toegeken).

Hier is

(2.130) $t_i' = \sum_j r_{ij}^2/(N+1)^2$ met toetsingsgroothede T_G en T_H gegee in (2.138) en (2.145) namate N ewe of onewe is.

Laat $J_N[F(x)] = \begin{cases} [NF(x)/(N+1)]^2 & \text{vir } F(x) < \frac{1}{2} \\ [1-NF(x)/(N+1)]^2 & \text{vir } F(x) > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Dan is $J[F(x)] = \begin{cases} F^2(x) & \text{vir } F(x) < \frac{1}{2} \\ [1-F(x)]^2 & \text{vir } F(x) > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Stel weer $F(x_o) = \frac{1}{2}$.

Gevolglik is

$$J'[F(x)] = \begin{cases} 2F(x) & \text{vir } x < x_o \\ -2[1-F(x)] & \text{vir } x > x_o \end{cases}.$$

Alle voorwaardes word ook in hierdie geval bevredig.

Uit (2.136) en (2.143) volg

(3.167) $$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2 = \frac{1}{180}$$

(3.168) $$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_o} xf(x)2F(x)dF(x) - \int_{x_o}^{\infty} xf(x)2[1-F(x)]dF(x)$$
$$= 2[\int_{-\infty}^{x_o} xf(x)F(x)dF(x) - \int_{x_o}^{\infty} xf(x)dF(x) + $$
$$+ \int_{x_o}^{\infty} xf(x)F(x)dF(x)]$$
$$= 2[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)F(x)dF(x) - \int_{x_o}^{\infty} xf(x)dF(x)].$$

Met behulp van (3.151) volg nou vir sowel T_G as T_H:

(3.169) $$\lambda_{GH}^2 = 720[\int_{-\infty}^{\infty} xf^2(x)F(x)dx - \int_{x_o}^{\infty} xf^2(x)dx]^2 \sum_i \nu_i(d_.-d_i)^2.$$

Ten slotte volg uit (3.156) en (3.157):

(3.170) $$E_{T_{GH},B} = 180(\beta_2-1)[\int_{-\infty}^{\infty} xf^2(x)F(x)dx - \int_{x_o}^{\infty} xf^2(x)dx]^2 .$$

Opmerking.

Vir die normaal (0,1)-verdeling is

$$E_{T_{GH},B} = \frac{15}{2\pi^2}(\sqrt{3} - 1)^2 = 0.41 .$$

Vir die homogene verdeling is $E_{T_{GH},B} = 0.25$.

3.6.3.7. $\Psi_N(\delta_{ij}) = Q^2(\delta_{ij})$ - sien §2.5.3.6.

In dié geval is

(2.146) $t_i' = \sum_j Q^2(\delta_{ij})$ met toetsingsgrootheid T_{Q_2} gegee in (2.149).

Stel $J_N[F(x)] = [Q\{NF(x)/(N+1)\}]^2$.

Dan is
$$J[F(x)] = [Q\{F(x)\}]^2 = [\Phi^{-1}\{F(x)\}]^2 \quad \text{en}$$

$$(3.171)\quad J'[F(x)] = \frac{d[\Phi^{-1}\{F(x)\}]^2}{dF(x)} = \frac{d[\Phi^{-1}\{F(x)\}]^2}{d\Phi^{-1}[F(x)]} \cdot \frac{d\Phi^{-1}[F(x)]}{dF(x)} = \frac{2\Phi^{-1}[F(x)]}{\phi[\Phi^{-1}\{F(x)\}]}$$
uit (3.135), sodat

$$f(x+cxN^{-\frac{1}{2}})J'[F(x+c'xN^{-\frac{1}{2}})] = f(x+cxN^{-\frac{1}{2}})\frac{2\Phi^{-1}[F(x+c'xN^{-\frac{1}{2}})]}{\phi[\Phi^{-1}\{F(x+c'xN^{-\frac{1}{2}})\}]} .$$

Vir byvoorbeeld die normaal (0,1)-verdeling is

$$f(x+cxN^{-\frac{1}{2}})J'[F(x+c'xN^{-\frac{1}{2}})] = \frac{2\phi(x+cxN^{-\frac{1}{2}})\ (x+c'xN^{-\frac{1}{2}})}{\phi(x+c'xN^{-\frac{1}{2}})} = O(x).$$

Omdat $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\Phi(x) < \infty$, volg dat aan voorwaarde (3.149) voldoen word.

Alle ander voorwaardes word bevredig - sien CROUSE(1960) [14].

Met behulp van (3.171) is

$$(3.172)\quad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)J'[F(x)]dF(x) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xf(x)\Phi^{-1}[F(x)]}{\phi[\Phi^{-1}\{F(x)\}]}\, dF(x).$$

Uit STOKER(1955) p. 57 volg

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h Q_h^r = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^r \, d\Phi(\xi).$$

Dus $\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h Q_h^2 = 1$ - sien §3.6.2.4 - en

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h Q_h^4 = 3.$$

14). Sien H. S. SCHOEMAN (nog onvoltooide proefskrif).

In hierdie geval is

$$(3.173)\quad \lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_h(\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2 = \lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_h \Psi_{Nh}^2 - \lim_{N\to\infty}\bar{\Psi}_N^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_h Q_h^4 - \lim_{N\to\infty}(N^{-1}\sum_h Q_h^2)^2$$

$$= 3 - 1$$

$$= 2\ .$$

Met behulp van (3.172) en (3.173) volg uit (3.151):

$$(3.174)\quad \lambda_{Q_2}^2 = 4\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xf(x)\Phi^{-1}[F(x)]}{\phi[\Phi^{-1}\{F(x)\}]}\,dF(x)\Big]^2 .\ \tfrac{1}{2}\sum_i \nu_i(d_.-d_i)^2$$

sodat ten slotte

$$(3.175)\quad E_{T_{Q_2},B} = \tfrac{1}{2}(\beta_2-1)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xf^2(x)\Phi^{-1}[F(x)]}{\phi[\Phi^{-1}\{F(x)\}]}\,dx\Big]^2 .$$

(Sien byvoorbeeld KLOTZ(1962) vergelyking (3.1)).

Opmerkings.

1). KLOTZ(1962) beweer dat $0 \leq E_{T_{Q_2},B} \leq \infty$. Hy kon egter slegs bewys dat $0.47 \leq E_{T_{Q_2},B} \leq \infty$, waarby $E_{T_{Q_2},B} = 0.47$ vir $F(x) = \Phi(x^{\alpha})$ met $\alpha\to\infty$.

2). Vir die normaal (0,1)-verdeling is

$$E_{T_{Q_2},B} = \tfrac{1}{2}(3-1)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\phi^2(x)x}{\phi(x)}\,dx\Big]^2$$

$$= \Big[\int_{-\infty}^{\infty}x^2\phi(x)\,dx\Big]^2$$

$$= \mu_2^2$$

$= 1$, wat ooreenstem met wat KLOTZ(1962) beweer vir die twee-steekproef geval.

3). Vir 'n vergelyking tussen die toetse van §e 3.6.3.2, 3.6.3.3 en 3.6.3.7 (in die twee-steekproef geval) vir ses spesifieke verdelings, sien KLOTZ(1962).

3.6.3.8. $\Psi_N(\delta_{ij}) = E(\xi_{r_{ij}}^2)$ – sien §2.5.3.7, CROUSE(1960) §4.14 en CAPON(1961).

Hier is

$$(2.150)\quad t_i' = \sum_j E(\xi_{r_{ij}}^2)$$ met toetsingsgrootheid T_2 gegee in (2.153).

Met $J_N[F(x)] = E(\xi^2_{NF(x)})$ word voorwaarde (3.93) bevredig. Ook die ander nodige voorwaardes word in die algemeen bevredig - sien byvoorbeeld CAPON(1961).

Uit STOKER(1955) p. 55 volg

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h \Xi_h^r = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^r dF(\xi) \quad \text{mits} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^r dF(\xi) < \infty.$$

Vir $F(x) = \Phi(z)$, die normaal (0,1)-verdelingsfunksie, volg op soortgelyke wyse as in §3.6.3.7 dat

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_h (\Psi_{Nh} - \bar{\Psi}_N)^2 = 2.$$

Met behulp hiervan en vergelyking (3.157) volg:

$$(3.176)\quad E_{T_{T_2},B} = \tfrac{1}{8}(\beta_2 - 1)\left[\int_{-\infty}^{\infty} xf^2(x)J'[F(x)]dx\right]^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\beta_2 - 1)\left[\int_{-\infty}^{\infty} xz \frac{\phi(z)}{(\frac{dx}{dz})} dz\right]^2 \text{ vir } F(x) = \Phi(z) \quad -$$

sien CROUSE(1960) §4.14 .

Hierdie toets is bespreek deur CROUSE(1960) en CAPON(1961) in die twee-steekproef geval. KLOTZ(1962) beweer (sonder bewys) dat hierdie toets asimptoties ekwivalent is aan dié van §3.6.3.7 vir k = 2.

CROUSE(1960) het vir die twee-steekproef geval bewys dat die a.r.d. van T_{T_2} m.b.t. die F-toets gegee word deur

$$(3.177)\quad E_{T_{T_2},F} = \tfrac{1}{8}(\beta_2 - 1)\left[\int_{-\infty}^{\infty} xf^2(x)J'[F(x)]dx\right]^2$$

wat ekwivalent is aan $E_{T_{Q_2},B}$ in (3.175) en ook dieselfde as die ooreenkomstige uitdrukking (3.176) in die geval van k steekproewe. (Die aantal steekproewe k speel geen rol in die a.r.d.-uitdrukkings nie).

Opmerkings.

1). Vir die normaal $(0,\sigma^2)$-verdeling is $E_{T_{T_2},B} = 1$ en vir die homogene verdeling is $E_{T_{T_2},B} = \infty$ (CROUSE(1960)).

2). CROUSE(1960) se vermoede dat $E_{T_{T_2},B} \geq 1$ word weerspreek deur KLOTZ(1962) wat bewys het dat $E_{T_{T_2},B} = 0.47$ vir die verdeling met verdelingsfunksie

$F(x) = \Phi(x^{\alpha})$, $\alpha \to \infty$ (sien §3.6.3.7 opmerking 1).

3.7. ASIMPTOTIESE ONDERSKEIDENDHEID.

3.7.1. Inleiding.

Uit (3.110) volg

$$(3.178)\quad T_k' = \sum_i (N-n_i)[t_i'/n_i - E(t_i'/n_i \mid H_o)]^2[N\mathrm{var}(t_i'/n_i \mid H_o)]^{-1}.$$

Stel

$$(3.179)\quad E_{io} = E(t_i'/n_i \mid H_o),$$

$$(3.180)\quad E_{ia} = E(t_i'/n_i \mid H_a),$$

$$(3.181)\quad \sigma_{io}^2 = \mathrm{var}(t_i'/n_i \mid H_o) \quad \text{en}$$

$$(3.182)\quad \sigma_{ia}^2 = \mathrm{var}(t_i'/n_i \mid H_a).$$

Uit stellings 3.8 en 3.11 en vergelyking (3.178) volg dat

$$(3.183)\quad T_k' = \sum_i (N-n_i)[t_i'/n_i - E_{io}]^2[N\sigma_{io}^2]^{-1}$$

onder voorwaardes (3.10)-(3.14), (3.92), (3.93) en

óf

$$(3.97)\quad H_a:\ F_i(x) = F(x+d_i N^{-\frac{1}{2}}),\ i=1,2,\ldots,k \quad \text{en (3.98)}$$

óf

$$(3.142)\quad H_a:\ F_i(x) = F(x+d_i x N^{-\frac{1}{2}}) \text{ met } \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_i(x) = 0,$$

$i=1,2,\ldots,k$ en (3.143),

asimptoties, vir $N \to \infty$, 'n nie-sentrale χ^2-verdeling besit met $(k-1)$ g.v.v. en nie-sentraliteitsparameter

$$(3.184)\quad \lambda_k^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_i (N-n_i)[E_{ia}-E_{io}]^2[N\sigma_{io}^2]^{-1}$$

$$= \sum_i (1-\nu_i)\gamma_i^2 \quad \text{waar}$$

$$(3.185)\quad \gamma_i \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} |(E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}|\ .$$

Definieer χ_α^2 deur $P[\chi^2 \geq \chi_\alpha^2 | H_o] = \alpha$.

Dan is T_k' asimptoties onderskeidend met betrekking tot die klas van hipoteses H waarvoor

(3.186) $\lim_{N\to\infty} P[T_k' \geq \chi_\alpha^2 | H] = 1$ vir elke alternatiewe hipotese H in die klas - sien §1.3 en CROUSE(1960).

3.7.2. 'n Belangrike Stelling.

STELLING 3.13.

Onder voorwaardes (3.10)-(3.14), (3.92) en (3.93) is T_k' asimptoties onderskeidend met betrekking tot alle H waarvoor minstens een $\gamma_i = \infty$ solank net (3.72) geld.

Bewys: Neem eerstens

(3.187) $\lim_{N\to\infty} (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io} = +\infty$ vir enige bepaalde i uit 1,2,...,k.

Dan is

(3.188) $P[T_k' < \chi_\alpha^2] = P[\sum_{i'} \hat{t}_{i'}'^2 < \chi_\alpha^2]$

$\leq P[\hat{t}_i'^2 < \chi_\alpha]$

$= P[|\hat{t}_i'| < \chi_\alpha]$

$= P[|(N-n_i)^{\frac{1}{2}}(t_i'/n_i - E_{io})/(N^{\frac{1}{2}}\sigma_{io})| < \chi_\alpha]$

$= P[|t_i'/n_i - E_{io}| < \chi_\alpha \sigma_{io}(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}]$

$\leq P[\ t_i'/n_i - E_{io}\ < \chi_\alpha \sigma_{io}(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}]$

$= P[(t_i'/n_i - E_{ia})/\sigma_{ia} < \sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}\{\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}\}]$.

Omdat $\lim_{N\to\infty} \chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}$ = konstant $< \infty$ (want $\lim_{N\to\infty} \nu_{Ni} < 1$ uit (3.4)), volg uit (3.187) dat

$\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}$ negatief is vir voldoende groot N, sê vir $N > N_o$.

Derhalwe geld vir $N > N_o$:

(3.189) $P[(t_i'/n_i - E_{ia})/\sigma_{ia} < \sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}\{\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}\}]$

$\leq P[|(t_i'/n_i - E_{ia})/\sigma_{ia}| \geq \sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}|\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}|]$

$= P[(t_i'/n_i - E_{ia})^2/\sigma_{ia}^2 \geq \sigma_{io}^2\sigma_{ia}^{-2}\{\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}\}^2]$

$$\leq \frac{1}{\sigma_{io}^2\sigma_{ia}^{-2}[\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} - (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}]^2}$$ met behulp van

Tchebycheff se ongelykheid.

Onder voorwaarde (3.72) volg m.b.v. (3.68) en lemma 3.23 dat

(3.190) $0 < \lim_{N\to\infty} N\sigma_{ia}^2 < \infty$ en

(3.191) $0 < \lim_{N\to\infty} N\sigma_{io}^2 < \infty$, sodat

(3.192) $0 < \lim_{N\to\infty} \sigma_{io}^2/\sigma_{ia}^2 < \infty$.

Nou volg m.b.v. (3.188) en (3.189):

$\lim_{N\to\infty} P[T_k' < \chi_\alpha^2] = 0$, d.w.s.

(3.193) $\lim_{N\to\infty} P[T_k' \geq \chi_\alpha^2] = 1$.

T_k' is dus asimptoties onderskeidend indien (3.187) geld.

Beskou vervolgens

(3.194) $\lim_{N\to\infty} (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io} = -\infty$ vir enige bepaalde i uit 1,2,...,k.

(3.195) $P[T_k' \geq \chi_\alpha^2] = P[\sum_{i'} \hat{t}_{i'}'^2 \geq \chi_\alpha^2]$

$$\geq P[\hat{t}_i'^2 \geq \chi_\alpha^2]$$

$$= P[|\hat{t}_i'| \geq \chi_\alpha]$$

$$= P[|t_i'/n_i - E_{io}| \geq \chi_\alpha\sigma_{io}(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}]$$

$$= P[|(t_i'/n_i - E_{io})/\sigma_{ia}| \geq \sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}] .$$

Omdat $\lim_{N\to\infty} \chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}$ = konstant $< \infty$, geld vir alle N voldoende groot:

(3.196) $P[|(t_i'/n_i-E_{io})/\sigma_{ia}| \geq \sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}] \geq$

$$\geq P[(t_i'/n_i-E_{io})/\sigma_{ia} < -\sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}]$$

$$= 1 - P[(t_i'/n_i-E_{ia})/\sigma_{ia} \geq -\sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}\{\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}}+(E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}\}]$$

$$\geq 1 - [-\sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}\{\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} + (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}\}]^{-2}$$ vir N

voldoende groot m.b.v. Tchebycheff se ongelykheid, want

$- \sigma_{io}\sigma_{ia}^{-1}[\chi_\alpha(1-\nu_{Ni})^{-\frac{1}{2}} + (E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}] > 0$ vir N voldoende groot.

Dus

(3.197) $\lim_{N\to\infty} P[T_k' \geq \chi_\alpha^2] = 1$

waarmee bewys is dat T_k' asimptoties onderskeidend is as (3.194) geld.

Hiermee is die stelling bewys.

Opmerkings.

1). Neem alternatiewe hipoteses van die vorm

(3.97) H_a: $F_i(x) = F(x+d_iN^{-\frac{1}{2}})$, $i=1,2,\ldots,k$,

dan geld onder voorwaarde (3.98) dat

(3.198) $\gamma_i = \lim_{N\to\infty} |(E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}|$

$= \nu_i^{\frac{1}{2}}(1-\nu_i)^{-\frac{1}{2}}|(d.-d_i)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)J'[F(x)]dF(x)\lim_{N\to\infty}[N^{-1}\sum_h(\Psi_{Nh}-\bar{\Psi}_N)^2]^{-\frac{1}{2}}|$

uit (3.117)

= konstant $< \infty$ m.b.v. (2.41) omdat F(x) kontinu veronderstel word, sodat

(3.199) $0 \leq \gamma_i < \infty$ vir $i=1,2,\ldots,k$.

Vir alle γ_i eindig besit T_k' onder voorwaardes (3.97), (3.98) en die voorwaardes van hierdie stelling asimptoties 'n nie-sentrale χ^2-verdeling met eindige nie-sentraliteitsparameter

(3.184) $\lambda_k^2 = \sum_i(1-\nu_i)\gamma_i^2$ (stelling 3.8).

Gevolglik is T_k' nie asimptoties onderskeidend indien alle γ_i eindig is nie (sien ook KENDALL en STUART(1961) vol. II p. 231).

2). Vir alternatiewe hipoteses van die vorm

(3.142) H_a: $F_i(x) = F(x+d_ixN^{-\frac{1}{2}})$ met $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_i(x) = 0$,

$i=1,2,..,k$ kan onder voorwaarde (3.143) en die voorwaardes van hierdie stelling analoë resultate bewys word as in opmerking 1 hierbo.

3). Uit (3.94) volg

$\lim_{N\to\infty} |E_{ia}-E_{io}| \neq 0$ as

$$\int_{-\infty}^{\infty} J[H(x)]dF_i(x) \neq \int_{-\infty}^{\infty} J[F(x)]dF(x) \ . \tag{3.200}$$

Maar uit (3.191) is $\sigma_{io} = O(N^{-\frac{1}{2}})$.

Dus $\gamma_i = \lim_{N\to\infty} |(E_{ia}-E_{io})/\sigma_{io}| = \infty$ onder (3.200).

T_k' is dus asimptoties onderskeidend met betrekking tot die klas van alternatiewe waarvoor (3.200) geld onderhewig aan (3.72).